PRÉFACE

La fonction zêta de Riemann est sans aucun doute l'un des objets mathématiques les plus célèbres et les plus étudiés. Cependant, la conjecture de Riemann concernant les zéros de cette fonction reste un défi.

Le présent volume offre trois points de vue sur la fonction zêta. Il est illustré par des représentations graphiques très spectaculaires obtenues par J.-F. Colonna.

Les textes...

• Le texte de Jean-Benoît Bost est une version remaniée et développée d'un chapitre de son cours à l'École polytechnique. Il nous propose une démonstration du *théorème des nombres premiers*, donnant une estimation asymptotique en x du nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. C'est certainement l'un des grands résultats mathématiques de la fin du XIXème siècle et une belle application des méthodes analytiques en théorie des nombres. On trouvera, en appendice du texte, une copie de la Note de Jacques Hadamard aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences, où l'auteur se « propose simplement de faire voir que $\zeta(s)$ ne saurait avoir de zéros dont la partie réelle soit *égale* à 1 ». [On trouvera dans le volume 1 des *Œuvres complètes* de J. Hadamard, éditées par le CNRS, plusieurs mémoires sur les fonctions analytiques avec des applications à l'étude de la fonction zêta et à l'arithmétique.]

• Le *théorème de la progression arithmétique* de Dirichlet, montrant l'existence d'une infinité de nombres premiers dans toute progression arithmétique, a nécessité l'introduction des « séries de Dirichlet », de la forme $\sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s}$, et plus particulièrement des fonctions L, sommes de telles séries lorsque les coefficients a_n sont certaines racines de l'unité. La fonction zêta de Riemann est la série de Dirichlet dans laquelle tous les coefficients a_n sont égaux à 1. Elle a été introduite sous cette forme par Euler. De plus, des fonctions zêta associées à des anneaux d'entiers autres que $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ ont aussi été considérées. Enfin, des fonctions zêta d'une variable p-adique sont utiles dans la démonstration de congruences arithmétiques, dites *congruences de Kummer*.

Le gros texte de Pierre Colmez nous offre un panorama complet de la famille des zêtas complexes et p-adiques.

D'une part, il nous présente un aspect très actuel de la théorie, celui des propriétés diophantiennes des valeurs aux entiers de la fonction zêta de Riemann. Un théorème tout récent (2000) de T. Rivoal, alors professeur de lycée, montre qu'une *infinité* de nombres de la forme $\zeta(2k+1)$ $(k \in \mathbb{N})$ sont des nombres irrationnels. Ceci fait suite à un théorème d'Apéry (1978), montrant que $\zeta(3)$ est irrationnel.

D'autre part, il constitue une remarquable introduction au monde p-adique et à l'analyse « ultramétrique » correspondante. Dans ce monde vit aussi une fonction zêta p-adique, dont les zéros reflètent certaines propriétés arithmétiques de p *via* les extensions $\mathbb{Q}(e^{2i\pi/p^n})$.

• La conjecture de Riemann a, on s'en doute, excité l'esprit des mathématiciens, et de nombreuses stratégies ont été développées pour la démontrer. L'une d'entre elles consiste à essayer d'exprimer les nombres complexes γ tels que $\frac{1}{2} + i\gamma$ soit un zéro non réel de ζ, comme les valeurs propres d'un opérateur autoadjoint agissant sur un espace de Hilbert. La répartition de ces nombres γ a fait l'objet d'études de nature probabiliste, et a été comparée à la répartition des valeurs propres de grandes matrices hermitiennes aléatoires.

Le texte de Philippe Biane nous présente, dans sa première partie, cette comparaison. Dans la deuxième partie, il nous explique comment la fonction zêta intervient de manière naturelle dans l'étude du mouvement brownien.

…et les images. L'illustration de couverture est une visualisation tridimensionnelle de la fonction zêta de Riemann. Le graphe de la fonction $z \mapsto |\zeta(z)|$ est représenté par une surface dans $\mathbb{C} \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3$ et l'argument est codé par une couleur qui prend les valeurs (bleu, rouge, magenta, vert, cyan, jaune, blanc). On distingue le pôle en $z = 1$, quelques zéros entiers négatifs et quelque zéros sur la droite $\text{Ré}(z) = 1/2$. La variation de la couleur représentant l'argument produit un effet de perspective, de sorte que la partie du graphe au-dessus de $\text{Ré}(z) > 1$ semble très plate.

La deuxième illustration est une visualisation bidmensionnelle de la fonction argument de zêta. L'ensemble $[0, 2\pi]$ est découpé en intervalles auxquels on associe alternativement le noir et le blanc. On associe au nombre π la couleur rouge. L'image visualise donc la fonction « couleur de l'argument de $\zeta(z)$ ». Au voisinage d'un zéro ou d'un pôle de ζ, l'argument de ζ peut prendre toutes les valeurs possibles, d'où la confluence des lignes de couleur vers ces points.

Ces images sont l'œuvre de J.-F. Colonna, du Centre de mathématiques appliquées de l'École polytechnique, qui les expose ainsi que beaucoup d'autres sur le site Internet

`http://www.lactamme.polytechnique.fr/`

La première se trouve à l'adresse
`http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/ZETA.21.M.D/display.html`
la deuxième à
`http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/ZETA.21.Ph.D/display.html`

Elles sont reproduites dans ce livre avec l'aimable autorisation de J.-F. Colonna.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle

importante qu'elles ont apportée à la préparation des journées X-UPS, ainsi que les Éditions de l'École polytechnique qui ont bien voulu accueillir la série *Journées mathématiques X-UPS* au sein de leurs collections.

Nous remercions aussi les secrétaires du Centre de mathématiques pour leur contribution à l'organisation des journées X-UPS, notamment Claudine Harmide et Michèle Lavallette.

Nicole Berline et Claude Sabbah