

## PRÉFACE

La théorie mathématique des jeux est née dans la première moitié du XX<sup>e</sup> siècle, pour formaliser et résoudre des problèmes de nature économique ou stratégique.

Après une présentation des fondements de la théorie, les exposés de ce volume en développent un des aspects : les jeux répétés.

Ces journées doivent beaucoup aux conseils de Sylvain Sorin, que nous remercions.

Nous tenons aussi à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle importante qu'elle a apportée à la préparation des journées X-UPS. Nous remercions les Éditions de l'École polytechnique qui ont bien voulu accueillir la série *Journées mathématiques X-UPS* au sein de leurs collections.

Nous remercions enfin les secrétaires du Centre de mathématiques, notamment Claudine Harmide et Michèle Lavallette, pour leur contribution à l'organisation de ces journées.

*Nicole Berline, Alain Plagne et Claude Sabbah*



## INTRODUCTION

La théorie des jeux est une discipline qui étudie la *prise de décision interactive* : plusieurs personnes, ou joueurs, doivent prendre des décisions, choisir des actions, qui vont induire un résultat, les intérêts des joueurs étant potentiellement divergents.

Si les mathématiciens ont toujours montré un fort intérêt pour les jeux de hasard ou de stratégie, les premiers travaux théoriques sur les jeux de stratégie apparaissent au début du  $xx^e$  siècle avec Zermelo (1912), Borel (1921), Von Neumann (1928). La théorie des jeux naît réellement comme discipline sous l'impulsion du mathématicien John Von Neumann et de l'économiste Oskar Morgenstern, qui écrivent en 1944 un livre fondateur : *Games and Economic Behavior*. Les travaux de John Nash (1950), en donnant une notion de solution pour les jeux à somme non nulle, confortent cette fondation. Depuis, la théorie des jeux a connu un développement mathématique important et de nombreuses applications dans diverses disciplines : biologie, informatique, économie. Le succès est particulièrement remarquable en économie et plusieurs théoriciens des jeux ont reçu le prix Nobel d'économie : John C. Harsanyi, John F. Nash et Reinhardt Selten en 1994, Robert J. Aumann et Thomas C. Schelling en 2005. La théorie des jeux comporte aujourd'hui plusieurs branches : jeux coopératifs, jeux stratégiques, jeux à information incomplète, jeux dynamiques, jeux différentiels. Nous présentons ici les fondements mathématiques de la théorie des

jeux stratégiques et développons un des thèmes principaux : les jeux répétés.

Il y a deux façons de décrire un jeu, la première étant de donner la règle du jeu, c'est-à-dire décrire précisément son déroulement, comment les joueurs interviennent, quelles sont les issues du jeu et les gains — ou paiements — des joueurs une fois le jeu terminé. C'est la façon la plus courante de décrire un jeu, et on parle alors de jeu *sous forme extensive*. On peut alors définir la notion de *stratégie* : une stratégie est un plan d'action qui prévoit ce que doit faire le joueur dans chaque éventualité qu'il va rencontrer. On peut voir une stratégie comme un programme informatique, une liste d'instructions données à un ordinateur, lui permettant de jouer le jeu. Lorsque chaque joueur choisit une telle stratégie, le déroulement du jeu est fixé et on peut, au moins théoriquement, calculer l'issue du jeu et les paiements. La seconde façon de décrire un jeu consiste à donner, pour chaque joueur, l'ensemble de ses stratégies, ainsi que les applications qui associent aux vecteurs — ou profils — de stratégies, les paiements des joueurs. On parle alors de jeu *sous forme stratégique*. Suivant la complexité du jeu, donner la forme stratégique peut être beaucoup plus difficile que donner la forme extensive : dans le jeu Pierre, Feuille, Ciseaux, où les choix sont simultanés, chaque joueur a trois stratégies et les fonctions de paiement sont faciles à écrire. Pour le jeu d'échecs, décrire la règle du jeu est assez simple, alors que donner l'ensemble des stratégies est humainement impossible.

L'avantage de la forme stratégique est de permettre une formalisation mathématique claire et compacte : un jeu à  $n$  joueurs est une application d'un produit cartésien de  $n$  facteurs dans  $\mathbb{R}^n$ . Grâce à des techniques d'analyse réelle et convexe, on obtient des théorèmes d'existence relativement généraux. On peut obtenir des résultats plus précis de structure voire de caractérisation des solutions dans les jeux répétés, qui sont des jeux dynamiques ayant des propriétés de stationnarité dans le temps.

Nous nous sommes inspirés de plusieurs sources : l'ouvrage « Repeated Games » de Jean-François Mertens, Sylvain Sorin et Schmeidler Zamir (1994) , le Handbook of Game theory, « A First Course on

Zero-Sum Repeated Games » de Sylvain Sorin (2002). Citons aussi quelques manuels classiques de théorie des jeux : « A course in game theory », Osborne et Rubinstein (1994), « Stability and Perfection of Nash Equilibria », Van Damme (1987), « Game Theory », Myerson (1991). Un article récent dans MATAPLI (Janvier 2006) présente brièvement certains travaux importants de R.J. Aumann.

Dans le premier texte, Tristan Tomala présente les jeux sous forme stratégique et leur analyse mathématique. Dans le second, il décrit le modèle de jeu répété et en étudie une classe assez simple : les jeux répétés à information complète et observation parfaite. Dans le troisième texte, Jérôme Renault présente les principaux résultats concernant les jeux répétés à information incomplète. Dans le quatrième, Rida Laraki traite des jeux stochastiques.

Nous remercions chaleureusement Sylvain Sorin pour son aide à la préparation des journées X-UPS 2006.

*Rida Laraki, Jérôme Renault et Tristan Tomala*