

## PRÉFACE

La première fois que l'on fait connaissance avec la non-commutativité, en mathématique, c'est certainement lorsqu'on aborde les matrices, le cas le plus simple étant celui des matrices de taille 2, que l'on écrit sous la forme  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ . Ainsi, pour deux telles matrices  $A$  et  $B$ , on découvre, souvent avec l'impression d'une imperfection, que le produit  $AB$  peut être différent du produit  $BA$ . D'autres types de transformations présentent cette « imperfection », les permutations d'un ensemble fini par exemple, mais elles sont moins évidemment reliées aux transformations des figures géométriques du plan, donc moins facilement visualisables.

Les mathématiciens ont très tôt recherché cette structure non commutative fondamentale dans des situations plus compliquées : dans quelles structures mathématiques retrouve-t-on, caché, le groupe des matrices inversibles de taille 2 ? Ils posent la question de la manière suivante : dans quelles structures se trouve-t-il *représenté* ? C'est à la fin du XIX<sup>e</sup> siècle que cette notion a commencé à se développer (Frobenius), dans le cas des groupes finis, donc loin de notre groupe de matrices...

Pas si loin, cependant, car que sont les nombres  $a, b, c, d$ , qu'on appelle *éléments* (ou coefficients, ou entrées par anglicisme) de la matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  ? Des nombres réels, si l'on s'en tient à l'interprétation géométrique, mais pourquoi pas des nombres entiers, des nombres entiers modulo un nombre premier  $p$ , autrement dit toute sorte de nombres

qui se multiplient de manière commutative ( $ab = ba$ ). Ainsi, les matrices inversibles de taille 2 à éléments dans le corps des nombres entiers modulo  $p$  forment un groupe non commutatif et fini, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de tels nombres ( $p$  exactement, donc  $p^4$  matrices de taille 2, et un peu moins de matrices inversibles).

Les physiciens ont vite compris l'intérêt de la notion de représentation, et l'importance de la notion de *représentation irréductible*, brique de base de la théorie, de même que la notion de bloc de Jordan est essentielle en algèbre linéaire. Les travaux de Frobenius, qui construisait et classifiait toutes ces représentations pour certains groupes finis, ont servi de modèle dans des cadres bien différents. La théorie s'applique bien sûr aux groupes de matrices à éléments dans un corps fini (nombres entiers modulo  $p$  par exemple), mais aussi aux groupes de matrices à éléments dans un autre corps : nombres réels, nombres complexes, nombres  $p$ -adiques. Les techniques développées peuvent paraître très éloignées, il n'empêche que les mathématiciens s'efforcent d'en reconnaître l'unité fondamentale. On utilise ainsi la théorie de Fourier, que l'on soit sur  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}_p$  ou  $\mathbb{F}_p$ . De même, la construction de représentations par la méthode d'induction/restriction se fait dans tous ces cadres, et joue un rôle essentiel dans la théorie. Tout aussi importante est la notion de *caractère* d'une représentation. On ne s'étonnera donc pas de retrouver dans les textes de ce volume ces notions sous des aspects variés.

Et l'arithmétique? Comme on le verra dans les textes de Guy Henniart, les considérations ci-dessus (et d'autres) ont permis à Andrew Wiles d'aboutir à une démonstration du « grand théorème » de Fermat, affirmant l'absence de solution en nombres entiers  $x, y, z$  à l'équation  $x^n + y^n = z^n$  dès que  $n$  est un entier supérieur ou égal à 3. Ici interviennent simultanément au moins deux aspects (géométrique et arithmétique) du groupe des matrices inversibles de taille 2, sous la forme du « groupe modulaire ». Ce sous-groupe de matrices de déterminant 1 et dont les éléments sont entiers transforme en lui-même le demi-plan formé des points dont la deuxième coordonnée est positive (demi-plan de Poincaré, voir le volume 2007 de ces journées). Le terme « modulaire » renvoie aux modules, au sens des paramètres

essentiels d'une structure (à ne pas confondre avec la notion homonyme de module sur un anneau). L'espace quotient du demi-plan de Poincaré par le groupe modulaire est l'espace des paramètres essentiels des « courbes elliptiques ». Et c'est bien de courbes elliptiques qu'il s'agit, dans la « conjecture de Taniyama-Weil » démontrée par A. Wiles et R. Taylor, et plus précisément de courbes elliptiques définies par une équation à coefficients rationnels.

Dans le premier texte de ce volume, Guy Henniart décrit brièvement la théorie générale des représentations linéaires des groupes finis. Les représentations sont à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie. Les représentations irréductibles, à isomorphisme près, sont en nombre fini. De plus, à équivalence près, toute représentation de dimension finie se décompose en somme directe de représentations irréductibles. Cette situation, purement algébrique, présente l'avantage d'être à la fois simple et représentative des difficultés rencontrées dans le cas non abélien. Les méthodes classiques de construction de représentations (restriction-induction) permettent d'obtenir la liste complète des représentations irréductibles de  $GL(2, k)$  lorsque  $k$  est un corps fini. Deux grandes catégories de représentations figurent dans cette liste : les représentations de la « série principale » et les représentations dites « cuspidales ».

Cette terminologie provient de la théorie des représentations unitaires de  $SL(2, \mathbb{R})$  (matrices de déterminant 1), exposée dans le texte de Martin Andler. Pour toute représentation irréductible, les matrices sont *représentées* par des opérateurs bornés sur un espace de Hilbert compatibles au produit hermitien sur cet espace (opérateurs unitaires). Les problèmes liés aux choix de topologies et à la continuité ou non des opérateurs considérés sont nombreux et la théorie des représentations nécessite ici des concepts d'analyse, en particulier d'analyse fonctionnelle et de théorie spectrale. Martin Andler aborde toutes ces questions dans la première partie de son texte, le point de vue adopté étant d'expliquer comment la théorie des représentations des groupes topologiques localement compacts peut se voir comme la généralisation au cas non commutatif de la théorie de la transformation de Fourier.

Dans la deuxième partie de son texte, Martin Andler donne la liste complète des représentations unitaires irréductibles de  $SL(2, \mathbb{R})$  à équivalence près. Celles de  $GL(2, \mathbb{R})$  et d'autres groupes « compagnons » s'en déduisent. On retrouve dans cette liste plusieurs familles de représentations : la série principale, la série discrète, deux limites de séries discrètes et la série complémentaire. Ainsi, de même qu'un endomorphisme a une décomposition de Jordan, une représentation unitaire a une décomposition en somme directe de représentations irréductibles. De même que pour certains opérateurs linéaires en dimension infinie le spectre se compose d'une partie discrète et d'une partie continue, les représentations irréductibles se classent en familles discrètes et en familles continues. Une telle classification s'obtient en ramenant l'étude à une situation purement algébrique, concernant les représentations irréductibles de l'algèbre de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  des matrices de trace nulle.

Martin Andler explique succinctement comment les formes modulaires s'interprètent naturellement en termes de représentations irréductibles de  $GL(2, \mathbb{R})$ , point important dans la preuve de A. Wiles.

Après les corps finis et le corps des nombres réels, nous passons au corps des nombres  $p$ -adiques, présenté par Corinne Blondel dans son premier texte. Sa distance ultramétrique lui donne des propriétés topologiques éloignées de l'intuition que l'on a avec les nombres réels : sa topologie est localement compacte et totalement discontinue (de tels objets sont déjà intervenus lors des journées 2008, voir le volume correspondant). La notion de continuité d'une représentation est adaptée à ce cadre, et on obtient les « représentations lisses ». Dans son deuxième texte, Corinne Blondel indique le principe de classification des représentations lisses irréductibles de  $GL(2, \mathbb{Q}_p)$ . On retrouve comme dans le cas du groupe  $GL(2, k)$ ,  $k$  fini, deux grandes catégories : les représentations irréductibles de la série principale et les représentations cuspidales.

Guy Henniart esquisse enfin, dans son deuxième texte, le cheminement de A. Wiles aboutissant au théorème de Fermat. Il montre comment tout le matériel introduit précédemment intervient de manière sous-jacente et essentielle dans cette formidable démonstration.

Nous tenons à remercier la direction de l'École polytechnique, et tout particulièrement la Direction des Études, pour l'aide matérielle importante qu'elles ont apportée à la préparation de ces journées et à la publication de ce volume. Nous remercions aussi le secrétariat du Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, notamment Carole Juppín et Michèle Lavallette.

*Pascale Harinck, Alain Plagne et Claude Sabbah*