Journées mathématiques X-UPS

Année 2010

Facettes mathématiques de la mécanique des fluides

David GÉRARD-VARET

De Navier-Stokes vers Euler

Journées mathématiques X-UPS (2010), p. 75-91.
https://doi.org/10.5802/xups.2010-04

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2010, p. 75–91 doi: 10.5802/xups.2010-04

DE NAVIER-STOKES VERS EULER

par

David Gérard-Varet

Résumé. Une question très naturelle est de savoir si, dans la limite d'une très faible viscosité ($\nu \to 0$), les solutions des équations de Navier-Stokes *convergent* vers celles des équations d'Euler. Cette question est considérée dans ce texte, dans deux cadres différents : le cas où les équations sont posées dans un domaine sans bords, et le cas d'un domaine borné (qui est redoutablement plus difficile, à cause de la présence de *couches limites*). L'étude de ce passage à la limite dans le cas avec bord permet de présenter une équation *mal posée*, l'équation de Prandtl.

Table des matières

Nous souhaitons dans cette partie et la suivante évoquer une facette très actuelle des recherches en mécanique des fluides : l'analyse des phénomènes de petite échelle. Mathématiquement, ces phénomènes sont induits par des petits paramètres dans les EDP qui décrivent les écoulements. Pour identifier ces paramètres, on doit au préalable « adimensionner » le système, c'est-à-dire le renormaliser en définissant des échelles (de longueur, de temps, etc.) typiques du phénomène

Publication originelle dans Journées X-UPS 2010. Facettes mathématiques de la mécanique des fluides. Éditions de l'École polytechnique, 2010.

considéré. Illustrons ce processus sur le modèle classique des équations de Navier-Stokes :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

où $\nu = \mu/\rho$ est appelé viscosité cinématique. Nous notons U et L des vitesse et longueur typiques du problème. Par exemple, si l'on considère un écoulement dans un canal, U sera la vitesse moyenne au milieu du canal, et L sa largeur. Nous posons

$$u = Uu', \quad x = Lx', \quad t = \frac{L}{U}\, t', \quad p = U^2 p'.$$

À l'aide de ces nouvelles quantités, on aboutit au système sans dimension

$$\begin{cases} \partial_{t'} u' + u' \cdot \nabla' u' + \nabla' p' - \dfrac{1}{\mathrm{Re}} \Delta' u' = 0 \\ \operatorname{div}' u' = 0 \end{cases}$$

avec pour unique paramètre le *nombre de Reynolds*

$$\mathrm{Re} \overset{\text{déf.}}{=} \frac{UL}{\nu}\cdot$$

Or dans la plupart des écoulements intéressants, dont les écoulements turbulents, ce nombre de Reynolds est très élevé. Ainsi, Re est de l'ordre de plusieurs millions pour un écoulement d'air autour d'une aile d'avion. Un problème central en hydro- et aérodynamique est donc d'analyser le comportement du système

$$(\mathrm{NS}^\varepsilon) \qquad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \varepsilon \Delta u = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

quand $\varepsilon \to 0$. On souhaite connaître le comportement asymptotique de la suite de solutions (u^ε). Ce problème a fait l'objet de nombreuses études mathématiques. Il a principalement deux sources de difficultés :

- l'irrégularité des solutions.
- les bords du domaine d'évolution.

Nous allons aborder ces deux aspects dans les paragraphes suivants.

4.1. Convergence dans des domaines sans bords

Nous négligeons ici les effets de bord et considérons (NS^ε) dans tout l'espace $\mathbb{R}^d$. Dans ce contexte, le problème de la convergence des solutions lorsque $\varepsilon \to 0$ dépend de la régularité des solutions considérées.

Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ une donnée initiale de divergence nulle, que nous supposons pour simplifier indépendante de ε. Soient u^ε, $\varepsilon > 0$, les solutions turbulentes associées, au sens de la définition 2.2.2 de [3]. Ces solutions vérifient l'inégalité d'énergie

$$\frac{1}{2}\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2\, ds \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|_{L^2}^2, \quad \text{pour tout } t. \tag{4.1.1}$$

En particulier, la suite (u^ε) est bornée dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d))$, et admet donc des valeurs d'adhérence pour la topologie faible*. Rappelons que la topologie faible* sur le dual topologique E' d'un espace vectoriel normé E est simplement la topologie de la convergence simple. Ici, $L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d))$ est vu comme le dual topologique de l'espace $L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d))$: u^ε converge vers u^0 pour la topologie faible* si :

$$\forall v \in L^1(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}^d)),$$
$$\int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} u^\varepsilon(t,x)\, v(t,x)\, dx\, dt \longrightarrow \int_0^{+\infty}\int_{\mathbb{R}^d} u^0(t,x)\, v(t,x)\, dx\, dt,$$

quand $\varepsilon \to 0$. On souhaite déterminer les équations vérifiées par les valeurs d'adhérence u^0. En particulier, un tel champ u^0 satisfait-il les équations d'Euler, c'est-à-dire le système (NS^ε) avec $\varepsilon = 0$?

Cette question est maintenant bien comprise. Schématiquement :

- si la donnée initiale u_0 génère une solutions u de l'équation d'Euler sur $[0,T]$, $T > 0$,
- si cette solution est « raisonnablement » régulière,

alors toute valeur d'adhérence u^0 coïncide avec u sur $]0,T[$. Pour illustrer cette idée, considérons le cas favorable où u vérifie :

$$\begin{aligned} u &\in C([0,T], L^2(\mathbb{R}^d)), \\ \nabla u &\in L^2(]0,T[\times\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(]0,T[\times\mathbb{R}^d), \end{aligned} \qquad T > 0.$$

Considérons la différence $v^\varepsilon = u^\varepsilon - u$. Le champ v^ε est une solution du système

$$\text{(4.1.2)}\quad \begin{cases} \partial_t v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon + u \cdot \nabla v^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla u + \nabla p^\varepsilon - \varepsilon \Delta v^\varepsilon = \varepsilon \Delta u, \\ \operatorname{div} v^\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Faisons le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ de v^ε avec les deux membres de la première équation de (4.1.2). Notons que, comme dans [3], cette manipulation formelle peut être justifiée rigoureusement, par exemple *via* troncature en fréquences. Après intégration par parties, on aboutit à l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,\|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla v^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 \leqslant \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |v^\varepsilon(s,x)|^2 |\nabla u(s,x)|\, dx\, ds \\ + \varepsilon \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(s,x)|\, |\nabla v^\varepsilon(s,x)|\, dx\, ds \end{aligned}$$

pour presque tout $t \in]0,T[$. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\,\|v^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 \leqslant \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^\infty} \int_0^t \|v^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 ds.$$

On conclut par un lemme de Gronwall que

$$\|v^\varepsilon\|_{L^\infty(L^2)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^2} \sqrt{2\varepsilon}\, \exp\left(\|\nabla u\|_{L^\infty}\, t\right),$$

ce qui montre la convergence de u^ε vers u dans $L^\infty(0,T;\, L^2(\mathbb{R}^d))$ avec un taux $\sqrt{\varepsilon}$.

Naturellement, la convergence de u^ε vers u peut être établie sous des hypothèses de régularité beaucoup moins fortes sur u. C'est en particulier vrai en deux dimensions d'espace, grâce au simple transport du tourbillon ω le long des lignes de courant, cf. [1]. En particulier, la convergence est vérifiée pour les solutions u à tourbillon borné considérées dans [1]. Pour une description beaucoup plus complète des résultats de convergence existants, nous renvoyons à [11].

En revanche, sous la seule hypothèse que les solutions de Leray u^ε satisfont la borne d'énergie

$$\frac{1}{2}\,\|u^\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + \varepsilon \int_0^t \|\nabla u^\varepsilon(s)\|_{L^2}^2 \leqslant C,$$

l'identification du ou des possibles systèmes limites est une question ouverte. En effet, la convergence faible* de u^ε vers u^0 dans $L^\infty([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^d))$ (à sous-suite près) ne suffit pas pour passer à la limite dans le terme non-linéaire

$$u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon = \operatorname{div}(u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon).$$

En particulier, le produit des limites faibles* $u^0 \otimes u^0$ n'est pas *a priori* la limite faible* du produit $u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon$. Pour s'en convaincre, on peut considérer l'exemple élémentaire $f^\varepsilon(x) = \sin(x/\varepsilon)$. Dans $L^2(0,1)$ muni de la topologie faible*, on a $f^\varepsilon \to 0$ mais $|f^\varepsilon|^2 \to 1/2 \neq 0$.

En d'autres termes, identifier les limites faibles possibles du tenseur $u^\varepsilon \otimes u^\varepsilon$ est compliqué par les phénomènes de petite échelle qui se développent au sein du fluide, et se répercutent sur la structure de u^ε en fonction de ε. Comprendre à quoi ressemblent ces limites faibles est un enjeu majeur en théorie de la turbulence : c'est le problème dit des *lois de fermeture*. Notons qu'en plus des phénomènes d'oscillations haute fréquence (comme dans la fonction $\sin(x/\varepsilon)$), des phénomènes de concentration en espace peuvent se produire. C'est en particulier le cas près des bords du domaine, comme nous allons le discuter au paragraphe suivant.

4.2. Cas des domaines à bords : la couche limite

Lorsque les solutions de Navier-Stokes u^ε et la solution d'Euler u sont définies sur un ouvert à bord Ω, la question de la convergence se complique considérablement. La difficulté vient des conditions au bord $\partial\Omega$ que l'on ajoute à l'EDP (NS^ε). Pour $\varepsilon \neq 0$ (Navier-Stokes), le fluide adhère à la paroi, ce qui se traduit par une condition de Dirichlet

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \tag{4.2.1}$$

Mais pour $\varepsilon = 0$ (Euler), le fluide peut glisser le long de la paroi. Seule la condition de non-pénétration

$$u \cdot n|_{\partial\Omega} = 0$$

subsiste. Ce changement de conditions au bord se traduit par une concentration de u^ε près de $\partial\Omega$ lorsque $\varepsilon \to 0$. La fine couche près du bord dans laquelle ce phénomène a lieu est appelée *la couche limite.* Ainsi, tout l'enjeu est de comprendre l'impact de cette couche limite sur l'asymptotique $\varepsilon \to 0$. De façon plus précise, le problème est de savoir si le champ de vitesses se concentre sur une distance ε près du bord : c'est le sens du théorème suivant, dû à Kato [9].

Théorème 4.2.2. *Soit $d = 2$ ou $d = 3$. Soit Ω un ouvert borné régulier. Soient u et u^ε des solutions régulières de* (NS) *de* [4] *et* (4.2.1)*, et Euler sur* $[0, T]$*, de même donnée initiale. Alors $u^\varepsilon \to u$ dans* $L^\infty(0, T;\, L^2(\Omega))$ *si et seulement si*

$$\varepsilon \int_0^T \int_{d(x,\partial\Omega)\leqslant\varepsilon} |\nabla u^\varepsilon|^2 \longrightarrow 0, \qquad \textit{quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Notons que ce théorème a deux aspects remarquables. D'une part, il fournit un critère à la fois quantitatif, nécessaire et suffisant de convergence. D'autre part, il souligne l'importance de l'échelle ε dans le phénomène de concentration. Or cette échelle n'est pas intuitive, car la partie parabolique de l'équation $\partial_t u - \varepsilon\Delta u$ incite plutôt à considérer l'échelle $\sqrt{\varepsilon}$. Ceci étant dit, on ne sait pas à l'heure actuelle exploiter le théorème de Kato. La question de la convergence demeure essentiellement ouverte, même en supposant les solutions très régulières. Elle constitue sans conteste un des plus grands défis mathématiques issus de la mécanique des fluides.

4.3. La théorie de Prandtl

Les conclusions du paragraphe précédent amènent naturellement à évoquer la théorie de Prandtl, qui constitue une des rares tentatives de compréhension de la couche limite. Cette théorie porte le nom du célèbre mécanicien des fluides Ludwig Prandtl (1875-1953), qui l'a présentée en 1904 à Heidelberg lors du Congrès International des Mathématiciens [13]. Elle est aujourd'hui exposée dans tous les manuels de mécanique des fluides, mais sa justification mathématique est une source de difficultés considérables.

Nous nous contenterons ici de la décrire pour des écoulements plans : $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Nous introduisons un système de coordonnées locales près de $\partial\Omega$, avec x_1 l'abscisse curviligne et $x_2 \geqslant 0$ une coordonnée normale au bord. Nous décomposons également le champ u^ε dans la base de Frénet, avec une composante tangentielle u_1^ε et une composante normale u_2^ε.

Prandtl propose dans [13] un développement asymptotique double échelle du champ de vitesses, sous la forme

$$\begin{aligned} u_1^\varepsilon(t,x_1,x_2) &\approx u_1^{\mathrm{eu}}(t,x_1,x_2) + u_1^{\mathrm{cl}}(t,x_1,x_2/\sqrt{\varepsilon}),\\ u_2^\varepsilon(t,x_1,x_2) &\approx u_2^{\mathrm{eu}}(t,x_1,x_2) + \sqrt{\varepsilon}\, u_2^{\mathrm{cl}}(t,x_1,x_2/\sqrt{\varepsilon}). \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Selon ce développement, le champ de vitesses se décompose en

- une partie régulière $(u^{\mathrm{eu}}, v^{\mathrm{eu}})$, solution de l'équation d'Euler,
- une partie singulière de type « couche limite », décrite par

$$(u^{\mathrm{cl}}, v^{\mathrm{cl}}) = (u^{\mathrm{cl}}, v^{\mathrm{cl}})(t,x_1,X_2),$$

dont les variations sont localisées près du bord, sur une épaisseur que Prandtl suppose d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$. En particulier, dans le modèle suggéré par Prandtl, le critère du théorème 4.2.2 est vérifié. Si ce modèle est valide, on a bien convergence des solutions de Navier-Stokes vers celles d'Euler.

Formellement, en injectant le développement (4.3.1) dans les équations (NS) de [4], on obtient l'équation que doit vérifier le correcteur $(u^{\mathrm{cl}}, v^{\mathrm{cl}})$. Précisément, le champ

$$\begin{aligned} u_1(t,x_1,X_2) &\overset{\text{déf.}}{=} u_1^{\mathrm{eu}}(t,x_1,0) + u_1^{\mathrm{cl}}(t,x_1,x_2),\\ u_2(t,x_1,X_2) &\overset{\text{déf.}}{=} X_2\,\partial_2 u_2^{\mathrm{eu}}(t,x_1,0) + u_2^{\mathrm{cl}}(t,x_1,X_2), \end{aligned}$$

satisfait la fameuse *équation de Prandtl*

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + u_1\partial_1 u_1 + u_2\partial_2 u_1 - \partial_2^2 u_1 \\ \qquad = (\partial_t u_1^{\mathrm{eu}} + u_1^{\mathrm{eu}}\partial_x u_1^{\mathrm{eu}})\,|_{X_2=0},\ X_2>0, \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, \quad X_2>0, \\ (u_1,u_2)|_{X_2=0} = (0,0), \\ \qquad \lim\limits_{X_2\to+\infty} u_1 = u_1^{\mathrm{eu}}|_{X_2=0},\ u_1|_{t=0} = u_{0,1}. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Il s'agit d'un système de Navier-Stokes dégénéré, dans lequel ne figure plus ni terme de pression, ni terme de diffusion tangentielle. Plus important encore, il ne subsiste qu'une équation d'évolution sur u_1, qui devient la seule véritable inconnue du système. La composante normale u_2 s'obtient à partir de u_1 par intégration de la contrainte de divergence nulle.

Notons que la courbure de $\partial\Omega$ n'intervient pas explicitement dans l'équation. Elle y intervient cependant de manière indirecte, à travers les propriétés de u^{eu}, et à travers le domaine de définition de l'abscisse curviligne x_1. À notre connaissance, trois types de domaines ont été jusqu'ici étudiés : $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{T}$, et $x_1 \in (0, L)$. Les deux premiers sont adaptés à la description de phénomènes locaux en x_1. Le domaine $(0, L)$ convient à l'étude d'écoulements autour d'obstacles fins : $x_1 = 0$ correspond alors à une extrémité de l'obstacle, et on complète l'équation par la donnée de $u_1|_{x_1=0}$ (outre une condition initiale à $t = 0$).

Bien que l'asymptotique proposée par Prandtl paraisse naturelle, sa pertinence prête à discussion. Comme souligné par Prandtl lui-même, il est peu probable que le développement (4.3.1) soit valide uniformément en espace-temps : la principale raison est le phénomène de *détachement de la couche limite*, cf. figure 1. Néanmoins, l'équation de Prandtl semble être un bon modèle en amont du détachement, et demeure centrale en hydrodynamique [7]. Mieux comprendre son domaine de validité revêt donc un enjeu considérable.

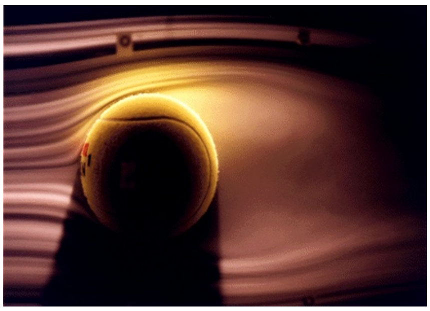

FIGURE 1. Le phénomène de détachement de couche limite.

D'un point de vue mathématique, deux problèmes se posent :

- d'une part, le caractère bien posé de l'équation (4.3.2) : existence et unicité de solutions, continuité par rapport aux données,
- d'autre part la justification du développement (4.3.1).

Ces deux problèmes dépendent beaucoup des cadres fonctionnels considérés. À notre connaissance, l'équation de Prandtl a été résolue dans deux cadres :

(1) Pour $(x_1, X_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et des données analytiques en x_1, l'équation est bien posée localement en temps : nous renvoyons à [14, 10] pour des énoncés précis.

(2) Pour $(x_1, X_2) \in (0, L) \times \mathbb{R}_+$ et des données monotones en X_2, l'équation est bien posée localement en temps, et même globalement sous de bonnes hypothèses sur le terme source dans la première équation de (4.3.2) : cf. [12, 16].

La justification de (4.3.1), et plus généralement de la convergence des solutions de Navier-Stokes vers Euler n'a été établie que sous des hypothèses d'analyticité en x_1 et X_2 [15]. La régularité analytique permet en particulier de filtrer les oscillations en x_1. Or ces oscillations peuvent créer des instabilités, invisibles à l'asymptotique « anisotrope » de type Prandtl. C'est ainsi le cas des instabilités de Rayleigh [2]. En exploitant ce phénomène, E. Grenier a montré dans [6] que l'asymptotique (4.3.1) n'est pas valable dans $H^1(\Omega)$ (défini au début du paragraphe 3.2 de [4]). La question de sa validité dans $L^p(\Omega)$, ou en l'absence d'instabilités de Rayleigh, subsiste.

De façon plus fondamentale, le caractère bien posé de l'équation de Prandtl dans des espaces fonctionnels « standard » (espaces de Sobolev, de Hölder) est resté jusqu'ici un problème ouvert. Nous décrivons au paragraphe suivant quelques difficultés de ce problème, ainsi que des éléments de réponse apportés très récemment dans [5].

4.4. Caractère mal posé de l'équation de Prandtl

Pour simplifier, nous considérons le cas $(x_1, X_2) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+$ et $u^{\mathrm{eu}} = 0$. Notant x_2 au lieu de X_2, l'équation devient

$$(4.4.1)\qquad \begin{cases} \partial_t u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 - \partial_2^2 u_1 = 0, & \text{dans } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+. \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, & \text{dans} \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ (u_1, u_2)|_{x_2=0} = (0,0), \quad \lim_{x_2 \to +\infty} u_1 = 0, & u_1|_{t=0} = u_{0,1}. \end{cases}$$

Toujours pour simplifier l'exposition, nous ne considérons que des fonctions exponentiellement décroissantes en x_2 : cela nous amène à introduire l'espace

$$L^\infty_{\exp} \overset{\text{déf.}}{=} \big\{ f = f(x_2) \mid \sup_{x_2} |e^{x_2} f(x_2)| < +\infty \big\}.$$

D'autres dépendances en la variable x_2 pourraient être envisagées. Enfin, nous cherchons à déterminer si cette équation est bien ou mal posée pour des données initiales *de type Sobolev en* x_1, c'est-à-dire dans les espaces

$$H^m \overset{\text{déf.}}{=} \big\{ u_1 = u_1(x_1, x_2) = \textstyle\sum_{k\in \mathbf{Z}} \widehat{u}_1^k(x_2) e^{ikx_1} \mid \sum_{k\in\mathbf{Z}} |k|^{2m} \, \|\widehat{u}_1^k\|^2_{L^\infty_{\exp}} < +\infty \big\}, \quad m \geqslant 0.$$

On peut noter l'analogie de cette définition avec celle donnée au paragraphe 2.1.d de [3] (les coefficients de Fourier remplacent la transformée de Fourier).

Avant même toute démonstration mathématique, avoir une intuition de la bonne réponse s'avère délicat. Concrètement, la difficulté vient de l'absence d'estimation sur le système linéarisé. Considérons le cas particulier de solutions de la forme $(u_1, u_2) = (U(t, x_2), 0)$. La composante horizontale vérifie $\partial_t U - \partial_2^2 U = 0$, $U|_{x_2=0}$. L'équation linéarisée s'écrit :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + U\partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 U - \partial_2^2 u_1 = 0, & \text{dans } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+. \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, & \text{dans } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ (u_1, u_2)|_{x_2=0} = (0,0), & \lim\limits_{x_2\to+\infty} u_1 = 0. \end{cases} \tag{4.4.2}$$

Une estimation L^2 standard fait apparaître le terme $\int u_2 \partial_2 U u_1$. Or u_2 étant obtenu *via* la contrainte de divergence nulle, ce terme est potentiellement aussi mauvais que $\int |\partial_1 u_1| \, |u_1|$.

Une analyse sommaire de Fourier semble confirmer cette « perte de dérivée en x_1 ». Précisément, le gel des coefficients de (4.4.2), et la recherche des solutions en ondes planes du type

$$(u, v) = e^{-i\omega t} e^{i(kx_1 + lx_2)} (\widehat{u}, \widehat{v}), \quad (\widehat{u}, \widehat{v}) \neq 0$$

aboutissent à la relation de la relation de dispersion

$$\omega = kU + i\partial_2 U \frac{k}{\ell} - i\ell^2.$$

Cette relation suggère qu'à $t > 0$ les modes de Fourier en x_1 croissent exponentiellement avec k, ce qui est incompatible avec un contrôle Sobolev. Mais cette analyse est inadéquate. Une façon de s'en convaincre est de considérer une version simplifiée de (4.4.2), où l'on néglige à la fois la diffusion verticale et les variations en temps du profil $(U(t, x_2) = U_s(x_2))$: le système devient

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + U_s \partial_1 u_1 + u_2 U_s' = 0, & \text{dans } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+. \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0, & \text{dans } \mathbb{T} \times \mathbb{R}^+, \\ u_2|_{x_2=0} = 0, \quad u_1|_{t=0} = u_{0,1}. \end{cases} \tag{4.4.3}$$

De nouveau, une analyse à coefficients gelés aboutit à une « mauvaise » relation de dispersion. Mais dans ce cadre très simplifié, un calcul explicite est possible, et fournit pour une donnée initiale $u_{0,1}$ la solution

$$u_1(t, x_1, x_2) \\ = u_{0,1}(x_1 - U_s(x_2)t, x_2) + t\, U_s'(x_2) \int_0^{x_2} \partial_1 u_{0,1}(x_1 - U_s(z)t, z)\, dz.$$

On établit à partir de cette formule le caractère faiblement bien posé de l'équation dans des espaces de régularité Sobolev en x_1, faiblement au sens où il y a perte finie de dérivées par rapport à la donnée initiale.

Au niveau non linéaire, la version non diffusive de l'équation de Prandtl, c'est-à-dire (4.3.2) ou (4.4.1) sans le terme $\partial_y^2 u$, s'avère également résoluble pour des données Sobolev ou C^k, par la méthode des caractéristiques. Nous renvoyons à l'article [8], pour une étude approfondie de l'équation non diffusive.

Au vu de cette analyse sans diffusion, il est alors naturel de croire au caractère bien posé de l'équation complète de Prandtl. En fait, il est montré dans [5] que le système (4.4.1) est fortement linéairement mal posé. En bref, les solutions de l'équation sont soumises à un mécanisme de forte instabilité. Ce mécanisme met en jeu la diffusion verticale et les points critiques (en x_2) du champ de vitesses.

En particulier, les résultats de [5] ne sont pas en contradiction avec les résultats positifs obtenus sans diffusion ou pour des données monotones.

Nous en venons maintenant à une description plus précise de ces résultats. Nous considérons de nouveau l'équation linéarisée (4.4.2). En plus des espaces H^m, nous introduisons des espaces de fonctions de (x_1, x_2) analytiques en x_1 : pour tout $\beta > 0$,

$$E_\beta \stackrel{\text{déf.}}{=} \big\{u_1 = \textstyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{u}_1^k(x_2)e^{ikx_1} \mid \|\widehat{u}_1^k\|_{L^\infty_{\exp}} \leqslant C_\beta\ e^{-\beta|k|},\, \forall k\big\}.$$

Ces espaces donnent un cadre dans lequel l'équation est bien posée, comme le montre la proposition (facile) suivante :

Proposition 4.4.4 **(Caractère bien posé en analytique)**
On suppose $\partial_2^k U \in C^0\big(\mathbb{R}_+; L^\infty_{\exp}\big)$, $k = 0,1$. Il existe $\rho > 0$ tel que : pour tout T avec $\beta - \rho T > 0$, et tout $u_{0,1} \in E_\beta$, (4.4.2) a une unique solution

$$u_1 \in C\left([0,T);\, E_{\beta-\rho T}\right), \quad u_1(t,\cdot) \in E_{\beta-\rho t}, \quad u_1|_{t=0} = u_{0,1}.$$

On peut, grâce à cette proposition, introduire l'opérateur solution $T(t,s)$ défini par

$$T(t,s)u_0 \stackrel{\text{déf.}}{=} u(t,\cdot), \quad u|_{t=s} = u_0.$$

Notons que les espaces E_β sont denses dans les H^m, ce qui rend naturelle la notation suivante : pour tout $T \in \mathcal{L}(E_\beta, E_{\beta'})$, $m_1, m_2 \geqslant 0$,

$$\|T\|_{\mathcal{L}(H^{m_1},H^{m_2})} \stackrel{\text{déf.}}{=} \sup_{u_0\in E_\beta} \frac{\|Tu^0\|_{H^{m_2}}}{\|u_0\|_{H^{m_1}}} \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

En particulier, $\|T\|_{\mathcal{L}(H^{m_1},H^{m_2})}$ est fini si T se prolonge en un opérateur continu de H^{m_1} dans H^{m_2}. Une conséquence des résultats de [5] est le :

Théorème 4.4.5 **(caractère mal posé en Sobolev).** *On peut trouver U régulier, à décroissance exponentielle en x_2, tel que : pour tous $\delta > 0$, $m, \mu \geqslant 0$,*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant\delta} \|T(t,s)\|_{\mathcal{L}(H^m,H^{m-\mu})} = +\infty.$$

Nous concluons ce texte par quelques idées de preuve du théorème 4.4.5. Le point clé est la construction de solutions approchées « instables » de (4.4.2). Plus précisément, le k-ième mode de Fourier en x_1 de ces solutions croît comme $e^{\delta\sqrt{k}t}$ pour $k \gg 1$. Cette très forte amplification permet d'aboutir au théorème. Concrètement, la preuve passe par trois grandes étapes.

(1) On conduit une analyse asymptotique de l'équation (4.4.2), dans la limite des hautes fréquences en x_1 : $k \to +\infty$. Grâce à cette analyse asymptotique, la recherche des solutions approchées instables de (4.4.2) se réduit à un problème spectral pour un opérateur différentiel sur $\mathbb{R}$.

(2) On résout ensuite ce problème spectral.

(3) Une fois les solutions approchées instables construites, on utilise la formule de Duhamel pour en déduire le théorème.

Nous donnons ici quelques éléments de compréhension des deux premières étapes, en commençant par l'analyse haute fréquence de (4.4.2). Pour clarifier l'exposition, nous négligeons les variations en temps de U : $U(t, x_2) = U_s(x_2)$. Avec cette simplification, le système (4.4.2) est à coefficients constants en (t, x_2), et nous cherchons des solutions haute fréquence sous la forme

$$\begin{cases} u_1(t, x_1, x_2) = i\, e^{i(\omega(\varepsilon)t + x_1)/\varepsilon}\, v_\varepsilon'(x_2), \\ u_2(t, x_1, x_2) = \varepsilon^{-1}\, e^{i(\omega(\varepsilon)t + x_1)/\varepsilon}\, v_\varepsilon(x_2), \quad \varepsilon \ll 1. \end{cases}$$

Le système se réécrit alors comme une équation différentielle du troisième ordre sur v_ε :

$$\begin{cases} (\omega(\varepsilon) + U_s)v_\varepsilon' - U_s' v_\varepsilon + i\varepsilon v_\varepsilon^{(3)} = 0, \quad x_2 > 0, \\ v_\varepsilon|_{x_2=0} = 0, \quad v_\varepsilon'|_{x_2=0} = 0. \end{cases}$$

Comme précédemment, il est utile d'étudier d'abord le système sans diffusion, correspondant à (4.4.3) :

$$\begin{cases} (\omega + U_s)v' - U_s' v = 0, \quad x_2 > 0, \\ v|_{x_2=0} = 0. \end{cases}$$

Ce système se prête à des calculs explicites : en particulier, il existe une famille à un paramètre d'éléments propres, donnés par :

$$\omega = \omega_a \overset{\text{déf.}}{=} -U_s(a), \qquad v = v_a \overset{\text{déf.}}{=} H(x_2 - a)(U_s - U_s(a)), \qquad a > 0,$$

où H désigne la fonction de Heaviside. On peut noter que la régularité de v_a change selon que a est ou non point critique de U_s. Remarquons aussi que $\omega_a \in \mathbb{R}$, ce qui, de retour aux solutions de (4.4.3), fournit des solutions oscillant comme $e^{i\omega_a t/\varepsilon}$.

L'enjeu est alors de comprendre l'effet de la perturbation $i\varepsilon v_\varepsilon^{(3)}$ sur ces oscillations rapides. On montre essentiellement la chose suivante : lorsque a est un point critique non dégénéré de U_s, ω_a subit une correction d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ de partie imaginaire négative. Ce phénomène provoque donc une croissance exponentielle des solutions, sur des temps d'ordre $\sqrt{\varepsilon}$. Ce mécanisme est responsable du caractère mal posé de l'équation.

En pratique, on introduit un point critique non dégénéré a_c de U_s : $U_s'(a_c) = 0$, et par exemple $U_s''(a_c) < 0$. Le mode propre approché est cherché sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \omega(\varepsilon) &\approx -U_s(a_c) + \sqrt{\varepsilon}\tau, \\ v_\varepsilon &\approx H(x_2 - a_c)\left(U_s(x_2) + \omega(\varepsilon)\right) + \sqrt{\varepsilon} V\Big(\frac{x_2 - a_c}{\varepsilon^{1/4}}\Big). \end{aligned}$$

Le correcteur $V = V(z)$, $z \in \mathbb{R}$ est cherché à décroissance rapide en $z = \pm\infty$. Ses variations sont ainsi localisée près de $x_2 = a_c$, et compensent les discontinuités de la solution sans diffusion. Formellement, V satisfait le système suivant :

$$\begin{cases} \Big(\tau + U_s''(a_c)\dfrac{z^2}{2}\Big)V' - U_s''(a_c)\, z\, V + i\, V^{(3)} = 0, \quad z \neq 0, \\ [V]_{|z=0} = -\tau, \quad \big[V'\big]_{|z=0} = 0, \quad \big[V''\big]_{|z=0} = -U''(a_c), \\ \lim\limits_{\pm\infty} V = 0. \end{cases}$$

Pour τ arbitrairement fixé, il s'agit d'un système *a priori* surdéterminé. En particulier, il est prouvé dans [5] que pour $\tau = 0$, ce système n'admet pas de solution. *L'idée est qu'il existe un couple* (τ, V) *avec* $\mathcal{I}m\, \tau < 0$ *satisfaisant ce système.* La condition $\mathcal{I}m\, \tau < 0$ donne l'instabilité expliquée plus haut.

Poursuivant l'analyse de [5], on peut simplifier ce problème et aboutir au problème spectral suivant :

(PS) : *Trouver* $\tau \in \mathbf{C}$ *avec* $\mathcal{I}m\,\tau < 0$, *et une solution* W *de*

$$(\tau - z^2)^2 \frac{d}{dz} W + i \frac{d^3}{dz^3}\big((\tau - z^2)W\big) = 0, \tag{4.4.6}$$

telle que $\lim_{z\to-\infty} W = 0, \lim_{z\to+\infty} W = 1.$

La résolution du (PS) est alors entreprise comme suit. On remarque que l'équation (4.4.6) est une équation du second ordre sur $X = W'$:

$$i(\tau - z^2)X'' - 6i\,z\,X' + \big((\tau - z^2)^2 - 6i\big)\,X = 0. \tag{4.4.7}$$

Pour montrer l'existence de solutions (τ, X) de cette équation, on introduit alors le problème aux valeurs propres auxiliaire :

$$Au \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{z^2+1}u'' + \frac{6z}{(z^2+1)^2}u' + \frac{6}{(z^2+1)^2}u = \alpha\, u$$

La proposition suivante est établie dans [5] :

Proposition 4.4.8. $A : D(A) \mapsto \mathcal{L}^2$ *est autoadjoint, de domaine*

$$D(A) \overset{\text{déf.}}{=} \left\{u \in \mathcal{H}^1,\ Au \in \mathcal{L}^2\right\},$$

avec $\mathcal{L}^2 \overset{\text{déf.}}{=} \left\{u \in L^2_{\text{loc}}, \int_{\mathbb{R}} (z^2+1)^4 |u|^2 < +\infty\right\},$

et $\mathcal{H}^1 \overset{\text{déf.}}{=} \left\{u \in H^1_{\text{loc}} \int_{\mathbb{R}} (z^2+1)^4 |u|^2 + \int_{\mathbb{R}} (z^2+1)^3 |u'|^2 < +\infty\right\}.$

De plus, A *admet une valeur propre* α *strictement positive.*

Le caractère autoadjoint de A est facile à établir. Pour l'existence d'une valeur propre positive, on utilise la décomposition $Au = A_1 u + A_2 u$, avec

$$A_1 : D(A) \longmapsto \mathcal{L}^2, \quad A_1 u \overset{\text{déf.}}{=} \frac{1}{z^2+1}u'' + \frac{6z}{(z^2+1)^2}u',$$

et

$$A_2 : D(A) \longmapsto \mathcal{L}^2, \quad A_2 u \overset{\text{déf.}}{=} \frac{6}{(z^2+1)^2}u.$$

On vérifie facilement que A_1 est autoadjoint négatif dans $\mathcal{L}^2$, et que A_2 est lui-aussi autoadjoint. Plus important, l'opérateur A_2 est A_1-*compact* : pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $D(A)$ satisfaisant

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée dans } \mathcal{L}^2, \quad (A_1 u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée dans } \mathcal{L}^2,$$

la suite $(A_2 u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $\mathcal{L}^2$. Par des résultats classiques d'analyse spectrale, on en déduit alors que $\Sigma_{\mathrm{ess}}(A) = \Sigma_{\mathrm{ess}}(A_1) \subset \mathbb{R}_-$, où Σ_{ess} désigne le spectre essentiel (c'est-à-dire le complémentaire dans le spectre des valeurs propres isolées de multiplicité finie). De plus, $(Au, u) > 0$ pour $u(z) = e^{-2z^2}$, ce qui permet de conclure.

Une fois cette proposition démontrée, des changements de variables permettent d'obtenir un couple $(\widetilde{\tau}, Y)$ avec $\widetilde{\tau} = -\sqrt{\alpha} < 0$, et

$$(\widetilde{\tau} - z^2)Y'' - 6zY' + \big((\widetilde{\tau} - z^2)^2 - 6\big)Y = 0.$$

Formellement, cette équation ressemble à (4.4.7) (à des facteurs i près). Pour obtenir (4.4.7), on utilise la

Proposition 4.4.9. *Y admet une extension holomorphe, encore solution, dans*

$$U_\tau \overset{\text{déf.}}{=} \mathbf{C} \setminus \Big(\big]-i\infty, -i|\tau|^{1/2}\big] \cup \big[i|\tau|^{1/2}, +i\infty\big[\Big).$$

De plus, dans les secteurs $\arg z \in (-\pi/4 + \delta, \pi/4 - \delta)$, *et* $\arg z \in (3\pi/4 + \delta, 5\pi/4 - \delta), \delta > 0$,

$$|Y(z)| \leqslant C_\delta \exp(-z^2/4).$$

Cette proposition découle de résultats classiques d'analyse complexe. On peut même obtenir dans chacun des secteurs un développement asymptotique de la solution pour $|z| \to +\infty$. Cela permet de définir

$$X(z) \overset{\text{déf.}}{=} Y(e^{-i\pi/8} z), \quad z \in \mathbb{R}.$$

On vérifie alors que le couple $(\tau \overset{\text{déf.}}{=} e^{i\pi/4}\widetilde{\tau}, X)$ est solution de (4.4.7) avec $\mathcal{I}m\, \tau < 0$, et X qui tend vers zéro en $\pm\infty$.

Pour conclure la résolution du problème spectral, on vérifie que $\int_{\mathbb{R}} X \neq 0$, ce qui permet d'introduire $W(z) = \big(\int_{\mathbb{R}} X\big)^{-1} \int_{-\infty}^{z} X$. Nous renvoyons à [5] pour tous les détails.

Références

[1] J.-Y. Chemin – « Équations d'Euler d'un fluide incompressible », in *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2010, ce volume.

[2] P. G. Drazin & W. H. Reid – *Hydrodynamic stability*, 2e éd., Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[3] I. Gallagher – « Le problème de Cauchy pour les équations de navier-stokes », in *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2010, ce volume.

[4] D. Gérard-Varet – « Interaction fluide-solide », in *Facettes mathématiques de la mécanique des fluides*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2010, ce volume.

[5] D. Gérard-Varet & E. Dormy – « On the ill-posedness of the Prandtl equation », *J. Amer. Math. Soc.* **23** (2010), no. 2, p. 591–609.

[6] E. Grenier – « On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations », *Comm. Pure Appl. Math.* **53** (2000), no. 9, p. 1067–1091.

[7] E. Guyon, J. Hulin & L. Petit – *Hydrodynamique physique*, Savoirs Actuels, EDP Sciences & CNRS Éditions, 2001.

[8] L. Hong & J. K. Hunter – « Singularity formation and instability in the unsteady inviscid and viscous Prandtl equations », *Commun. Math. Sci.* **1** (2003), no. 2, p. 293–316.

[9] T. Kato – « Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary », in *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 2, Springer, New York, 1984, p. 85–98.

[10] M. C. Lombardo, M. Cannone & M. Sammartino – « Well-posedness of the boundary layer equations », *SIAM J. Math. Anal.* **35** (2003), no. 4, p. 987–1004.

[11] A. J. Majda & A. L. Bertozzi – *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts in Applied Math., vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[12] O. A. Oleinik & V. N. Samokhin – *Mathematical models in boundary layer theory*, Applied Math. and Math. Comput., vol. 15, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[13] L. Prandtl – « Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung », in *Actes du 3e Congrès international des mathématiciens, Heidelberg*, Teubner, Leipzig, 1904, p. 484–491.

[14] M. Sammartino & R. E. Caflisch – « Zero viscosity limit for analytic solutions, of the Navier-Stokes equation on a half-space. I. Existence for Euler and Prandtl equations », *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), no. 2, p. 433–461.

[15] ———, « Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space. II. Construction of the Navier-Stokes solution », *Comm. Math. Phys.* **192** (1998), no. 2, p. 463–491.

[16] Z. Xin & L. Zhang – « On the global existence of solutions to the Prandtl's system », *Adv. Math.* **181** (2004), no. 1, p. 88–133.

David Gérard-Varet, Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris Diderot, 75251 Paris Cedex 05, France
E-mail : `david.gerard-varet@imj-prg.fr`