



Journées mathématiques X-UPS

Année 2017

Une invitation à la théorie géométrique de la mesure

Hervé PAJOT

Autour du problème de Kakeya

Journées mathématiques X-UPS (2017), p. 71-116.

<https://doi.org/10.5802/xups.2017-02>

© Les auteurs, 2017.



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence

LICENCE INTERNATIONALE D'ATTRIBUTION CREATIVE COMMONS BY 4.0.

<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://www.editions.polytechnique.fr>

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
<https://portail.polytechnique.edu/cmls/>



Publication membre du

Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte

www.centre-mersenne.org

AUTOUR DU PROBLÈME DE KAKEYA

par

Hervé Pajot

À la mémoire de Jean-Pierre Kahane (1926-2017)

Résumé. En 1917, Kakeya posait le problème suivant : Quelle est l'aire minimale nécessaire pour retourner de 180 degrés une aiguille de longueur 1 ? La réponse donnée par Besicovitch est qu'on peut retourner l'aiguille avec une aire aussi petite que l'on veut ! Ceci est dû au fait qu'il existe des ensembles du plan, appelés ensembles de Besicovitch, qui contiennent une droite dans chaque direction mais qui sont de mesure de Lebesgue nulle. Le but de ce texte est, d'une part, de présenter une construction d'un ensemble de Besicovitch à partir de l'ensemble de Cantor 4-coins qui est l'exemple type d'ensemble purement non rectifiable au sens de la théorie géométrique de la mesure et, d'autre part, de démontrer qu'un ensemble de Besicovitch est de dimension de Hausdorff 2. Nous expliquerons enfin ce qui se passe en dimensions supérieures (travaux de Bourgain, Tao,...) ainsi que le lien entre le problème de Kakeya et les équations aux dérivées partielles (inégalités de Strichartz pour l'équation des ondes) d'une part et l'analyse harmonique (le problème de restriction pour la transformée de Fourier) d'autre part. Le cas du problème de Kakeya dans les corps finis (plus simple à énoncer) sera aussi discuté en détails. En particulier, on en donnera une solution assez élémentaire due à Dvir.

Table des matières

1. Introduction.....	72
2. La solution du problème de Kakeya.....	75
3. Mesures et dimension de Hausdorff.....	80
4. Construction d'un ensemble de Kakeya à partir de l'ensemble de Cantor 4-coins.....	86

Publication originale dans Journées X-UPS 2017. Une invitation à la théorie géométrique de la mesure. Éditions de l'École polytechnique, 2017.

5. Le problème actuel de Kakeya.....	93
5.1. Le cas de la dimension 2.....	94
5.2. Lien avec la fonction maximale et le cas de la dimension supérieure.....	95
5.3. Un modèle plus simple : le cas des corps finis.....	101
6. Quelques liens avec l'analyse harmonique.....	106
Quelques interactions.....	113
Références.....	115

1. Introduction

Les principaux héros de notre histoire sont Kakeya et Besicovitch.



Soichi Kakeya (1886-1947)



Abram Besicovitch (1891-1970)

En 1917, Kakeya [15] posait le problème suivant :

Quelle est l'aire minimale nécessaire pour retourner une aiguille de longueur 1 de 180 degrés ?

Ici, « retourner » signifie ramener l'aiguille (qui est modélisée par un segment unité) à sa position initiale, mais avec le dessus en dessous. Par exemple, nous pouvons lui faire subir une rotation autour de son milieu, ceci nous coûtera $\pi/4$. Nous pouvons nous convaincre assez vite qu'il est possible de faire un peu mieux. Par exemple, un triangle équilatéral de hauteur 1 donne la meilleure solution si on se restreint aux convexes. Voir la figure 1 pour une esquisse du « trajet » (en pointillé) suivi par l'aiguille dans ce cas. On trouvera dans [3] une présentation du problème de Kakeya par Besicovitch lui-même.

Au moment où Kakeya posait sa question, Besicovitch, qui était professeur à l'Université de Perm en Russie (Oural), travaillait sur des problèmes d'analyse réelle liés à l'intégrale de Riemann. Un des problèmes qu'il considérait est le suivant :

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Riemann intégrable, existe-t-il un système de coordonnées (x, y) (c'est-à-dire d'axes) tel que $\int f(x, y) dx$ existe (au sens de Riemann) pour tout $y \in \mathbb{R}$ et la fonction $y \mapsto \int f(x, y) dx$ est elle-même intégrable au sens de Riemann ?

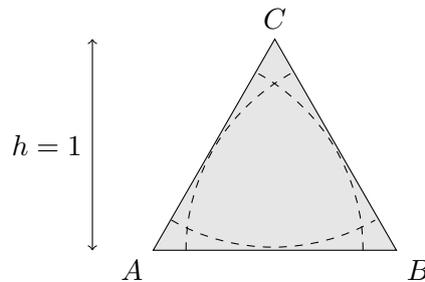


FIGURE 1. La solution dans le cas d'un triangle équilatéral ABC de hauteur 1

Besicovitch publia la réponse à ce problème dans une revue de Perm. Mais son article [1] ne fut pas diffusé hors de Russie, qui était alors le théâtre d'une terrible guerre civile à la suite de la révolution bolchévique. En particulier, Perm fut prise et reprise plusieurs fois par l'armée blanche (restée fidèle au Tsar) puis l'armée rouge. Besicovitch s'installa en Angleterre en 1924. Peu de temps après, il apprit l'existence du problème de Kakeya et s'aperçut qu'une légère modification de sa construction de 1919 permettait de résoudre ce problème. Son article en russe fut remanié et publié dans une revue allemande en 1928 (voir [2]). Besicovitch s'est ensuite beaucoup intéressé à la théorie géométrique de la mesure, en particulier aux ensembles dont la projection est de mesure nulle dans presque toutes les directions. En 1964, il réalise que ses travaux dans ce dernier domaine permettent de donner une autre solution à son problème de 1919. Nous présenterons plus bas la construction proposée dans [4].

Mais quel est le point commun entre le problème de Kakeya et celui de Besicovitch ? Leurs solutions viennent du fait suivant :

Il existe des ensembles (compacts) du plan contenant un segment unité dans chaque direction, mais d'aire nulle.

Dans la suite, nous appellerons *ensemble de Besicovitch* un sous-ensemble du plan (ou plus généralement de \mathbb{R}^n) qui possède un segment unité dans chaque direction et *ensemble de Kakeya* un ensemble de Besicovitch de mesure de Lebesgue nulle. Attention, notre terminologie n'est pas forcément la même que celle utilisée par d'autres

auteurs. Dans la section 2, nous donnons une construction « classique » d'un ensemble de Kakeya via les arbres de Perron et nous présentons des solutions aux problèmes de Kakeya et Besicovitch. Grosso modo, on peut retourner l'aiguille avec une aire aussi petite que l'on veut en le faisant dans un voisinage assez petit d'un ensemble de Kakeya, et la réponse à la question de Besicovitch est « non » en considérant comme contre-exemple la fonction indicatrice d'une version modifiée d'un ensemble de Kakeya. Signalons sur ces points le livre récent [5] qui en donne une introduction plus accessible que ces notes pour des étudiants.

Dans la section 3, on définit les mesures et la dimension de Hausdorff. On étudie plus particulièrement le cas des ensembles auto-similaires, comme l'ensemble triadique de Cantor. La section 4 est consacrée à la construction de Besicovitch de 1964, qui repose sur l'ensemble de Cantor 4-coins. Celui-ci est un ensemble auto-similaire du plan, de dimension 1, qui a la particularité d'avoir des projections de mesure de Lebesgue nulle dans presque toutes les directions. Une introduction plus complète (issue d'un cours de master 2) à la théorie géométrique de la mesure est donnée dans le livre [23], dans lequel on trouvera aussi une discussion des inégalités isodiamétriques et isopérimétriques ainsi que de la fonctionnelle de Mumford-Shah (voir les textes d'Emmanuel Russ [26] et d'Antoine Lemenant [17] dans ce volume).

Mais notre histoire ne s'arrête pas là ! Il est naturel de voir s'il est possible de construire des ensembles de Kakeya « petits ». Nous verrons dans la section 5 que tout ensemble de Besicovitch du plan est de dimension de Hausdorff 2. Le problème est : qu'en est-il en dimensions supérieures ? La conjecture dite de Kakeya stipule que tout ensemble de Besicovitch dans \mathbb{R}^n (c'est-à-dire possédant un segment unité dans chaque direction) est de dimension de Hausdorff n . Ce problème est encore très largement ouvert. Nous ferons le lien avec la *fonction maximale*, qui est un outil classique d'analyse harmonique et nous discuterons du cas simplifié mais instructif de la conjecture de Kakeya sur les corps finis. Pour des étudiants, nous conseillons sur ces points le petit livre [13] qui est abordable avec peu de connaissances.

Enfin, dans la dernière section, nous expliquons le lien entre le problème de Kakeya et des problèmes importants (et toujours ouverts) d'analyse harmonique. Ceci explique que, cent ans après avoir été énoncé, le problème de Kakeya reste toujours d'actualité. Kakeya en serait le premier étonné.

Je remercie les organisateurs de ces journées de me donner l'opportunité de parler de ce beau problème. J'ai préféré citer des livres ou des survols dans lesquels le lecteur trouvera la référence exacte de l'article mentionné. Comme il est de coutume en analyse, la constante C peut changer d'une ligne sur l'autre, mais toujours s'appeler C . Dans ces notes, \mathcal{L}^n désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^n .

2. La solution du problème de Kakeya

Le résultat principal de cette section donne la solution du problème de Kakeya. Une solution du problème de Besicovitch est présentée à la fin de la section.

Théorème 2.1

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble (compact) du plan $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ avec $\mathcal{L}^2(E_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel qu'un segment unité peut être envoyé (par une composition de transformations élémentaires du plan) vers sa position initiale en échangeant les extrémités tout en restant dans E_ε .

Démonstration. On esquisse une preuve via les *arbres de Perron*. On utilisera l'observation élémentaire suivante qui est laissée en exercice.

Exercice 1. Soient D_1 et D_2 deux droites parallèles dans le plan complexe. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $F_\varepsilon \subset \mathbb{C}$ avec $\mathcal{L}^2(F_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que tout segment unité contenu dans D_1 peut être envoyé par une composition de translations et de rotations vers un segment unité de D_2 sans quitter F_ε .

Étape 1. Soient T_1 et T_2 deux triangles adjacents dont la base de longueur b est contenue dans une même droite D et dont la hauteur est la même, égale à $h = 1$ (voir le haut de la figure 2 et surtout la figure 3). Supposons que l'on translate T_1 vers T_2 par un vecteur de norme $2(1 - \alpha)b$ suivant la direction de la base (où $\alpha \in]1/2, 1[$).

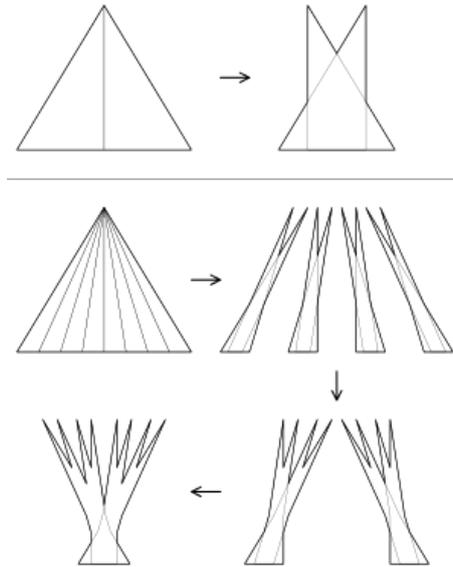


FIGURE 2. Construction d'un ensemble de Besicovitch via les arbres de Perron

On obtient alors S qui est constitué d'un triangle central T et de deux petits triangles C_1 et C_2 qui forment des « cornes » de chaque côté de T . Par un calcul élémentaire, on a

$$\mathcal{L}^2(S) = \mathcal{L}^2(T)(\alpha^2 + 2(1 - \alpha)^2).$$

On note T'_1 et T'_2 les copies de T_1 et T_2 respectivement, de sorte que $S = T'_1 \cup T'_2$. Supposons que l'aiguille soit sur un côté de T'_1 qui n'est pas la base (comme sur la figure 4). Si $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble F_ε avec $\mathcal{L}^2(F_\varepsilon) = 0$ (comme dans l'exercice 1) tel que l'on puisse faire subir à l'aiguille une rotation de $\pi/3$ en restant dans $S \cup F_\varepsilon$. En effet, on commence par faire tourner l'aiguille dans T'_1 pour la ramener sur le côté qui est parallèle à un côté de T'_2 . On utilise alors F_ε pour translater l'aiguille dans T'_2 et on peut conclure par une rotation dans T'_2 .

Étape 2. Soit T un triangle dont la base B (ainsi, B est un segment) est contenue dans une droite D . On note a le sommet opposé à la base.

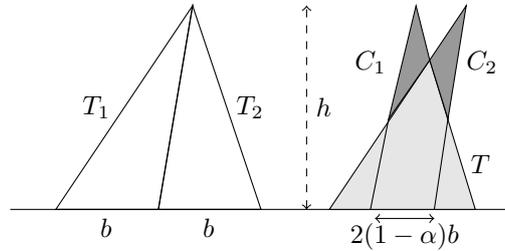


FIGURE 3. À gauche, les triangles adjacents T_1 et T_2 de l'étape 1. À droite, l'ensemble S constitué du triangle central T et des cornes C_1 et C_2

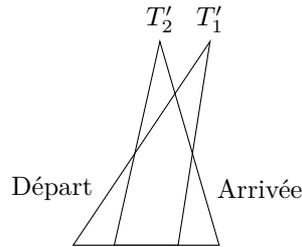


FIGURE 4. Rotation de l'aiguille de $\pi/3$ dans $S \cup F_\varepsilon$.

Divisons la base B en 2^k segments disjoints (sauf en leurs extrémités) de même longueur : $B = \bigcup_{j=1}^{2^k} [a_j, b_j]$, où pour tout $j \in \{1, \dots, 2^k\}$, $|a_j - b_j| = \text{diam}(B)/2^k$ et pour tout $j \in \{2, \dots, 2^k\}$, $b_{j-1} = a_j$. On joint les a_k, b_k à a pour faire en sorte d'obtenir 2^k triangles notés T_1, \dots, T_{2^k} avec $T = \bigcup_{j=1}^{2^k} T_j$ et pour tous $i \neq j \in \{1, \dots, 2^k\}$, $\mathcal{L}^2(T_i \cap T_j) = 0$. Si k est assez grand et si α (celui de l'étape 1) est assez proche de 1, on peut appliquer l'étape 1 et translater les triangles T_i de sorte que l'ensemble S obtenu soit de mesure aussi petite que l'on veut. Le calcul se fait comme décrit dans la figure 2. Ainsi, on commence par appliquer l'étape 1 à des paires de triangles adjacents. Puis, on fait se chevaucher deux par deux les figures obtenues. Le calcul de l'aire se fait comme dans l'étape 1 en ne tenant compte que des chevauchements des triangles centraux (les T de l'étape 1) et non

des cornes. En itérant cette construction, on obtient que l'ensemble S obtenu satisfait à

$$\mathcal{L}^2(S) \leq \left(\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{2i} \right) \mathcal{L}^2(T) \leq (\alpha^{2k} + 2(1-\alpha)) \mathcal{L}^2(T).$$

Ce qui permet de conclure. De plus, si le triangle T est contenu dans un ouvert O , on peut faire les transformations précédentes de sorte que S reste dans O .

Étape 3. On peut alors construire un ensemble de Kakeya. Tout d'abord, il suffit de construire un ensemble F du plan de mesure de Lebesgue nulle et qui contient une droite dans toutes les directions $\theta \in [0, \pi/3]$. En effet, l'ensemble cherché est alors obtenu en utilisant des rotations de F .

Soit S_1 un triangle équilatéral de base un segment unité contenu dans une droite D et soit O_1 un ouvert contenant S_1 satisfaisant à $\mathcal{L}^2(\overline{O_1}) \leq 2\mathcal{L}^2(S_1)$. En appliquant l'étape 1, on construit un ensemble (fermé) S_2 qui est une union (non disjointe) de triangles de hauteur 1 (et de base dans D) et tel que $\mathcal{L}^2(S_2) \leq 1/2^2$. On peut de plus considérer un ouvert O_2 contenant S_2 et S_1 avec $\mathcal{L}^2(\overline{O_2}) \leq 2\mathcal{L}^2(S_2)$.

Comme S_2 est formé de triangles de hauteur 1, on peut utiliser la procédure décrite à l'étape 1, et construire un ensemble fermé S_3 formé de triangles de hauteur 1 (de base dans D) avec $\mathcal{L}^2(S_3) \leq 1/2^3$. On peut aussi considérer un ouvert O_3 contenant S_3 avec $\mathcal{L}^2(\overline{O_3}) \leq 2\mathcal{L}^2(S_3)$.

On construit par récurrence une suite (S_j) d'ensembles formés de triangles de hauteur 1 et de base contenue dans D ainsi qu'une famille d'ouverts (O_j) avec $S_j \subset O_j \subset O_{j-1}$ et $\mathcal{L}^2(\overline{O_j}) \leq 2\mathcal{L}^2(S_j) \leq 2 \cdot 2^{-j} = 2^{-j+1}$.

Alors, l'ensemble $F = \bigcap_{j=1}^{+\infty} \overline{O_j}$ convient. En effet, on a $\mathcal{L}^2(F) = 0$ puisque pour tout j , $\mathcal{L}^2(\overline{O_j}) \leq 2^{-j+1}$. De plus, S_1 possède un segment unité dans chaque direction $\theta \in [0, \pi/3]$. Il en est de même par construction pour les S_j , donc pour les O_j . Un petit argument de compacité permet de montrer qu'il en est de même pour F .

Étape 4. Résolvons le problème de Kakeya! Soit $\varepsilon > 0$. On va construire par l'étape 3 un ensemble E_0 avec $\mathcal{L}^2(E_0) \leq \varepsilon/3$ et dans

lequel on peut faire subir à l'aiguille une rotation d'angle $\theta \in [0, \pi/3]$. Comme pour l'étape 3, on pourra conclure en utilisant des rotations de E_0 . On part d'un triangle équilatéral T de hauteur 1 (dans lequel il est possible de faire subir à l'aiguille une rotation de π). Par l'étape 3, on peut construire des triangles T_j ($j = 1, \dots, 2^k$) tels que, si on note $E = \bigcup_{j=1}^{2^k} T_j$, on ait $\mathcal{L}^2(E) \leq \varepsilon/6$ et, pour tout $j = 1, \dots, 2^k$, un côté de T_j est parallèle à un côté de T_{j+1} . Donc, par l'exercice 1, on peut construire un ensemble E_0 à partir de l'ensemble E en ajoutant pour tout j un ensemble E_j qui permet de translater un segment de T_j vers un segment de T_{j+1} avec $\mathcal{L}^2(E_j) \leq \varepsilon/6 \cdot 2^k$. On a donc

$$\mathcal{L}^2(E_0) \leq \frac{\varepsilon}{6} + \frac{(2^k - 1)\varepsilon}{6 \cdot 2^k} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Pour faire tourner l'aiguille dans E_0 de $\pi/3$, on applique de façon itérative la méthode décrite dans l'étape 1. Notre problème de Kakeya est résolu! \square

Remarque 2.2. À cause de l'utilisation de translations, le diamètre des ensembles E_ε dans lesquels nous retournons notre aiguille est très grand. De façon assez surprenante, Cunningham (voir [7]) a démontré que l'on pouvait retourner l'aiguille dans des ensembles E_ε avec $\mathcal{L}^2(E_\varepsilon) < \varepsilon$ mais qu'en plus, ces ensembles peuvent être choisis simplement connexes et contenus dans un cercle de rayon 1!

Nous expliquons maintenant une solution au problème de Besicovitch. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble (compact) de Kakeya. On se donne un système de coordonnées (x, y) de \mathbb{R}^2 . Par définition d'un ensemble de Kakeya, il existe un segment unité I_x (respectivement I_y) parallèle à l'axe des x (respectivement parallèle à l'axe des y) contenu dans E . Quitte à translater E , on peut supposer que la coordonnée b en x de I_y et la coordonnée a en y de I_x sont des nombres irrationnels. On définit E_0 comme l'ensemble des $(x, y) \in E$ avec $x \in \mathbb{Q}$ ou $y \in \mathbb{Q}$. Soit $f = \chi_{E_0}$ la fonction caractéristique de E_0 . Comme E_0 et son complémentaire sont denses dans I_x et I_y , les applications $f_b : x \mapsto f(x, b)$ (c'est-à-dire la restriction de f à la direction de I_x) et $f_a : y \mapsto f(a, y)$ (c'est-à-dire la restriction de f à la direction

de I_y) ne sont pas Riemann-intégrables. Comme E est compact, l'ensemble des points de discontinuité de f est contenu dans E_0 qui est de mesure de Lebesgue nulle. Donc, par le critère de Lebesgue pour l'intégrabilité de Riemann, f est Riemann-intégrable sur \mathbb{R}^2 .

3. Mesures et dimension de Hausdorff

Les notions de mesures et de dimension de Hausdorff peuvent être définies dans les espaces métriques séparables. Nous nous contenterons ici de nous placer dans le cas de \mathbb{R}^n muni de la distance euclidienne.

Définition 3.1. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et soit $s > 0$. La s -mesure de Hausdorff de A est donnée par

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

où $\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_i \alpha(s) (\text{diam } F_i / 2)^s ; A \subset \bigcup_i F_i, \text{diam}(F_i) \leq \delta \right\}$.

Rappelons que $\alpha(s) = \pi^{s/2} / \Gamma(s/2 + 1)$, où Γ est la classique fonction Gamma qui intervient dans le calcul de la mesure de Lebesgue de la boule unité de \mathbb{R}^n . Cette normalisation sera justifiée plus tard.

La mesure \mathcal{H}^s est une mesure de Borel régulière mais n'est pas en général une mesure de Radon (sauf si $s = n$), car elle n'est pas localement finie (voir [19], chapitre 1). Cependant, si A est un ensemble \mathcal{H}^s -mesurable avec $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$, alors la restriction de \mathcal{H}^s à A est une mesure de Radon. Ceci découle de résultats généraux de théorie de la mesure (voir [19], théorème 1.9 et corollaire 1.11). Ici, la notion de mesure n'est pas l'usuelle mais correspond à la notion de mesure extérieure. Une application positive μ sur l'ensemble des sous-ensembles $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ de \mathbb{R}^n est une *mesure extérieure* si $\mu(\emptyset) = 0$ et $\mu(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mu(A_i)$. Il n'y a pas a priori de tribu associée. Cependant, le lien se fait de la façon suivante. On dit que $A \subset \mathbb{R}^n$ est μ -mesurable si pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(E) = \mu(A \cap E) + \mu(E \setminus A)$. Alors, les ensembles μ -mesurables forment une tribu (voir [19], chapitre 1).

Exemple 3.2. Si $s = 0$, \mathcal{H}^0 est la mesure de comptage. Elle n'a donc un intérêt que pour les ensembles finis (voire dénombrables).

Exemple 3.3. Si $s = 1$ et si Γ est une courbe de Jordan (c'est-à-dire une courbe simple) de \mathbb{R}^n , alors $\mathcal{H}^1(\Gamma)$ est la longueur (au sens usuel) de Γ .

Exemple 3.4. Si $s = n$, alors $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ (ceci explique la normalisation précédente). Cette égalité vient de l'inégalité isodiamétrique. Celle-ci affirme que si A est un sous-ensemble quelconque de \mathbb{R}^n et si $B(x, R)$ est une boule de \mathbb{R}^n avec $\text{diam } A = \text{diam } B(x, R)$ alors $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(B(x, R))$. Ainsi, à diamètre fixé, c'est la boule qui a la plus grande mesure. Voir le texte d'Emmanuel Russ dans ce volume.

La mesure \mathcal{H}^s est donc s -dimensionnelle au sens où elle se comporte bien sur les ensembles de dimension s (et encore, pas tous). Ceci justifie l'introduction de la notion de dimension de Hausdorff que nous allons maintenant définir. On commence par un résultat technique.

Proposition 3.5. Pour $0 \leq s < t < \infty$ et $A \subset \mathbb{R}^n$, on a :

- (i) si $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$;
- (ii) si $\mathcal{H}^t(A) > 0$, alors $\mathcal{H}^s(A) = \infty$.

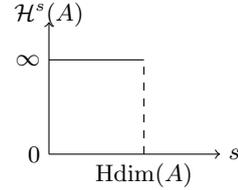
Démonstration. Il est clair que (i) implique (ii) mais nous avons préféré énoncer aussi (ii) dans la mesure où nous en aurons besoin pour l'équivalence des diverses définitions de la dimension de Hausdorff. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $\mathcal{H}^s(A) < \infty$. Pour démontrer (i), on se donne un $\delta > 0$ et on considère un recouvrement (E_i) de A avec $\text{diam}(E_i) \leq \delta$ pour tout i et $\sum_i \alpha(s)(\text{diam}(E_i)/2)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + 1$. On a alors

$$\begin{aligned} H_\delta^t(A) &\leq \sum_i \alpha(t)(\text{diam}(E_i)/2)^t \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \delta^{t-s} \sum_i \alpha(s)(\text{diam}(E_i)/2)^s \\ &\leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \delta^{t-s} (\mathcal{H}_\delta^s(A) + 1). \end{aligned}$$

En faisant tendre δ vers 0, on obtient alors $\mathcal{H}^t(A) = 0$. □

Définition 3.6. Soit $A \subset \mathbb{R}^n$. La *dimension de Hausdorff* de $A \subset \mathbb{R}^n$, notée $\text{Hdim}(A)$, est définie par

$$\begin{aligned}
\text{Hdim}(A) &= \sup\{t ; \mathcal{H}^t(A) > 0\} \\
&= \sup\{s ; \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\
&= \inf\{s ; \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \\
&= \inf\{t ; \mathcal{H}^t(A) = 0\}.
\end{aligned}$$



Graphes de $s \mapsto \mathcal{H}^s(A)$.

Si $\text{Hdim}(A) = s$, alors $\mathcal{H}^s(A)$ est soit nulle, finie ou infinie. Par définition, si $A \subset \mathbb{R}^n$, on a $\text{Hdim}(A) \leq n$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application K -lipschitzienne et soit $A \subset \mathbb{R}^n$. Comparer $\mathcal{H}^s(A)$ et $\mathcal{H}^s(f(A))$, puis $\text{Hdim}(A)$ et $\text{Hdim}(f(A))$.

Il n'est pas facile en général de calculer la dimension de Hausdorff. Nous allons maintenant exhiber une large classe d'ensembles pour lesquels la dimension de Hausdorff est donnée par une formule explicite. L'idée est de généraliser la construction des fractales classiques comme l'ensemble triadique de Cantor dont nous discutons maintenant le cas.

Exemple 3.7 (L'ensemble triadique de Cantor, voir la figure 5)

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on considère les sous-ensembles de \mathbb{R} suivants :

$$I_j = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{3^j-1} \left[\frac{k}{3^j}, \frac{k+1}{3^j} \right].$$

On pose $E_1 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} I_j$. Alors, $\text{Hdim}(E_1) = \log 2 / \log 3$. On peut se convaincre intuitivement de ce résultat. Écrivons $I_j = \bigcup_k I_j^k$, où les I_j^k sont les 2^j intervalles de longueur 3^{-j} qui ont été donnés ci-dessus. Si $\delta > 0$, pour estimer $\mathcal{H}_\delta^s(E_1)$, il est naturel de considérer le recouvrement de E_1 par les I_j^k avec $3^{-j} \leq \delta$. On a alors $\sum_k \alpha(s) (\text{diam } I_j^k / 2)^s = \alpha(s) 2^{-s} 2^j 3^{-js}$. Pour que $2^j 3^{-js}$ converge non trivialement, il faut que $s = \log 2 / \log 3$. Le problème est que nous n'avons considéré que des recouvrements particuliers. Le même argument heuristique peut aussi s'appliquer pour les autres exemples.

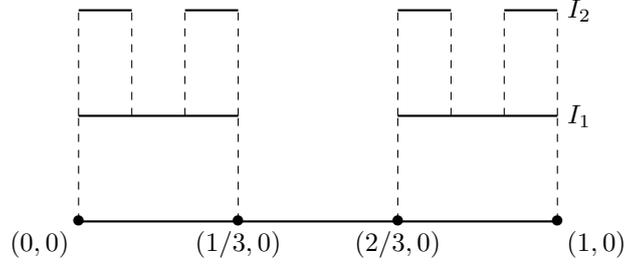


FIGURE 5. Les trois premières étapes de la construction de l'ensemble triadique de Cantor

Nous allons maintenant définir les ensembles (compacts) auto-similaires. Comme l'ensemble triadique de Cantor, ils sont obtenus par itération de transformations géométriques simples (des similitudes).

Proposition 3.8. *Soit S_1, \dots, S_N des similitudes sur \mathbb{R}^n respectivement de rapport τ_1, \dots, τ_N . Il existe un unique compact K invariant pour le système (S_1, \dots, S_N) , c'est-à-dire $K = \bigcup_{i=1}^N S_i(K)$. Un tel K sera dit auto-similaire.*

L'idée de la preuve est la suivante. Soit \mathcal{F} l'ensemble des compacts non vides de \mathbb{R}^n que l'on munit de la distance de Hausdorff :

$$\delta(K_1, K_2) = \max\{d(x, K_1), d(y, K_2) ; x \in K_2, y \in K_1\}.$$

Alors, \mathcal{F} est un espace complet. Comme l'application

$$E \longmapsto \sum_{i=1}^N S_i(E)$$

est une contraction dans (\mathcal{F}, δ) , on peut conclure par un théorème de point fixe.

Afin de pouvoir estimer la dimension de Hausdorff du compact invariant K , il faut s'assurer que les parties $S_i(K)$ sont bien séparées. On dira que le système (S_1, \dots, S_N) satisfait à l'*open set condition* s'il existe un ouvert non vide O dans \mathbb{R}^n tel que $\bigcup_{i=1}^N S_i(O) \subset O$ et $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$ dès que $i \neq j$.

Théorème 3.9. Soit S_1, \dots, S_N un système de similitude de rapport respectif τ_1, \dots, τ_N et qui satisfait à l'open set condition. On note K l'unique compact invariant de ce système. Alors, si Q est l'unique solution positive de l'équation $\sum_{i=1}^N \tau_i^Q = 1$, on a $0 < \mathcal{H}^Q(K) \leq \infty$. De plus, K est Ahlfors-régulier de dimension Q . En particulier, la dimension de Hausdorff de K est Q .

On rappelle qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est Ahlfors-régulier de dimension Q s'il existe une constante $C_{AR} > 0$ telle que, pour tout $x \in E$, tout $R \in]0, \text{diam } E[$, on a

$$C_{AR}^{-1}R^Q \leq \mathcal{H}^Q(E \cap B(x, R)) \leq C_{AR}R^Q.$$

Voir [10] pour une démonstration du théorème. Nous décrivons maintenant certains ensembles auto-similaires du plan complexe. Ils sont tous munis de la distance euclidienne induite.

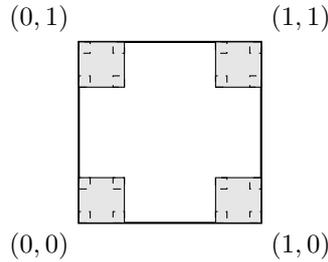


FIGURE 6. Les trois premières étapes de la construction du Cantor 4-coins

Exemple 3.10 (L'ensemble de Cantor 4-coins, voir la figure 6)

Soit $F_0 = [0, 1]^2$ le carré unité dans \mathbb{C} . Découpons F_0 en 16 carrés égaux de longueur de côté $1/4$. L'ensemble F_1 est l'union des 4 carrés situés dans les coins de F_0 . Puis, on découpe chacun de ces 4 carrés en 16 carrés identiques et l'ensemble F_2 est l'union des 16 carrés qui sont situés dans les coins des 4 carrés de F_1 . En itérant cette construction, on construit une suite de sous-ensembles $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{C} , chacun des F_j étant formé de 4^j carrés de longueur de côté 4^{-j} qui sont situés dans les coins des carrés de F_{j-1} . Soit $E_2 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$. Alors, $\text{Hdim}(E_2) = 1$.

Exemple 3.11 (La courbe de Von Koch, voir la figure 7)

Soit $J_0 = [0, 1]$ l'intervalle unité situé sur la droite réelle de \mathbb{C} . On divise J_0 en trois segments identiques et on substitue au segment du milieu deux segments formant avec lui un triangle équilatéral. On note J_1 la ligne polygonale ainsi obtenue, puis on applique la même substitution à chaque segment de J_1 . On obtient une nouvelle ligne polygonale J_2 formé de 4^2 segments de longueur 3^{-2} . En itérant, on obtient une suite de lignes polygonales $(J_j)_{j \in \mathbb{N}}$ qui converge (pour la distance de Hausdorff) vers une courbe de \mathbb{C} que l'on note E_3 . Notons que la longueur de E_3 est infinie. En fait, $\text{Hdim}(E_3) = \log 4 / \log 3$.

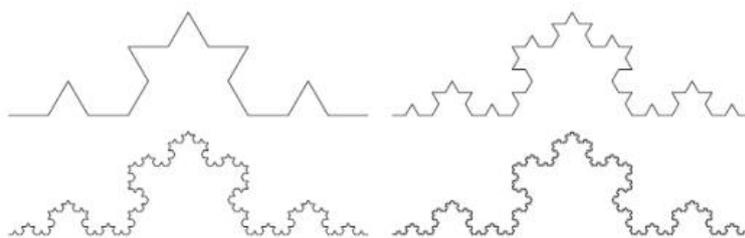


FIGURE 7. Construction de la courbe de Von Koch

Exemple 3.12 (Le tapis et le tamis de Sierpinski, voir figure 8)

Comme pour l'ensemble de Cantor 4-coins, on commence par considérer le carré unité $T_0 = [0, 1]^2$ de \mathbb{C} . On le subdivise ensuite en 9 carrés de longueur de côté $1/3$ et on obtient T_1 en enlevant le carré du milieu. Puis, on partage chacun des 8 carrés de T_1 en 9 carrés de longueur de côté $1/9$ et on enlève les 8 carrés du milieu pour obtenir T_2 . En itérant cette construction, on obtient T_j qui est la réunion de 8^j carrés de longueur de côté $(1/3)^j$. Le *tapis de Sierpinski* est alors défini par $T = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} T_j$. On a $\text{Hdim}(T) = \log(8) / \log(3)$. Le *tamis de Sierpinski* s'obtient de façon similaire en commençant par considérer un triangle équilatéral T_0 de longueur de côté 1. On le subdivise en 4 triangles équilatéraux de longueur de côté $1/2$ et on obtient T_1 en

enlevant le triangle du milieu. Le tamis de Sierpinski T est obtenu en itérant cette construction. On a $\text{Hdim}(T) = \log(3)/\log(2)$.

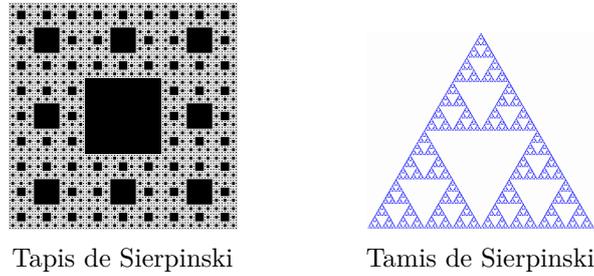


FIGURE 8.

Le lecteur pourra appliquer le théorème précédent pour vérifier que la dimension de Hausdorff des exemples ci-dessus est bien celle donnée.

4. Construction d'un ensemble de Kakeya à partir de l'ensemble de Cantor 4-coins

On commence par quelques notions de théorie de la rectifiabilité en se limitant au cas du plan complexe. Soit $E \subset \mathbb{C}$. On dit que E est *1-rectifiable* (ou tout simplement *rectifiable*) s'il existe une famille (dénombrable) d'applications lipschitziennes $f_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ et un ensemble $E_0 \subset \mathbb{C}$ avec $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$ tels que $E \subset E_0 \cup (\bigcup_i f_i(\mathbb{R}))$. En d'autres termes, E peut être recouvert par une union de courbes (localement) rectifiables à un ensemble de 1-mesure de Hausdorff nulle près. D'un autre côté, un ensemble $F \subset \mathbb{C}$ est purement non 1-rectifiable (ou tout simplement purement non rectifiable) si, pour tout ensemble rectifiable $E \subset \mathbb{C}$, on a $\mathcal{H}^1(F \cap E) = 0$ ou, de façon équivalente, $\mathcal{H}^1(F \cap \Gamma) = 0$ pour toute courbe rectifiable Γ de \mathbb{C} . La notion de rectifiabilité joue un rôle important dans des problèmes variationnels comme la segmentation d'images (voir le texte d'Antoine Lemenant).

Remarque 4.1. Dans le cas général des espaces euclidiens, si $d \in \mathbb{N}$ avec $0 < d < n$, on peut parler d'ensembles d -rectifiables $E \subset \mathbb{R}^n$ en considérant des applications lipschitziennes $f_i : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^n$ et en

remplaçant \mathcal{H}^1 par \mathcal{H}^d . Cependant, dans des cadres non euclidiens comme celui du groupe de Heisenberg par exemple, il n'existe pas vraiment de théorie de la rectifiabilité.

Exercice 3. Soit $E \subset \mathbb{C}$ avec $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$. Démontrer qu'il existe un ensemble rectifiable $E_{\text{rect}} \subset \mathbb{C}$ et un ensemble purement non rectifiable $E_{\text{unrect}} \subset \mathbb{C}$ tels que $E = E_{\text{rect}} \cup E_{\text{unrect}}$, et que cette décomposition est unique à un ensemble de 1-mesure de Hausdorff nulle près.

Remarque 4.2. Les fonctions lipschitziennes ont beaucoup de propriétés intéressantes. Ainsi, si A est un sous-ensemble de \mathbb{R}^n et si $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ est lipschitzienne, on peut prolonger f en une application lipschitzienne sur \mathbb{R}^n tout entier en gardant la même constante de Lipschitz (théorème de Kirzbraun). Il en résulte une définition équivalente de la rectifiabilité. L'ensemble E est rectifiable s'il existe une famille (dénombrable) d'ensembles $A_i \subset \mathbb{C}$ et d'applications lipschitziennes $f_i : A_i \rightarrow \mathbb{C}$ ainsi qu'un ensemble $E_0 \subset \mathbb{C}$ avec $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$ tels que $E = E_0 \cup (\bigcup_i f_i(A_i))$. Une autre propriété est que toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est presque partout différentiable (théorème de Rademacher). Voir [19] chapitre 7 pour ces résultats.

Il existe diverses caractérisations des ensembles rectifiables/purement non rectifiables. Par exemple, nous allons en donner une en termes de la taille des projections. Si $\theta \in [0, \pi]$, on note P_θ la projection orthogonale dans \mathbb{C} sur la direction θ (c'est-à-dire la direction qui fait un angle θ avec l'horizontal).

Théorème 4.3. Soit $E \subset \mathbb{C}$ un ensemble \mathcal{H}^1 -mesurable satisfaisant à $\mathcal{H}^1(E) < \infty$.

(i) E est rectifiable si et seulement si pour tout sous-ensemble \mathcal{H}^1 -mesurable F de E avec $\mathcal{H}^1(F) > 0$, $\mathcal{H}^1(P_\theta(F)) > 0$ pour presque tout $\theta \in [0, \pi]$.

(ii) E est purement non rectifiable si et seulement $\mathcal{H}^1(P_\theta(E)) = 0$ pour presque tout $\theta \in [0, \pi]$.

Remarque 4.4. Une autre caractérisation de la rectifiabilité est l'existence presque partout d'une tangente en un sens approprié. On peut

le voir comme une conséquence du théorème de Rademacher rencontré dans la remarque précédente.

Si $E \subset \mathbb{C}$, on définit la *longueur de Favard* de E par

$$\text{Fav}(E) = \frac{1}{\pi} \int |P_\theta(E)| d\theta,$$

où $|P_\theta(E)|$ est la mesure de Lebesgue de $P_\theta(E)$. La condition (ii) précédente implique que E est purement non rectifiable si et seulement si $\text{Fav}(E) = 0$. Mais existe-t-il de tels ensembles? Le but de ce qui suit est de démontrer que l'ensemble de Cantor 4-coins rencontré à la section précédente est un tel ensemble.

Soit C l'ensemble de Cantor 4-coins. On a alors $C = \bigcup_{j=1}^4 (\frac{1}{4}C + e_j)$, où $e_1 = (0, 0)$, $e_2 = (3/4, 0)$, $e_3 = (0, 3/4)$, et $e_4 = (3/4, 3/4)$. On peut aussi écrire $C = \bigcup_{i=1}^4 C_i$, où, pour tout $i = 1, 2, 3, 4$, on pose $C_i = \frac{1}{4}C + e_i$.

Théorème 4.5. *Pour presque tout θ , $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) = 0$ (ou encore $\text{Fav}(C) = 0$).*

Ainsi, d'après le théorème 4.3, l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable.

Remarque 4.6. Il est possible de démontrer qu'il existe un nombre dénombrable de directions θ pour lesquelles $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) > 0$. En fait, l'ensemble des directions θ telles que $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) = 0$ est dénombrable (infini) et dense dans $[0, \pi]$. Voir [20].

Démonstration. On suit une preuve due à Peres-Solomyak (voir [24]). On commence par noter que

$$P_\theta(C) = \bigcup_{i=1}^4 \left(\frac{1}{4}P_\theta(C) + P_\theta(e_i) \right) \subset \mathbb{R}.$$

On est donc amené à étudier des ensembles auto-similaires sur la droite réelle tels qu'il existe $m \geq 2$ et des d_1, \dots, d_m (avec $d_i \neq d_j$ si $i \neq j$) de sorte que l'on ait $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$, où, pour tout $i = 1, \dots, m$, on pose $K_i = \frac{1}{m}K + d_i$. On utilise dans la suite ces notations.

Lemme 4.7.

- (i) Si $i \neq j$, $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$;
- (ii) Il existe $i \neq j$ tels que $K_i \cap K_j \neq \emptyset$.

L'idée intuitive pour démontrer (i) est la suivante. Les K_i sont obtenus par translation et dilatation de rapport $1/m$ à partir de K . Donc, $\mathcal{L}^1(K_i) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^1(K)$ pour tout $i = 1, \dots, m$. Comme $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$, il faut que, si $i \neq j$, on ait $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$. Pour rendre la preuve plus rigoureuse, on note que si on fixe $1 \leq i < j \leq m$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(K) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^m K_k\right) \leq \mathcal{L}^1(K_i \cup K_j) + \sum_{k \neq i, j} \mathcal{L}^1(K_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^1(K_k) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j). \end{aligned}$$

Or, comme $\mathcal{L}^1(K_i) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^1(K)$ pour tout $i = 1, \dots, m$, il vient

$$\mathcal{L}^1(K) \leq \mathcal{L}^1(K) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j),$$

ce qui n'est possible que si $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$.

Pour (ii), on raisonne évidemment par l'absurde et on va utiliser le point (i). Supposons que, pour tout $i \neq j$, on ait $K_i \cap K_j = \emptyset$. Comme les K_i sont compacts, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $i \neq j$, $d(K_i, K_j) > \varepsilon_0$. Si $F \subset \mathbb{R}$ et si $\varepsilon > 0$, on définit le ε -voisinage $V_\varepsilon(F)$ de F par

$$V_\varepsilon(F) = \{x \in \mathbb{R} ; d(x, F) < \varepsilon\}.$$

Par choix de ε_0 , on a que $V_{\varepsilon_0}(K_i) \cap V_{\varepsilon_0}(K_j) = \emptyset$ si $i \neq j$. Il s'ensuit que

$$\mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K)) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^m V_{\varepsilon_0}(K_k)\right) = \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K_k)).$$

Or on a clairement que

$$\mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K_k)) = \mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(m^{-1}K)) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^1(V_{m\varepsilon_0}(K)).$$

Les deux égalités précédentes donnent $\mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K)) = \mathcal{L}^1(V_{m\varepsilon_0}(K))$. Ceci est impossible puisque $V_{\varepsilon_0}(K)$ est un ouvert strictement inclus dans l'ouvert $V_{m\varepsilon_0}(K)$. \square

Avant d'énoncer le prochain lemme, nous avons besoin de quelques définitions et notations. On pose $I = \{1, \dots, m\}$ puis pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$I_k = \{p = (i_1, \dots, i_k) ; \forall j \in \{1, \dots, k\}, i_j \in I\}.$$

On peut alors écrire que, pour des $d_p \in \mathbb{R}$ bien choisis et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $K = \bigcup_{p \in I_k} K_p$ avec $K_p = \frac{1}{m^k} K + d_p$. Soit $\varepsilon > 0$. On dit que K_p et K_q sont *proches à ε près* si

- (i) $p, q \in I_k$ pour un certain k et $p \neq q$,
- (ii) $K_q = K_p + x$ pour un $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| \leq \varepsilon \operatorname{diam}(K)$.

Notons que si $p, q \in I_k$, K_p peut toujours être obtenu à partir de K_q par translation. La dernière condition demande que cette translation soit petite. Notons aussi que, d'après le lemme 4.7, si $p, q \in I_k$ avec $p \neq q$, on a $\mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) = 0$.

Lemme 4.8. *Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k et $p, q \in I_k$ avec $p \neq q$ tels que K_p et K_q sont proches à ε . Alors on a $\mathcal{L}^1(K) = 0$.*

Avant de donner la preuve de ce lemme, signalons que nous aurons besoin du résultat suivant.

Exercice 4. Soit $F \subset \mathbb{R}$ un compact avec $\mathcal{L}^1(F) > 0$. Montrer que pour tout $\delta > 0$, il existe un intervalle J tel que

$$\mathcal{L}^1(F \cap J) \geq (1 - \delta) \mathcal{L}^1(J).$$

(Attention, ce résultat est un cas particulier du théorème de différentiation de Lebesgue qui est énoncé plus loin mais que l'on ne doit pas utiliser ! Voir théorème 5.7).

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons que l'on ait $\mathcal{L}^1(K) > 0$. Alors, d'après l'exercice précédent, il existe un intervalle $J \subset \mathbb{R}$ de sorte que (par exemple)

$$\mathcal{L}^1(J \cap K) \geq 0,9 \mathcal{L}^1(K).$$

On choisit $\varepsilon = \mathcal{L}^1(J)/2 \operatorname{diam}(K)$. Par hypothèse, il existe $k \in \mathbb{N}$ et des $p, q \in I_k$ (avec $p \neq q$) tels que K_p et K_q sont proches à ε près. Si on pose

$$J_p = d_p + \frac{1}{m^k} J \quad \text{et} \quad J_q = d_q + \frac{1}{m^k} J,$$

alors

$$J_p = J_q + (d_p - d_q) \quad \text{et} \quad |d_p - d_q| \leq \varepsilon m^{-k} \operatorname{diam}(K) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^1(J_p).$$

Par les propriétés de \mathcal{L}^1 on a de plus

$$\mathcal{L}^1(J_p \cap K_p) \geq 0,9\mathcal{L}^1(J_p) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}^1(J_q \cap K_q) \geq 0,9\mathcal{L}^1(J_q).$$

Puisque 90% de J_q est dans K_q et 50% de J_q est dans J_p , il y a au moins 40% de J_p dans K_q . Mais, comme 90% de J_p est dans K_p , il y a au moins 30% de J_p dans $K_p \cap K_q$. Or $\mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) = 0$ et nous avons une contradiction. \square

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. On pose $C^\theta = P_\theta(C) \subset \mathbb{R}$ et on utilise les notations C_i^θ et C_p^θ de la même façon que pour l'ensemble K des lemmes précédents. On fixe $\varepsilon > 0$ et on pose

$$V_\varepsilon = \{\theta \in [0, \pi[; \exists k, p, q, p \neq q \in I_k, C_p^\theta \text{ et } C_q^\theta \text{ proches à } \varepsilon\text{-près}\}.$$

D'après le lemme 4.8, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{L}^1[0, \pi[\setminus V_\varepsilon) = 0$. En effet, on a alors

$$\mathcal{L}^1([0, \pi[\setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon) = \mathcal{L}^1([0, \pi[\setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} V_{1/j}) = 0.$$

Pour démontrer que $\mathcal{L}^1([0, \pi[\setminus V_\varepsilon) = 0$, l'idée est de démontrer que pour tout intervalle de $[0, \pi]$, il existe un pourcentage fixe de sa longueur (dépendant de ε mais pas de la longueur de l'intervalle) qui est contenu dans V_ε . On peut alors conclure d'après l'exercice 4.

Considérons $\varepsilon > 0$ et $\theta \in [0, \pi[$. Par le lemme 4.7, il existe $i \neq j$ tels que $C_i^\theta \cap C_j^\theta \neq \emptyset$, c'est-à-dire qu'il existe $x \in C_i$ et $y \in C_j$ avec $P_\theta(x) = P_\theta(y)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe $p \in I_k$ et $q \in I_k$ avec $P_\theta(x) \in C_p^\theta$ et $P_\theta(y) \in C_q^\theta$. Considérons maintenant $\theta_0 \in [0, \pi[$ tel que $P_{\theta_0}(C_p) = P_{\theta_0}(C_q)$. Un tel θ_0 existe toujours par des arguments classiques de géométrie du plan. Alors, $C_p^{\theta_0}$ et $C_q^{\theta_0}$ sont confondues. De nouveau, par des arguments de géométrie élémentaire, il vient que, si $C > 0$ est une constante assez petite, alors pour des angles ϕ tels que $|\phi - \theta_0| \leq C\varepsilon 4^{-k}$, C_p^ϕ et C_q^ϕ sont ε -proches. Par conséquent, il existe une constante $C' > 0$ telle que $[\theta - C'4^{-k}, \theta + C'4^{-k}] \cap V_\varepsilon$ contient un intervalle de longueur $C\varepsilon 4^{-k}$. Comme k est quelconque, on obtient que $\mathcal{L}^1([0, \pi[\cap V_\varepsilon) = 0$ d'après la remarque initiale, et la preuve est complète.

Remarque 4.9. Nous présentons rapidement une autre propriété de l'ensemble de Cantor 4-coins. On dit que $E \subset \mathbb{C}$ est *effaçable pour*

les fonctions holomorphes bornées (ou tout simplement *effaçable*) si, pour tout ouvert U contenant E , toute fonction holomorphe bornée $f : U \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$ admet une extension holomorphe dans U tout entier. D'après un théorème de Riemann, tout singleton est effaçable. L'idée est qu'un ensemble « petit » est effaçable, alors qu'un ensemble « grand » ne l'est pas. Ceci se traduit en termes de mesures et dimension de Hausdorff par la

Proposition 4.10. *Soit $E \subset \mathbb{C}$.*

- (i) *Si $\mathcal{H}^1(E) = 0$ alors E est effaçable.*
- (ii) *Si $\text{Hdim}(E) > 1$, alors E n'est pas effaçable.*

Cependant, on ne peut pas caractériser l'effaçabilité seulement par la taille des ensembles. Ainsi, le Cantor 4-coins C est effaçable mais $\mathcal{H}^1(C) > 0$ (on peut le montrer directement par des arguments d'analyse complexe). Le fait que C soit purement non rectifiable est important car cette propriété caractérise en fait l'effaçabilité pour les ensembles de 1-mesure de Hausdorff finie par un théorème (difficile) de Guy David. Nous renvoyons à [22] pour plus de détails.

Nous allons maintenant pouvoir démontrer le résultat suivant.

Théorème 4.11. *Il existe un ensemble du plan de mesure de Lebesgue nulle et qui contient une droite dans toutes les directions.*

La démonstration repose sur un principe de dualité dû à Besicovitch dans son article de 1964. Nous en présentons une variante décrite par Falconer dans [10].

À tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, nous associons la droite $L(a, b)$ d'équation $y = a + bx$. Si $E \subset \mathbb{R}^2$, nous notons $L(E) = \bigcup_{(a,b) \in E} L(a, b)$. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, L_c désigne la droite d'équation $x = c$. Alors, $L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, \langle (a, b), (1, c) \rangle)$, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^2 . D'où, si $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$L(E) \cap L_c = \{(c, \langle (1, c) \cdot (a, b) \rangle) ; (a, b) \in E\}$$

et donc $L(E) \cap L_c$ est similaire à $P_\theta(E)$ avec un rapport de $(1+c^2)^{1/2}$, où $c = \tan \theta$. Ceci implique que

$$(4.12) \quad \mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \iff \mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0.$$

De (4.12) et du théorème de Fubini, nous déduisons le

Lemme 4.13. *Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ avec $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$. Alors, $L(E)$ est \mathcal{L}^2 -mesurable. De plus, si $\text{Fav}(E) = 0$, $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$.*

Notons que, si $E \subset \mathbb{R}^2$ et si $b \in P_{\pi/2}(E)$, alors $L(E)$ contient une droite de coefficient directeur b . Cette remarque élémentaire est très importante, car elle implique que si $P_{\pi/2}(E) = \mathbb{R}$, alors $L(E)$ contient une droite dans toute direction. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.11. Soit E une copie de l'ensemble de Cantor 4-coins obtenue à partir de l'original en faisant une rotation et une translation de sorte que $P_{\pi/2}(E)$ contient le segment $[-1, 1]$. D'après la remarque précédente, nous en déduisons que $L(E)$ contient, pour tout $\lambda \in [-1, 1]$, une droite dont le coefficient directeur est λ . De plus, d'après le lemme 4.13, on a $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ puisque $\text{Fav}(E) = 0$. En prenant l'union de $L(E)$ et de son image par la rotation d'angle $\pi/2$ (et de centre l'origine), nous obtenons ce que nous voulons.

Terminons par un problème ouvert. Soit C_n la n -ième génération de l'ensemble de Cantor 4-coins, c'est-à-dire C_n est formé de 4^n carrés de longueur de côté 4^{-n} qui sont contenus dans les coins des 4^{n-1} carrés de C_{n-1} et $C_0 = [0, 1]^2$. Comme $C = \bigcap_n C_n$ et que $\text{Fav}(C) = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Fav}(C_n) = 0$. La question est : quelle est la vitesse de convergence ?

Conjecture 4.14. *Il existe des constantes $c, C > 0$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$c/n \leq \text{Fav}(E_n) \leq C/n.$$

Seule l'estimation de gauche est connue. L'autre estimation est largement ouverte. Voir [21] (chapitre 10) ou [20] pour une discussion plus détaillée de ce problème.

5. Le problème actuel de Kakeya

Voyons maintenant ce qui se passe dans \mathbb{R}^n .

Définition 5.1. Soit k un entier avec $k < n$. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est un (n, k) -ensemble de Kakeya s'il est de n -mesure de Lebesgue

nulle, et s'il contient un translaté de tout sous-espace (vectoriel) de dimension k de \mathbb{R}^n .

D'après le théorème 4.11, il existe des $(2, 1)$ -ensembles de Kakeya. En prenant le produit cartésien d'un tel ensemble et de \mathbb{R}^{n-2} , nous pouvons montrer qu'il existe des $(n, 1)$ -ensembles de Kakeya. Nous ne pouvons pas espérer avoir des (n, k) -ensembles de Kakeya pour k trop grand. Par exemple, des résultats de Falconer et Marstrand (voir [10]) montrent que de tels ensembles n'existent pas pour $k > n/2$. Donc, les ensembles vraiment intéressants sont les $(n, 1)$ -ensembles de Besicovitch (c'est-à-dire les sous-ensembles de \mathbb{R}^n qui contiennent une droite dans chaque direction). Nous nous restreindrons dans la suite à ces ensembles que nous nommerons comme précédemment *ensembles de Besicovitch* (ou *de Kakeya* s'ils sont de mesure nulle). Ce que l'on appelle maintenant le problème de Kakeya est de résoudre la conjecture suivante.

Conjecture 5.2. *Tout ensemble de Besicovitch dans \mathbb{R}^n est de dimension de Hausdorff égale à n .*

Évidemment, la conjecture n'a d'intérêt que pour les ensembles de Kakeya. Comme les autres sont de mesure de Lebesgue non nulle, ils sont de dimension n . Le but de ce qui suit est de discuter cette conjecture, qui n'est résolue qu'en dimension 2.

5.1. Le cas de la dimension 2

Davies a montré le résultat suivant qui termine l'histoire en dimension 2. Nous suivrons la preuve donnée dans [10].

Théorème 5.3. *Si F est un ensemble du plan qui contient une droite dans chaque direction, alors sa dimension de Hausdorff est 2.*

Démonstration. Soit $F \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble contenant une droite dans chaque direction. On utilise les mêmes notations que dans le paragraphe précédent sur le principe de dualité de Besicovitch. Posons $E = \{(a, b) ; L(a, b) \subset F\}$ (et ainsi $L(E) \subset F$). Puisque F contient une droite dans chaque direction, $P_{\pi/2}(E)$ est l'axe des ordonnées tout entier. Donc, $\mathcal{H}^1(E) = +\infty$, puisque $\mathcal{H}^1(P_{\pi/2}(E)) \leq \mathcal{H}^1(E)$ (voir

l'exercice 2). Ainsi, la dimension de Hausdorff de E est au moins égale à 1. Par le théorème 6.8(a) de [10], il s'ensuit que $\text{Hdim}(P_\theta(E)) = 1$ pour presque tout θ . D'où, par le principe de dualité décrit plus haut, $\text{Hdim}(L(E) \cap L_c) = 1$ pour presque tout $c \in \mathbb{R}$. Ainsi, presque toutes les tranches horizontales sont de dimension 1, il en résulte (voir le théorème 5.8 de [10] qui est une version du théorème de Fubini) que $\text{Hdim}(L(E)) = 2$ (penser à un produit cartésien). Comme $L(E) \subset F$, nous en déduisons $\text{Hdim}(F) = 2$. \square

Nous allons donner une autre preuve de ce résultat en utilisant la fonction maximale de Takeya dans le prochain paragraphe.

5.2. Lien avec la fonction maximale et le cas de la dimension supérieure

Nous commençons par donner le principe général des fonctions maximales.

Soit τ une famille d'ensembles dans \mathbb{R}^n . On suppose que pour tout $T \in \tau$, il existe une mesure de probabilité μ_T sur T . On associe à τ une fonction maximale par $M_\tau f(x) = \sup_{x \in T \in \tau} \int_T |f(x)| d\mu_T(x)$ pour une fonction f « lisse ». On donne maintenant des exemples classiques qui exhibent des comportements différents.

Exemple 5.4. On se place ici dans le cas général d'un espace métrique (séparable) (X, d) muni d'une mesure (extérieure) μ qui est doublante, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C_{DV} \geq 1$ telle que pour tout $x \in X$, tout $R > 0$, $\mu(B(x, 2R)) \leq C_{DV} \mu(B(x, R))$. Un tel espace X est un espace de type homogène au sens de Coifman-Weiss et est le cadre général pour faire de l'analyse harmonique (sans théorie des représentations). Voir le premier chapitre de [27]. L'exemple de référence est l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni de sa mesure de Lebesgue.

On considère le cas où la famille τ est la famille \mathcal{B} des boules $B(x, R)$ pour $x \in X$ et $R > 0$; alors pour toute boule $B \in \mathcal{B}$, on choisit $\mu_B = \frac{1}{\mu(B)} \mu|_B$, où $\mu|_B$ est la restriction de la mesure μ sur la boule B . Notons que, comme μ est doublante, on a $\mu(B) \neq 0$ pour toute boule B de X et la définition précédente a bien un sens.

Ainsi, pour une fonction localement intégrable $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, on définit la fonction maximale (de Hardy-Littlewood) de f par

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \int_{B(x,r)} |f| d\mu = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| d\mu.$$

et la fonction maximale restreinte de f (à l'échelle $R > 0$) par

$$M_R f(x) = \sup_{0<r<R} \int_{B(x,r)} |f| d\mu = \sup_{0<r<R} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f| d\mu.$$

On a le théorème fondamental suivant.

Théorème 5.5. *Soit (X, d, μ) un espace métrique mesuré doublant et soit $R > 0$. La fonction maximale M_R envoie faiblement $L^1(X, \mu)$ dans $L^1(X, \mu)$ et $L^p(X, \mu)$ dans $L^p(X, \mu)$ ($1 < p < +\infty$) au sens suivant : il existe des constantes positives C_1 et C_p ne dépendant que de p et de la constante de doublement de μ (mais pas de R !) de sorte que*

(i) *Continuité L^1 - L^1 faible :*

$$\mu(\{M_R f > t\}) \leq \frac{C_1}{t} \int_X |f| d\mu, \quad \forall f \in L^1(X, \mu), \quad \forall t > 0.$$

(ii) *Continuité L^p :*

$$\int_X |Mf|^p d\mu \leq C_p \int_X |f|^p d\mu, \quad \forall f \in L^p(X, \mu).$$

Puisque C_1 et C_p ne dépendent pas de R , on a les mêmes conclusions pour l'opérateur maximal M .

La preuve repose sur le lemme de recouvrement suivant.

Lemme 5.6. *Soit (X, d) un espace métrique (séparable) et soit \mathcal{F} une famille de boules de X . On suppose que $\sup_{B \in \mathcal{F}} \text{diam}(B) < +\infty$. Alors, il existe une sous-famille au plus dénombrable \mathcal{G} de \mathcal{F} telle que les boules de \mathcal{G} sont deux à deux disjointes et $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B = \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B$, où $5B = B(x, 5R)$ si $B = B(x, R)$ (et $5B$ est ouverte (respectivement fermée) si B est ouverte (respectivement fermée)).*

Une application classique de la continuité de la fonction maximale est le théorème de différentiation de Lebesgue que nous énonçons maintenant.

Théorème 5.7. *Soit f une fonction positive localement intégrable sur un espace métrique (localement compact) (X, d) muni d'une mesure doublante μ . Alors, pour μ -presque tout $x \in X$,*

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, R))} \int_{B(x, R)} |f(x) - f(y)| d\mu(y) = 0.$$

L'hypothèse de compacité locale assure que les fonctions continues dans X sont denses dans $L^1(\mu)$. Pour des preuves des théorèmes précédents, voir [12] dans lequel le lecteur trouvera une jolie introduction à l'analyse dans les espaces métriques.

Exemple 5.8. On se place dans \mathbb{R}^2 . On considère le cas où $\tau = \mathcal{R}$ est un ensemble de rectangles centrés à l'origine. Si $R \in \mathcal{R}$, on pose

$$M_{\mathcal{R}}f(x) = \sup_{R \in \mathcal{R}} \frac{1}{\mathcal{L}^2(R)} \left| \int_R f(x - y) dy \right|.$$

Si \mathcal{R} est l'ensemble de tous les rectangles avec orientation quelconque, $M_{\mathcal{R}}$ n'est pas borné sur $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $1 < p < +\infty$. On construit des contre-exemples à l'aide des ensembles de Kakeya (voir [27], section 2.2 du chapitre 3). Si \mathcal{R} est l'ensemble des rectangles avec côtés parallèles aux axes, $M_{\mathcal{R}}$ est borné sur $L^p(\mathbb{R}^2)$ pour tout $1 < p < +\infty$ (voir [27], section 2.3 du chapitre 3).

On considère maintenant la fonction maximale de Kakeya (dont la définition n'est pas due à Kakeya!). Pour $\delta > 0$, $v \in S^{n-1}$ (la sphère unité de \mathbb{R}^n), et $a \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$T_v^\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n ; |\langle x - a, v \rangle| \leq 1/2, \|(x - a)^\perp\| \leq \delta\}$$

où $x^\perp = x - \langle x, v \rangle v$. Si $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, on définit la fonction maximale de Kakeya $f_\delta^* : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f_\delta^*(v) = \sup_{a \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{|T_v^\delta(a)|} \int_{T_v^\delta(a)} |f(x)| dx.$$

Ici, et dans la suite, pour alléger les notations, on note $|E|$ la mesure de Lebesgue d'un ensemble E , quelle que soit la dimension. Un des buts est de démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que

$$(5.9) \quad \|f_\delta^*\|_{L^p(S^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_p.$$

pour un certain $p > 0$. Cependant, l'exemple de la fonction $f = \chi_{B(0,1)}$ (fonction caractéristique de la boule unité de \mathbb{R}^n) montre que l'estimation (5.9) ne peut pas être satisfaite pour $p < n$. On est alors amené à la conjecture de la fonction maximale de Kakeya. Beaucoup d'idées dans ce paragraphe sont dues à Bourgain [6]. Nous suivons la présentation de [29].

Conjecture 5.10. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que*

$$(5.11) \quad \|f_\delta^*\|_{L^n(S^{n-1})} \leq C_\varepsilon \delta^{-\varepsilon} \|f\|_n.$$

Le lien avec la conjecture de Kakeya est donné par le résultat suivant.

Théorème 5.12. *Si on a (5.9) pour un $p < \infty$, alors les ensembles de Besicovitch de \mathbb{R}^n sont de dimension n .*

Ainsi, la conjecture de la fonction maximale de Kakeya implique la conjecture de Kakeya.

Démonstration. Soit E un ensemble de Besicovitch. On se donne un recouvrement de E par des boules $B_j = B(x_j, r_j)$ avec $j \in \mathbb{N}$. Le but est de montrer que la somme $\sum_j r_j^d$ n'est pas nulle pour $d < n$. On peut sans perte de généralité supposer que, pour tout j , on a $r_j \leq 1/100$ par exemple. On pose

$$J_k = \{j ; 2^{-k} \leq r_j < 2^{-(k-1)}\}$$

puis $G_k = \bigcup_{j \in J_k} B_j$ (c'est-à-dire G_k est une réunion de boules de rayon comparable). Si on se donne $v \in S^{n-1}$, E contient un segment unité I_v de direction v (par définition d'un ensemble de Besicovitch). On pose

$$S_k = \left\{ v \in S^{n-1} ; |I_v \cap (\bigcup_{j \in J_k} B_j)| \geq 1/100k^2 \right\}.$$

Si $v \in S^{n-1}$, il existe k tel que $v \in S_k$ et donc $\bigcup_k S_k = S^{n-1}$. En effet, $\sum_k \frac{1}{100k^2} < 1$ et $\sum_k |I_v \cap (\bigcup_{j \in J_k} B_j)| \geq |I_v| = 1$. On pose maintenant $f = \chi_{F_k}$, où $F_k = \bigcup_{j \in J_k} B(x_j, 10r_j)$. Si G'_k est un translaté de F_k par un vecteur de norme $\leq 2^{-k}$, on a $G'_k \subset F_k$. Soit I'_v la translation correspondante de I_v , c'est-à-dire $I'_v \cap G'_k$ est une translation de $I_v \cap G_k$. On a alors $|I'_v \cap F_k| \geq |I_v \cap G_k|$ et donc $|T_v^{2^{-k}}(a_v \cap F_k)| \geq$

$\frac{1}{100k^2}|T_v^{2^{-k}}(a_v)|$, où a_v est le milieu de I_v . Il s'ensuit que si on note σ la mesure de surface sur S^{n-1} , on a

$$(5.13) \quad f_{2^{-k}}^*(v) \geq \frac{1}{|T_v^{2^{-k}}(a_v)|} \int_{T_v^{2^{-k}}(a_v)} \chi_{F_k} \geq \frac{1}{100k^2}$$

puis

$$(5.14) \quad \|f_{2^{-k}}^*\|_p \geq \left(\int_{S_k} (f_{2^{-k}}^*)^p dx \right)^{1/p} \geq \frac{1}{100k^2} \sigma(S_k)^{1/p}.$$

Mais, par (5.9), on a

$$(5.15) \quad \|f_{2^{-k}}^*\|_p \leq C_\varepsilon 2^{k\varepsilon} \|f\|_p \leq C_n C_\varepsilon 2^{k\varepsilon} (|J_k| 2^{-(k-1)n})^{1/p}.$$

Donc, par (5.14), on obtient

$$(5.16) \quad \sigma(S_k) \leq C_n C_\varepsilon^p 2^{kp-(k-1)n} k^{2p} |J_k| \leq C(\varepsilon, p, n) 2^{-k(n-2p\varepsilon)} |J_k|.$$

Fixons $d < n$ et choisissons $\varepsilon > 0$ avec $d < n - 2p\varepsilon$. Il vient alors

$$\begin{aligned} \sum_j r_j^{n-2p\varepsilon} &\geq \sum_k 2^{-k(n-2p\varepsilon)} |J_k| \\ &\geq C(\varepsilon, p, n) \sum_k \sigma(S_k) \geq C(\varepsilon, p, n) \sigma(S^{n-1}) = C > 0, \end{aligned}$$

où C ne dépend pas du recouvrement choisi. On peut alors conclure. \square

Dans le cas $n = 2$, on a une solution de la conjecture de la fonction maximale de Kakeya (et donc de la conjecture de Kakeya) puisque l'on a le

Théorème 5.17. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^2)$,*

$$\|f_\delta^*\|_2 \leq C \log(1/\delta)^{1/2} \|f\|_2.$$

Démonstration. Il existe plusieurs preuves de ce résultat. L'une, due à Cordoba, est plutôt de nature géométrique. Nous présentons celle, plus analytique, due à Bourgain. Voir [29] chapitre 10 pour une discussion plus détaillée. On peut supposer sans perte de généralité que f est positive. On pose

$$\rho_\delta^v(x) = \frac{1}{2\delta} \chi_{T_v^\delta(0)}(x)$$

et donc

$$f_\delta^*(v) = \sup_{a \in \mathbb{R}^2} (\rho_\delta^v * f)(a).$$

Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive dans la classe de Schwartz telle que $\widehat{\phi}$ est à support compact et $\phi(x) \geq 1$ si $|x| \leq 1$. Des rappels sur la classe de Schwartz et la transformée de Fourier sont donnés au début du paragraphe 6. On définit $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $\psi(x) = \phi(x_1)\delta^{-1}\phi(\delta^{-1}x_2)$, si $x = (x_1, x_2)$. On note (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{R}^2 . On peut alors remarquer que

- (a) $\psi \geq \rho_\delta^{e_1}$ et donc $f_\delta^*(e_1) \leq \sup_a (\psi * f)(a)$,
- (b) $f_\delta^*(v) \leq \sup_a (\psi_v * f)(a)$, où $\psi_v = \psi \circ P_v$ avec P_v une rotation appropriée.

Il s'ensuit par les propriétés usuelles de la transformée de Fourier :

$$f_\delta^*(v) \leq \|\psi_v * f\|_\infty \leq \|\widehat{\psi_v f}\|_1 = \int |\widehat{\psi_v}(\xi)| \cdot |\widehat{f}| d\xi.$$

Or, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} & \int |\widehat{\psi_v}(\xi)| |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ & \leq \left(\int |\widehat{\psi_v}(\xi)| |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|) d\xi \right)^{1/2} \left(\int \frac{|\widehat{\psi_v}(\xi)|}{1 + \|\xi\|} d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Comme $\widehat{\psi_v} = \widehat{\psi} \circ P_v$ et $\widehat{\psi} = \widehat{\phi}(x_1)\widehat{\phi}(\delta x_2)$, il vient que $|\widehat{\psi_v}| \leq C$ et $\widehat{\psi}$ est à support dans un rectangle R de taille de l'ordre $1 \times 1/\delta$.

Il s'ensuit

$$\int \frac{|\widehat{\psi_v}(\xi)|}{1 + \|\xi\|} d\xi \leq C \int_R \frac{d\xi}{1 + \|\xi\|} \leq C \int_1^{1/\delta} ds/s = C \log(1/\delta).$$

Puis, par les inégalités précédentes, il vient

$$\begin{aligned} \|f_\delta^*\|_2^2 & \leq C \log(1/\delta) \left(\int |\widehat{\psi_v}(\xi)| |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|) d\xi \right)^{1/2} \\ & \leq C \log(1/\delta) \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 (1 + \|\xi\|) \left(\int_{S^1} |\widehat{\psi_v}(\xi)| dv \right) d\xi \\ & \leq C \log(1/\delta) \int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ & = C \log(1/\delta) \|f\|_2^2. \end{aligned} \quad \square$$

La troisième inégalité vient du fait que, si on fixe ξ , l'ensemble des $v \in S^{n-1}$ avec $\widehat{\psi}_v(\xi) \neq 0$ est de mesure contrôlée par $1/(1 + \|\xi\|)$.

5.3. Un modèle plus simple : le cas des corps finis

On commence par quelques rappels sur les corps finis. Si p est un entier premier, on note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est un corps à p éléments. Si \mathbb{K} est un corps fini à q éléments, la caractéristique de \mathbb{K} est un nombre premier p et donc \mathbb{F}_p est (à isomorphisme près) un sous-corps de \mathbb{K} . De plus, \mathbb{K} est un espace vectoriel sur \mathbb{F}_p . Sa dimension est alors n si et seulement si $\text{card}(\mathbb{K}) = q = p^n$. Enfin, les éléments de \mathbb{K} sont les racines du polynôme $X^q - X \in \mathbb{F}_p[X]$, c'est-à-dire $X^q - X = \prod_{a \in \mathbb{K}} (X - a)$.

Notons aussi que si \mathbb{K} et \mathbb{K}' sont deux corps finis avec le même nombre d'éléments, ils ont la même caractéristique p et il existe un isomorphisme $\phi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}'$ avec $\phi(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{F}_p$. Le résultat suivant donne tous les corps finis.

Théorème 5.18. *Pour tout nombre premier p et tout entier $n \geq 1$, il existe un unique (à isomorphisme près) corps à p^n éléments.*

L'unicité vient de la remarque avant l'énoncé du théorème. L'existence vient du fait que pour tout entier $n \geq 1$, il existe un polynôme P de degré n irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$. Le corps cherché est alors $\mathbb{F}_p[X]/P$. Notre présentation suit [18] où on pourra trouver des démonstrations des faits énoncés et des applications à la cryptographie des corps finis.

Soit \mathbb{F}_p le corps (unique à isomorphisme près) à p éléments et soit \mathbb{F}_p^n un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{F}_p . On aurait pu considérer le cas d'un corps fini général mais cela n'ajoute rien à la discussion. On dit qu'un sous-ensemble E de \mathbb{F}_p^n est un ensemble de Besicovitch s'il contient une droite dans chaque direction, c'est-à-dire pour tout $v \in \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$, il existe $a \in \mathbb{F}_p^n$ tel que $a + tv \in E$ pour tout $t \in \mathbb{F}_p$.

On va s'intéresser dans ce paragraphe au problème suivant.

Conjecture 5.19. *Soit $E \subset \mathbb{F}_p^n$ un ensemble de Besicovitch. Alors E est de cardinal $\geq c_n \text{card}(\mathbb{F}_p)^n$, où $c_n > 0$ ne dépend que de n .*

Ainsi, un ensemble de Besicovitch de \mathbb{F}_p^n devrait contenir une grande proportion de points de \mathbb{F}_p^n . Nous allons à la fin de ce paragraphe en donner une preuve due à Dvir. Avant cela, nous énonçons une version plus faible qui permettra de faire le lien avec la version euclidienne. Nous suivons ici la présentation de [29].

Proposition 5.20. *Avec les mêmes notations que ci-dessus, on a $\text{card}(E) \geq C(n)^{-1}p^{(n+2)/2}$, où $C(n)$ est une constante ne dépendant que de n .*

Démonstration. On considère le cas $n = 2$ et on commence par montrer un résultat plus général qui nous servira dans le cas $n \geq 3$. Ainsi, on va montrer que si E contient au moins $p/2$ points sur m droites D_j dont les directions sont toutes différentes, alors

$$(5.21) \quad \text{card}(E) \geq Cmp.$$

Notre proposition dans le cas $n = 2$ provient de (5.21) en prenant $m = p + 1$. Notons χ_A la fonction indicatrice d'un ensemble A de \mathbb{F}_p et rappelons que, si A, B sont des sous-ensembles de \mathbb{F}_p , on a $\chi_A(x)\chi_B(x) = 1$ si et seulement si $x \in A \cap B$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz nous avons

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^m \text{card}(E \cap D_j) \right)^2 &= \left(\sum_{x \in E} \left(\sum_{j=1}^m \chi_{D_j}(x) \right) \right)^2 \\ &\leq (\text{card } E) \left(\sum_{x \in E} \left(\sum_{j=1}^m \chi_{D_j}(x) \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{x \in E} \left(\sum_{j=1}^m \chi_{D_j}(x) \right)^2 = \sum_{x \in E} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \chi_{D_i}(x) \chi_{D_j}(x) \leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \text{card}(D_i \cap D_j).$$

Nous déduisons des deux inégalités précédentes

$$\sum_{j=1}^m \text{card}(E \cap D_j) \leq \text{card}(E)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \text{card}(D_j \cap D_k) \right)^{1/2}.$$

On en déduit, puisque $m \leq p + 1$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}pm &\leq \sum_{j=1}^m \text{card}(E \cap D_j) \leq \text{card}(E)^{1/2} \left(\sum_{j,k} \text{card}(D_j \cap D_k) \right)^{1/2} \\ &= \text{card}(E)^{1/2} (m(m+p-1))^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2}(\text{card}(E)^{1/2}(mp)^{1/2}). \end{aligned}$$

La dernière égalité vient du fait que deux droites D_j et D_k s'intersectent en un unique point et donc

$$\begin{aligned} \sum_{j,k} \text{card}(D_j \cap D_k) &= \sum_{j=1}^m \text{card}(D_j \cap D_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{k \neq j} \text{card}(D_j \cap D_k) \\ &= mp + m(m-1) = m(m+p-1). \end{aligned}$$

On peut alors facilement conclure.

On suppose maintenant que $n \geq 3$. On se donne un nombre positif μ et on dit qu'une droite D_k est une droite de haute multiplicité si pour au moins $p/2$ points x sur les p points de D_k , l'ensemble $\{j; x \in D_j\}$ est de cardinal $\geq \mu + 1$. On distingue alors deux cas.

(i) Il n'existe pas de droite de haute multiplicité. On considère l'ensemble F des points x de E qui appartiennent à moins de μ droites D_j . Alors, F intersecte chaque D_j en au moins $p/2$ points (sinon, par passage au complémentaire, il existerait une droite de haute multiplicité). Il s'ensuit

$$\text{card}(E) \geq \text{card}(F) \geq \mu^{-1} \sum_j \text{card}(F \cap D_j) \geq C^{-1} \mu^{-1} pp^{n-1}.$$

La dernière inégalité vient du fait qu'il y a $\frac{p^n-1}{p-1} \approx p^{n-1}$ droites D_j contenues dans E .

(ii) Il existe une droite de haute multiplicité D_k . L'idée est de se ramener en dimension 2 (et donc au premier cas) en considérant l'ensemble (P_i) des plans qui contiennent D_k . Il y a au moins $(\mu p)/2$ droites D_j , $j \neq k$, qui intersectent D_k . Chacune d'elle est contenue dans un unique P_i et contient $p-1$ points de P_i non contenus dans D_k . Soit \mathcal{L}_i l'ensemble des droites qui sont contenues dans un P_i donné. Alors, par (5.21), $\text{card}(E \cap P_i \cap (\mathbb{F}_p^n \setminus D_k)) \geq Cp \text{card}(\mathcal{L}_i)$. Les

ensembles $P_i \cap (\mathbb{F}_p^n \setminus D_k)$ sont disjoints et donc, en sommant en i , on obtient

$$\text{card}(E) \geq Cp \sum_i \text{card}(\mathcal{L}_i) \geq C \frac{p^2 \mu}{2}.$$

On peut conclure dans les deux cas que $\text{card}(E) \geq Cp^{(n+1)/2}$ en prenant μ de l'ordre de $p^{(n-2)/2}$. \square

Le point est que ce type d'argument peut être utilisé dans le cas euclidien si on remplace le cardinal par la mesure de Lebesgue et les droites par les « tubes de Kakeya ». Ainsi, Bourgain [6] a montré que si $(T_{e_j}^\delta)_{j=1}^M$ sont des tubes avec des directions qui sont δ -séparées et si $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble avec $\mathcal{L}^n(E \cap T_{e_j}^\delta) \geq \lambda \mathcal{L}^n(T_{e_j}^\delta)$ pour un $\lambda \geq 0$, alors

$$\mathcal{L}^n(E) \geq C \delta^{(n-1)/2} \lambda^{(n+1)/2} \sqrt{M}.$$

Il en déduit qu'il existe $\varepsilon(n) > 0$ (donné par récurrence) tel que la dimension de Hausdorff d'un ensemble de Besicovitch E dans \mathbb{R}^n est au moins $\frac{n+1}{2} + \varepsilon(n)$. Cette borne est une des meilleures connues en toute dimension. C'est cette approche de Bourgain qui a amené Wolff à considérer le cas des corps finis qui est à la fois techniquement plus simple mais pas très éloigné du cas euclidien. Voir [29] (en particulier, le chapitre 11) pour une discussion plus détaillée.

On va maintenant résoudre la conjecture de Kakeya dans le cas des corps finis en présentant la solution donnée par Dvir [9]. Malheureusement, cette solution n'a donné (pour le moment) aucune conséquence pour le cas euclidien. On commence par le résultat classique suivant.

Théorème 5.22. *Soit \mathbb{K} un corps et soit $d \geq 1$ un entier. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme non nul de degré au plus d , alors l'ensemble des zéros de P , c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{K} ; P(x) = 0\}$, est de cardinal au plus d . Réciproquement, si on se donne un ensemble $E \subset \mathbb{K}$ de cardinal au plus d , il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{K}[x]$ de degré au plus d qui s'annule sur E .*

Ce résultat dit que pour contrôler la taille d'un ensemble E sur un corps \mathbb{K} , il suffit de contrôler le degré d'un polynôme qui s'annule sur E . C'est cette idée très simple qui va nous servir.

Lemme 5.23. *Soit $E \subset \mathbb{F}_p$ un ensemble de cardinal $< \binom{n+d}{n}$ pour un certain $d > 0$. Alors, il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ de n variables, de degré $\leq d$ qui s'annule sur E .*

Démonstration. Soit V l'espace vectoriel des polynômes P dans $\mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ de degré $\leq d$. Alors, V est de dimension $\binom{n+d}{n}$. Or l'espace vectoriel \mathbb{F}_p^E des fonctions $f : E \rightarrow \mathbb{F}_p$ est de cardinal $p^{\text{card}(E)}$ et est donc de dimension $\text{card}(E) < \binom{n+d}{n}$ en tant qu'espace vectoriel sur \mathbb{F}_p . Il s'ensuit que l'application $P \mapsto (P(x))_{x \in E}$ de V dans \mathbb{F}_p^E n'est pas injective, ce qui permet de conclure. \square

Proposition 5.24. *Soit $P \in \mathbb{F}_p[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme de degré au plus $\text{card}(F) - 1$ qui s'annule sur un ensemble de Besicovitch E . Alors, P est le polynôme nul.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde et on suppose que P n'est pas nul. On peut alors écrire P sous la forme $P = \sum_{i=0}^d P_i$, où $0 \leq d \leq \text{card}(\mathbb{F}_p) - 1$ est le degré de P et P_i est la i -ième composante homogène de P . En particulier, P_d n'est pas nul. Notons aussi que comme P s'annule sur E , d lui-même ne peut pas être nul. Soit $v \in \mathbb{F}_p^n \setminus \{0\}$ une direction donnée. Comme E est un ensemble de Besicovitch, E contient une droite $D_v = \{x + tv : t \in \mathbb{F}_p\}$ pour un $x = x_v \in \mathbb{F}_p^n$. Donc $P(x_v + tv) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{F}_p$. Le membre de gauche est un polynôme en t de degré au plus $\text{card}(\mathbb{F}_p) - 1$, et donc est nul d'après le théorème 5.22. En particulier, le coefficient en t^d de ce polynôme, qui est $P_d(v)$, s'annule pour tout v . Donc P_d est nul sur \mathbb{F}_p^n . Ce qui donne la contradiction souhaitée. \square

On déduit du lemme et de la proposition le résultat suivant qui donne une solution au problème de Kakeya pour les corps finis.

Corollaire 5.25. *Tout ensemble de Besicovitch E dans \mathbb{F}_p^n est de cardinal $\geq \binom{\text{card}(\mathbb{F}_p) + n - 1}{n}$.*

Comme $\binom{\text{card}(\mathbb{F}_p) + n - 1}{n} = \frac{1}{n!} \text{card}(\mathbb{F}_p)^n + O_n(\text{card}(\mathbb{F}_p)^{n-1})$, on peut conclure que l'on a la conjecture 5.19 avec $c(n) = 1/n!$.

6. Quelques liens avec l'analyse harmonique

Une des premières applications des ensembles de Kakeya est à due à Fefferman [11]. Avant d'énoncer son résultat, on donne quelques définitions venant de l'analyse de Fourier. La classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^∞ telles que pour tous multi-indices α et β , la fonction $x \mapsto x^\alpha D^\beta f$ est bornée (rappelons que l'on note $D^\beta f = \partial^{\beta_1} / \partial x_1^{\beta_1} \dots \partial^{\beta_n} / \partial x_n^{\beta_n} f$). Par exemple, les fonctions C^∞ à support compact ou la fonction $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ sont dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on définit sa transformée de Fourier par

$$(6.1) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2i\pi\langle x, \xi \rangle} f(x) dx.$$

C'est aussi une fonction dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en les variables ξ . On a alors la formule de Fourier inverse :

$$(6.2) \quad f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

On peut étendre la notion de transformée de Fourier à toute fonction f dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et le théorème de Plancherel énonce que cette transformation est une isométrie de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^n)$ sur lui-même. Nous aurons aussi besoin de la notion de multiplicateur. Si $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, on définit un opérateur borné $T_m : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$, $f \mapsto T_m f$, en donnant la valeur de $\widehat{T_m f}$, qui détermine $T_m f$ d'après la formule de Plancherel :

$$(6.3) \quad \widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi) \widehat{f}(\xi).$$

Par le théorème de Plancherel, on a

$$\|T_m f\|_2 \leq \|m\|_\infty \|f\|_2.$$

En fait, la norme d'opérateur de T_m sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est $\|m\|_\infty$. On dit que m est le *multiplicateur de T_m* . On dit aussi qu'un opérateur T borné sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ est un *multiplicateur* si $T = T_m$ pour un certain $m \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si de plus T peut être prolongé en un opérateur borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$, on dit que T est un multiplicateur L^p .

Exemple 6.4. La transformée de Hilbert est formellement définie sur \mathbb{R} par

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

On voit clairement qu'il y a un problème d'intégration sur la diagonale. Si f est de classe C^1 à support compact, on peut définir Hf au sens de la *valeur principale* :

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Il est possible d'étendre la définition de H aux fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ en utilisant le multiplicateur $m(\xi) = -i \operatorname{sign}(\xi)$. Par un théorème de M. Riesz, H est un multiplicateur L^p . La transformée de Hilbert est l'exemple le plus simple d'*opérateur d'intégrales singulières*. Voir [8], chapitre 3.

Si on suppose que f n'est pas aussi régulière, on a toujours (6.2) mais au sens des distributions. Pour les applications, il est préférable d'avoir des versions plus quantitatives. Pour cela, on considère la famille d'opérateurs suivants (pour tout $R > 0$) :

$$(6.5) \quad S_R f(x) = \int_{\|\xi\| \leq R} e^{2i\pi \langle x, \xi \rangle} \widehat{f}(\xi) d\xi$$

et la question est la convergence (pour $R \rightarrow \infty$) des $S_R f$ vers f en norme $L^p(\mathbb{R}^n)$ par exemple. Par le théorème de Banach-Steinhaus, il suffit de montrer que les opérateurs S_R sont bornés sur $L^p(\mathbb{R}^n)$ uniformément en R . Par changement de variables, on peut montrer qu'il suffit de considérer le cas de S_1 . La question est donc l'existence d'une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, on ait $\|S_1 f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Comme $\widehat{S_1 f} = \chi_{B(0,1)} \widehat{f}$, ce problème est connu sous le nom de « problème du multiplicateur de la sphère ». L'opérateur S_1 joue le rôle de la transformée de Hilbert (voir l'exemple 6.4) dans \mathbb{R}^n et est utile pour traiter des problèmes sur les séries de Fourier de plusieurs variables et des problèmes de comportement au bord des fonctions analytiques en analyse complexe (dans \mathbb{C}^n). Si $p = 2$, la formule Plancherel donne une solution positive. Si $n = 1$, un résultat classique de Riesz donne

que S_1 est borné sur tout $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 < p < +\infty$. Ceci vient du fait que la transformée de Hilbert est un opérateur borné sur L^p (voir l'exemple 6.4). Cependant, Fefferman [11] a montré que ce sont les seuls cas positifs.

Théorème 6.6. *Si $n > 1$ et si $p \neq 2$, S_1 n'est pas borné sur $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. Nous suivons la preuve donnée dans [11] qui est un article court et très agréable à lire. Tout d'abord, il suffit de considérer le cas $n = 2$ (problème du multiplicateur du disque). En effet, d'après un théorème de Leeuw, la continuité sur L^p de S_1 dans \mathbb{R}^n entraîne la même continuité dans \mathbb{R}^{n-1} . D'autre part, par dualité, il suffit de considérer le cas $p > 2$. La preuve repose sur deux lemmes. Le premier est dû à Yves Meyer, le second utilise une construction analogue à celle d'un ensemble de Kakeya comme esquissée au paragraphe 2. On fixe dans la suite $p > 2$.

Lemme 6.7. *On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que $\|S_1 f\|_p \leq C \|f\|_p$. Soit (v_j) une suite de vecteurs unitaires de \mathbb{R}^2 et, pour tout $j \in \mathbb{N}$, soit H_j le demi-plan $\{x \in \mathbb{R}^2 ; \langle x, v_j \rangle \geq 0\}$. On définit une suite d'opérateurs (T_j) par la relation $\widehat{T_j f}(\xi) = \chi_{H_j}(\xi) \widehat{f}(\xi)$. Alors, il existe une constante $C > 0$ telle pour toute suite (f_j) de fonctions, on a*

$$\left\| \left(\sum_j |T_j f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Pour utiliser la continuité de S_1 , l'idée de la preuve est d'approximer H_j par des disques $D(rv_j, r)$ et donc T_j par des opérateurs T_j^r avec $\widehat{T_j^r f}(\xi) = \chi_{D(rv_j, r)}(\xi) \widehat{f}(\xi)$. En fait, si f est C^∞ à support compact dans \mathbb{R}^2 , on a $T_j f(x) = \lim_{r \rightarrow +\infty} T_j^r f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^2$. Par le lemme de Fatou, on peut en déduire qu'il suffit de démontrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de r telle que

$$\left\| \left(\sum_j |T_j^r f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

En utilisant des dilatations de \mathbb{R}^2 , il suffit de considérer le cas $r = 1$. Dans ce cas, $T_j^1 f(x) = e^{i\langle x, v_j \rangle} S_1(e^{-i\langle y, v_j \rangle} f(y))$ et donc il suffit de

contrôler la quantité

$$B = \left\| \left(\sum_j |S_1(e^{i\langle x, v_j \rangle} f_j(y))|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

En utilisant la continuité de S_1 et des résultats sur les fonctions de Rademacher (voir plus loin), il vient

$$(6.8) \quad \left\| \left(\sum_j |S_1 f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leq C \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

On peut alors conclure puisqu'on en déduit que B est dominé par

$$C \left\| \left(\sum_j |e^{i\langle y, v_j \rangle} f_j(y)|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = C \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p.$$

Soit R un rectangle dans \mathbb{R}^2 . On note v_R le vecteur donnant la direction du plus grand côté (que l'on note a_R) de R . On note \tilde{R} la réunion des deux rectangles obtenus par translation de R de longueur a_R dans les directions v_R et $-v_R$ respectivement. Voir la figure 9.

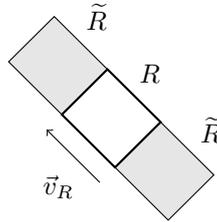


FIGURE 9. Le rectangle R (en blanc) et les deux rectangles qui forment \tilde{R} (en gris)

Lemme 6.9. Soit $\eta > 0$. Il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ et une famille de rectangles deux à deux disjoints (R_j) tels que

- (i) Pour tout j , au moins un dixième de l'aire de \tilde{R}_j est dans E ;
- (ii) $\mathcal{L}^2(E) \leq \eta \sum_j \mathcal{L}^2(R_j)$.

La construction de E suit une stratégie analogue à celle d'un ensemble de Kakeya. L'étape initiale (qui remplace l'étape 1 de la figure 2) est la suivante. Soit T un triangle de sommets ABC et de

hauteur h . Soit $h' > h$. On prolonge AC et BC pour obtenir des points A' et B' respectivement de hauteur h' . Soit D le milieu de $[A, B]$. On considère alors les triangles T' de sommets ADA' et T'' de sommets BDB' .

On se donne maintenant une suite croissante de hauteurs (h_j) définies par

$$h_j = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\sum_{k=0}^j \frac{1}{k+1} \right).$$

On considère un triangle équilatéral T_0 de base l'intervalle unité $[0, 1]$ de l'axe réel. Sa hauteur est alors h_0 . On se donne $k \in \mathbb{N}^*$ à choisir plus tard. On applique l'étape initiale pour obtenir deux triangles T_1^1 et T_1^2 de hauteurs h_1 , de bases respectives $[0, 1/2]$ et $[1/2, 1]$. Puis on applique l'étape initiale à chaque T_1^1 et T_1^2 pour obtenir 4 triangles T_2^1, T_2^2, T_2^3 et T_2^4 de hauteur h_2 . On itère cette construction jusqu'à obtenir 2^k triangles $T_k^1, \dots, T_k^{2^k}$ de hauteur h_k . Les bases de ces triangles sont des intervalles dyadiques I_k^j (avec $j = 1, \dots, 2^k$) de $[0, 1]$ de longueur 2^{-k} . On note $E = \bigcup_{j=1}^{2^k} T_k^j$. On associe à chaque T_k^j un rectangle $R(T_k^j)$ de la façon décrite sur la figure 10.

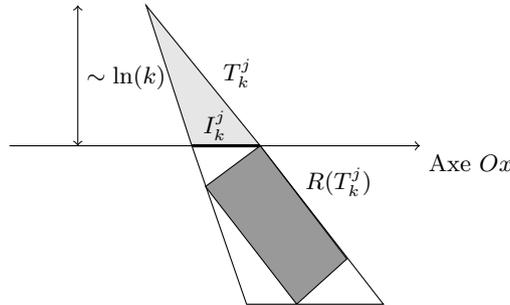


FIGURE 10. Construction du rectangle $R(T_k^j)$ (en noir) à partir du triangle T_k^j (en gris).

Un premier point (pas facile) est que $\mathcal{L}^2(E) \leq 17$. Or

$$\sum_{j=1}^{2^k} \mathcal{L}^2(R(T_k^j)) \sim \log(k).$$

Donc on a (ii) si k est assez grand. (i) est immédiat par construction des rectangles $R(T_k^j)$ puisque $T_k^j \subset E$ pour tout j . Enfin, le fait que les rectangles $R(T_k^j)$ soient deux à deux disjoints vient d'arguments de géométrie élémentaire (voir [11]).

Nous pouvons alors démontrer le théorème. Soit E le sous-ensemble de \mathbb{R}^n et soit (R_j) la famille des rectangles donnés par le lemme 6.9. On pose $f_j = \chi_{B_j}$ et on note v_j la direction du plus grand côté de R_j (comme sur la figure 9). On a alors $|T_j f_j| \geq 1/2$ sur \tilde{R}_j et donc

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_j |T_j f_j(x)|^2 \right) dx &= \sum_j \int_E |T_j f_j(x)|^2 dx \geq 1/4 \sum_j \mathcal{L}^2(E \cap \tilde{R}_j) \\ &\geq 1/40 \sum_j \mathcal{L}^2(\tilde{R}_j) = 1/20 \sum_j \mathcal{L}^2(R_j). \end{aligned}$$

D'un autre côté, d'après le lemme 6.9 appliqué à $\eta > 0$ et aux v_j , on a, par les inégalités de Hölder

$$\begin{aligned} \int_E \left(\sum_j |T_j f_j(x)|^2 \right) dx &\leq \mathcal{L}^2(E)^{(p-2)/p} \left\| \left(\sum_j |T_j f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^2 \\ &\leq C \mathcal{L}^2(E)^{(p-2)/p} \left\| \left(\sum_j |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^2 \\ &= C \mathcal{L}^2(E)^{(p-2)/p} \left(\sum_j \mathcal{L}^2(R_j) \right)^{2/p} \\ &\leq C \eta^{(p-2)/p} \sum_j \mathcal{L}^2(R_j). \end{aligned}$$

Puisque $p > 2$, si on prend η assez petit, on obtient une contradiction entre les deux calculs précédents. (Une autre présentation de la preuve peut être trouvée dans [28].) \square

Fonctions de Rademacher. Donnons quelques détails sur l'inégalité (6.8). Soit (Ω, \mathcal{B}) un espace mesurable muni d'une mesure de probabilité P . Des fonctions de Rademacher (ou variables de Rademacher) r_1, \dots, r_n sont des variables aléatoires indépendantes sur (Ω, \mathcal{B}, P) qui valent $+1$ ou -1 avec probabilité $1/2$. L'exemple classique est de considérer $\Omega = [0, 1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, puis de poser $r_j(t) = \text{signe}[\sin(2^j \pi t)]$. Soit F_n l'espace

de dimension n engendré par les r_1, \dots, r_n . On définit deux normes sur F_n de la façon suivante :

$$\|f\|_1 = \int_{\Omega} |f(\omega)| dP(\omega), \quad \|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(\omega)|^2 dP(\omega) \right)^{1/2}.$$

Si on note E l'espérance, on a ainsi

$$\|f\|_1 = E(|f|) \quad \text{et} \quad \|f\|_2 = E(|f|^2)^{1/2}.$$

Le point-clé est l'inégalité de Khintchine qui s'énonce ainsi pour $f \in F_n$:

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2 \leq \sqrt{e} \|f\|_1.$$

L'inégalité de gauche est une conséquence triviale de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Voir [25] pour une preuve de l'autre inégalité.

Il existe une version banachique due à Jean-Pierre Kahane. Pour cela, considérons $\Omega = \{-1, +1\}^N$. On note ε_n la n -ième coordonnée sur cet espace et P la probabilité uniforme sur Ω muni de la tribu engendrée par les $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ qui est donc une suite de variables aléatoires indépendantes équidistribués sur (Ω, P) prenant les valeurs $+/-1$ avec probabilité $1/2$. Alors, si on note $\|\cdot\|_p$ la norme de l'espace $L^p(\Omega, P)$ et si $0 < p < q < \infty$, il existe une constante positive $C_{p,q}$ telle que pour toute suite finie x_1, \dots, x_N dans un espace de Banach E (muni d'une norme $\|\cdot\|$),

$$(6.10) \quad \left(\int \left\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \right\|^q dP \right)^{1/q} \leq C_{p,q} \left(\int \left\| \sum_{j=1}^N \varepsilon_j x_j \right\|^p dP \right)^{1/p}.$$

On déduit alors de l'inégalité de Khitchine-Kahane le résultat suivant qui donne l'inégalité (6.8). Voir le dernier chapitre de [14].

Théorème 6.11. *Soit T une application linéaire continue entre les espaces $L^p(X, \mu)$ et $L^p(Y, \nu)$ où $1 \leq p < \infty$. Alors, il existe une constante positive C_p qui ne dépend que de p et de $\|T\|$ telle que pour toute suite finie f_1, \dots, f_N dans $L^p(X, \mu)$, on a*

$$(6.12) \quad \left\| \left(\sum_{j=1}^N |Tf_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(Y, \nu)} \leq C_p \left\| \left(\sum_{j=1}^N |f_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p(X, \mu)}.$$

Quelques interactions

On décrit maintenant de façon informelle les interactions entre la conjecture de Kakeya et d'autres problèmes bien connus (et toujours ouverts) en analyse harmonique en en EDP. En particulier, on ne précisera pas toujours les espaces fonctionnels considérés.

Le problème de restriction. Soit σ la mesure de surface sur la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n et soit f une fonction bornée sur la sphère S^{n-1} . Existe-t-il une inégalité de la forme

$$(6.13) \quad \|\widehat{fd\sigma}\|_p \leq C_p \|f\|_{L^p(d\sigma)}$$

pour tout $p > 2n/(n - 1)$? Dans le cas où $f = 1$, le résultat est clair (calcul par les fonctions de Bessel). Ce problème est lié à l'étude de la restriction de la transformée de Fourier à des hypersurfaces de \mathbb{R}^n .

Le problème de Bochner-Riesz. Soit m_ε une fonction plateau dans un ε -voisinage de la sphère unité S^{n-1} de \mathbb{R}^n , c'est-à-dire $m_\varepsilon(\xi) = \phi(\varepsilon^{-1}(1 - \|\xi\|))$, où $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support dans $] - 1/2, 1/2[$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et $p \in \left[\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1} \right]$, existe-t-il C_ε telle que l'on ait

$$(6.14) \quad \|T_{m_\varepsilon} f\|_p \leq C_\varepsilon \delta^\varepsilon \|f\|_p ?$$

L'exemple-type est de modifier le multiplicateur S_1 de sorte que le contre-exemple de Fefferman ne marche plus. Pour cela, on peut considérer S_1^ε défini par

$$\widehat{S_1^\varepsilon f}(\xi) = (1 - \|\xi\|^2)^\varepsilon \chi_{B(0,1)} \widehat{f}(\xi).$$

Le cas $n = 2$ a été résolu par Carleson et Sjölin. Le cas général est largement ouvert.

Conjecture de régularisation locale pour l'équation des ondes

Soit u la solution avec donnée initiale f de l'équation des ondes dans \mathbb{R}^n :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u(x, t) = 0, \quad u(., 0) = f, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(., 0) = 0.$$

La solution est donnée par $u(x, t) = \cos(t\sqrt{-\Delta})f(x)$. Le lien avec le multiplicateur du disque (dans le cas $n = 2$) est donné par

$$S_1 f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} \cos(t\sqrt{-\Delta})f(x) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi t)}{\pi t} u(x, t) dt.$$

Des estimations d'énergie et de dissipation permettent de démontrer des inégalités de type Strichartz (dans le cas $n = 3$ par exemple) :

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^{3+1})} \leq C \|(\sqrt{-\Delta})^{1/2} f\|_2.$$

Ici,

$$\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R})}^4 = \int_{x \in \mathbb{R}^3} \int_{t \in \mathbb{R}} |u(x, t)|^4 dx dt.$$

Le point est que l'on a besoin de régularité pour le membre de droite et donc pour f . Cependant, Wolff a démontré que, si $n > 1$ et $p > 2$, il n'est pas possible d'avoir l'estimation suivante pour f bornée sur la boule unité de \mathbb{R}^n :

$$\|u\|_{L^p([1,2] \times \mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_\infty$$

Que se passe-t-il si on relaxe un peu la régularité de f ? Ceci amène à la question suivante (due à Sogge).

Pour tout $\varepsilon > 0$, existe-t-il une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que

$$(6.15) \quad \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n \times [1,2])} \leq C_\varepsilon \|f\|_{\varepsilon,p} ?$$

Ici, $\|f\|_{\varepsilon,p}$ est la norme non homogène dans l'espace de Sobolev $W^{\varepsilon,p}(\mathbb{R}^n)$. Le point-clé est qu'on a la liste d'implications suivante

$$(6.15) \implies (6.14) \implies (6.13) \implies (5.11)$$

Donc, résoudre une des trois questions précédentes permet de résoudre le problème de Keakeya! Évidemment, les ensembles de Keakeya permettent de construire des contre-exemples comme dans le théorème de Fefferman. Ainsi, un contre-exemple à la conjecture de Keakeya donne un contre-exemple à la conjecture de Bochner-Riesz (d'où le sens $(6.14) \implies (5.11)$). Cependant Bourgain a montré que, d'un autre côté, si on a de bonnes estimations pour le problème de Keakeya (dans le cas de la fonction maximale), on a de bonnes estimations pour l'équation des ondes. Ceci vient du fait que les solutions u de l'équation des ondes peuvent être décomposées comme des paquets d'ondes qui sont localisés dans des tubes de Keakeya.

Pour plus de détails sur cette partie et des liens avec d'autres domaines des mathématiques, voir les survols [28] et [16], ou pour des preuves voir [29] ou l'énorme livre [27].

Références

- [1] A. S. BESICOVITCH – « Sur deux questions d'intégrabilité des fonctions », *J. Soc. Phys.-Math. (Perm)* **2** (1919), p. 105–123.
- [2] ———, « On Kakeya problem and a similar one », *Math. Z.* **27** (1928), p. 312–320.
- [3] ———, « The Kakeya problem », *Amer. Math. Monthly* **70** (1963), p. 697–708.
- [4] ———, « On fundamental geometric properties of plane line-sets », *J. London Math. Soc.* **39** (1964), p. 441–448.
- [5] V. BORRELLI & J.-L. RULLIÈRE – *En cheminant avec Kakeya, voyage au cœur des mathématiques*, ENS Éditions, Lyon, 2014, http://catalogue-editions.ens-lyon.fr/html/WYSIWYGfiles/files/349_Borrelli_pdf%20WEB.pdf.
- [6] J. BOURGAIN – « Besicovitch type maximal operators and applications to Fourier analysis », *Geom. Funct. Anal.* **1** (1991), p. 147–187.
- [7] F. CUNNINGHAM – « The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets », *Amer. Math. Monthly* **78** (1971), p. 114–129.
- [8] J. DUOANDIKOETXEA – *Fourier analysis*, Graduate Studies in Math., vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [9] Z. DVIR – « On the size of Kakeya sets in finite fields », *J. Amer. Math. Soc.* **22** (2009), no. 4, p. 1093–1097.
- [10] K. J. FALCONER – *The geometry of fractal sets*, Cambridge Tracts in Math., vol. 85, Cambridge University Press, 1986.
- [11] C. FEFFERMAN – « The multiplier problem for the ball », *Ann. of Math.* **94** (1971), p. 330–336.
- [12] J. HEINONEN – *Lectures on analysis on metric spaces*, Springer, 2001.
- [13] A. IOSEVICH – *A view from the top : analysis, combinatorics and number theory*, Student Math. Library, vol. 39, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.
- [14] J.-P. KAHANE – *Some random series of functions*, Cambridge Studies in Advanced Math., Cambridge University Press, 1985.
- [15] S. KAKEYA – « Some problems on minima and maxima regarding ovals », *Tôkohu Science Reports* **6** (1917), p. 71–88.
- [16] I. LABA – « From harmonic analysis to arithmetic combinatorics », *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **45** (2008), p. 77–115.
- [17] A. LEMENANT – « Initiation à la fonctionnelle de Mumford-Shah », in *Une invitation à la théorie géométrique de la mesure*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2017, ce volume.
- [18] F. LIRET – *Arithmétique*, Dunod, Paris, 2011.
- [19] P. MATTILA – *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, Cambridge Studies in advanced Math., vol. 44, Cambridge University Press, 1995.
- [20] ———, « Hausdorff dimension, projections, and the Fourier transform », *Publ. Mat.* **48** (2004), no. 1, p. 3–48.
- [21] ———, *Fourier analysis and Hausdorff dimension*, Cambridge Studies in advanced Math., vol. 150, Cambridge University Press, 2015.
- [22] H. PAJOT – *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and Cauchy integral*, Lect. Notes in Math., vol. 1799, Springer, Berlin-Heidelberg, 2002.

- [23] H. PAJOT & E. RUSS – *Analyse dans les espaces métriques*, Savoirs Actuels, EDP Sciences, Les Ulis ; CNRS Éditions, Paris, 2018.
- [24] Y. PERES, K. SIMON & B. SOLOMYAK – « Fractals with positive length and zero Buffon needle probability », *Amer. Math. Monthly* **110** (2003), no. 4, p. 314–325.
- [25] H. QUEFFÉLEC & C. ZUILY – *Analyse pour l'agrégation*, Dunod, Paris, 2013.
- [26] E. RUSS – « Inégalités isopérimétriques et isodiamétriques », in *Une invitation à la théorie géométrique de la mesure*, Journées X-UPS, Les Éditions de l'École polytechnique, Palaiseau, 2017, ce volume.
- [27] E. M. STEIN – *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, Princeton Math. Series, vol. 43, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [28] T. TAO – « From rotating needles to stability of waves : emerging connections between combinatorics, analysis and PDE », *Notices Amer. Math. Soc.* **48** (2001), no. 3, p. 294–303.
- [29] T. H. WOLFF – *Lectures on harmonic analysis*, University Lecture Series, vol. 29, American Mathematical Society, Princeton, NJ, 2003.

Hervé Pajot, Université Grenoble Alpes, CNRS UMR 5582, 100 rue des mathématiques, 38610 Gières, France

E-mail : herve.pajot@univ-grenoble-alpes.fr

Url : <https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~pajot/>