Journées mathématiques X-UPS

Année 2018

Heisenberg et son groupe

Olivier SCHIFFMANN

Algèbre de Heisenberg et espaces de Fock

Journées mathématiques X-UPS (2018), p. 87-123.
https://doi.org/10.5802/xups.2018-03

Les Éditions de l'École polytechnique
Route de Saclay
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://www.editions.polytechnique.fr

Centre de mathématiques Laurent Schwartz
CMLS, École polytechnique, CNRS,
Institut polytechnique de Paris
F-91128 PALAISEAU CEDEX
https://portail.polytechnique.edu/cmls/

Publication membre du
Centre Mersenne pour l'édition scientifique ouverte
www.centre-mersenne.org

Journées mathématiques X-UPS
2018, p. 87–123 doi: 10.5802/xups.2018-03

ALGÈBRE DE HEISENBERG ET ESPACES DE FOCK

par

Olivier Schiffmann

Résumé. L'espace de Fock, introduit en mécanique quantique dans les années 1930, est une modélisation d'un système quantique contenant un nombre arbitraire de particules non distinguables dont les états prennent valeur dans un espace de Hilbert (séparable, de sorte que ces états sont paramétrés par un entier). D'un point de vue mathématique, c'est une représentation de l'algèbre de Lie de Heisenberg, une algèbre de Lie de dimension infinie ; dans un sens que nous préciserons, c'est même l'unique représentation (irréductible) de cette algèbre de Lie. Cela a des conséquences importantes : par exemple, l'espace de Fock construit à partir de bosons (particules pouvant être à plusieurs dans le même état quantique) est isomorphe à celui construit à partir de fermions (particules ne pouvant occuper à plusieurs le même état quantique) : c'est la correspondance bosons-fermions.

Table des matières

Publication originelle dans Journées X-UPS 2018. Heisenberg et son groupe. Éditions de l'École polytechnique, 2018.

1. Introduction

L'algèbre de Heisenberg est l'algèbre de Lie de dimension infinie la plus simple ; c'est aussi celle qui apparaît le plus souvent, aussi bien en physique théorique qu'en mathématiques (en combinatoire, en théorie des représentations et plus récemment en géométrie algébrique). Sa théorie des représentations est remarquablement simple : elle ne possède, à isomorphisme près, qu'une seule représentation (de plus haut poids fixé, cf. paragraphe 5) : *l'espace de Fock*. Cet espace, introduit par V.A. Fock dans les années 1930 pour mathématiser certaines théories de la physique quantique, admet quantité d'interprétations et de constructions, parmi lesquels le modèle dit *bosonique* et le modèle dit *fermionique*. L'isomorphisme entre les deux, *la correspondance de bosons-fermions*, est particulièrement important et peut être décrit explicitement de façon combinatoire en termes de polynômes symétriques.

L'algèbre de Virasoro est sans nulle doute la seconde algèbre de Lie de dimension infinie la plus importante, juste derrière l'algèbre de Heisenberg. Elle s'interprète comme l'algèbre de Lie des changement infinitésimaux de coordonnées (en dimension 1 complexe), et est donc naturellement présente dans tout modèle de physique théorique *géométrique*, i.e., indépendant d'un choix particulier de coordonnées. C'est un fait remarquable et profond que ces deux algèbres sont intimement liées (et peuvent être combinées en une seule algèbre de Lie, dite de *Virasoro-Heisenberg*) ; en particulier, l'algèbre de Virasoro opère naturellement dans l'espace de Fock, via la construction de *Sugawara.*

Dans ces notes, nous introduisons l'algèbre de Heisenberg et construisons en détail les espaces de Fock bosonique et fermionique. Nous énonçons la correspondance bosons-fermions, et terminons par un bref paragraphe concernant l'algèbre de Virasoro, et son action sur ces mêmes espaces de Fock.

2. Motivations historiques

2.1. Mécanique quantique et relations de Heisenberg

Commençons par quelques très brefs mots concernant les principes et différences entre mécanique classique et mécanique quantique. La mécanique classique se base sur un espace de phase géométrique souvent modélisé par une variété différentiable $\mathcal{M}$ — par exemple l'espace total du fibré (co)tangent T^*X d'une variété lisse X, ce qui permet de paramétrer simultanément la position x d'une particule et son moment p. Les quantités que l'on peut mesurer (les *observables*, tels que x et p) sont naturellement des *fonctions* (réelles ou complexes) sur $\mathcal{M}$. On peut décrire l'évolution dans le temps de la position de la particule ou plus généralement d'un observable du système par une famille d'équations différentielles. La mécanique quantique, elle, suggère une autre approche, où l'aspect géométrique est moins visible et où les observables ne sont plus des fonctions mais des *opérateurs.* Elle se base sur un modèle probabiliste, dans lequel un état du système est décrit par l'ensemble des probabilités de valeurs des observables. Par exemple, la distribution du nombre d'électrons dans un nuage autour du noyau d'un atome se code par une mesure de probabilité sur l'ensemble (discrets) des niveaux d'énergie. Cette description probabiliste permet de *superposer* des états (en additionnant les probabilités), ce qui explique le caractère linéaire de l'espace des états du système. De fait, l'espace de phase de la mécanique classique est remplacé par un *espace de Hilbert* $\mathcal{H}$. Un observable est maintenant un opérateur (hermitien, souvent borné) $a \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$; le spectre $\mathrm{Sp}(a) = \{\Psi_i\}$ de a est l'ensemble des « valeurs » possibles de l'observable. À un état $u \in \mathcal{H}$ on peut associer sa décomposition comme combinaison linéaire de vecteurs propres

$$u = \sum_i c_i |\psi_i\rangle, \qquad c_i \in \mathbb{C},$$

où $|\Psi_i\rangle$ désigne un vecteur propre de a de valeur propre Ψ_i. Après renormalisation, les nombres $|c_i|$ donnent la probabilité que l'observable a prenne la valeur Ψ_i dans l'état u. Les états *purs* associés à a — les états dans lesquels la valeur de a est totalement déterminée — sont ainsi les vecteurs propres $|\Psi_i\rangle$ eux-mêmes. Bien sûr, les états purs d'un observable ne sont pas toujours ceux d'un autre ! Ceci permet de donner un sens mathématique au *principe d'indétermination* ou *d'incertitude* de Heisenberg : il se peut que l'on ne puisse pas connaître précisément, pour le même état, les valeurs de deux observables a, a'. C'est notamment le cas si, en tant qu'opérateurs, a et a' ne commutent pas. L'exemple le plus fameux est celui des observables position et moment $\widehat{x}$ et $\widehat{p}$, qui satisfont à la relation de Heisenberg

$$\widehat{x}\widehat{p} - \widehat{p}\widehat{x} = i\hbar\,\mathrm{Id}\,. \tag{2.1}$$

Ceci nous amène naturellement à la question suivante : *peut-on classifier, à isomorphisme près, tous les triplets* $(\mathcal{H}, \widehat{x}, \widehat{p})$ *formés d'un espace de Hilbert et de deux opérateurs hermitiens satisfaisant à la relation (*2.1*) ?*

2.2. Bosons, fermions et les opérateurs de création/annihilation. Il existe une autre incarnation physique des relations de commutation (2.1), en tant que relations satisfaites par des opérateurs de création et d'annihilation. Nous décrivons succinctement ici les deux modèles les plus simples dans lesquels ces relations apparaissent, et nous renvoyons le lecteur aux paragraphes 6.1 et 6.2 pour plus de détails.

(i) *Le modèle bosonique.* Il s'agit d'un système quantique formé d'un nombre fini de particules (les *bosons*) pouvant chacune avoir un niveau d'énergie positif (renormalisé à un entier $1, 2, \dots$) et pouvant occuper à plusieurs le même niveau d'énergie. Un état est donc décrit par une superposition (i.e., combinaison linéaire) d'états

$$|(n_1, n_2, \dots)\rangle,$$

où l'entier n_i indique le nombre de bosons au niveau i (et où $n_i = 0$ pour $i \gg 0$). On a ainsi l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_b = \bigoplus_{n_1, n_2, \dots} \mathbb{C}|(n_1, n_2 \dots)\rangle.$$

Notons qu'il n'est nul besoin ici de compléter $\mathcal{H}$: nous le considérons comme un espace de Hilbert gradué (par le niveau total d'énergie $\sum_i in_i$) et chaque composante de niveau fixé est de dimension finie. On pose $|0\rangle = |(0, 0, \dots)\rangle$ (le vecteur *vide*). On introduit deux types d'opérateurs : les opérateurs b_{-i}, $i \geqslant 1$ qui « ajoutent une particule de niveau d'énergie i » et b_i, $i \geqslant 1$ qui « enlèvent une particule de niveau d'énergie i ». Ainsi, on a par exemple

$$\begin{aligned} b_{-1} \cdot |(n_1, n_2, \dots)\rangle &= |(n_1 + 1, n_2, \dots)\rangle, \\ b_1 \cdot |(n_1, n_2, \dots)\rangle &= n_1 |(n_1 - 1, n_2, \dots)\rangle. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que les opérateurs $b_{\pm i}$ satisfont aux relations

$$[b_i, b_i] = 0 \text{ si } i \neq -j, \qquad [b_i, b_{-i}] = \mathrm{Id} \text{ si } i \geqslant 1. \tag{2.2}$$

Notons que les $b_{\pm i}$ sont ici des opérateurs de transformation du système, et non pas des observables (en particulier, il n'est nullement question de les diagonaliser). L'espace de Hilbert $\mathcal{H}_b$ muni des opérateurs $b_{\pm i}$ est appelé *espace de Fock bosonique.*

(ii) *Le modèle fermionique.* Il s'agit maintenant d'un système quantique formé de particules (les *fermions*) pouvant occuper un niveau d'énergie positif ou négatif, mais ne pouvant se trouver qu'à au plus une particule par niveau (principe d'exclusion). On suppose aussi que les niveaux d'énergie suffisamment grands sont vides. L'espace de Hilbert à considérer est ainsi

$$\mathcal{H}'_f = \bigoplus_{i_1 > i_2 > \cdots} \mathbb{C}|\{i_1, i_2, \dots\}\rangle,$$

où $|\{i_1, i_2, \dots\}\rangle$ désigne l'état dans lequel les niveaux $i_1, i_2, \dots$ sont occupés. Pour éviter de devoir considérer des états à énergie négative, Dirac postule que l'état « vide » correspond à l'état dans lequel tous les niveaux d'énergie négatifs ou nuls sont occupés — c'est la *mer de Dirac* :

$$|0\rangle = |\{0, -1, -2, \dots\}\rangle.$$

On considère alors les opérateurs[1] b_{-i}, $i \geqslant 1$ qui « excitent » un fermion en augmentant (si possible, i.e., si la place est libre) son niveau d'énergie de i, et des opérateurs b_i, $i \geqslant 1$ qui « dé-excitent » un fermion en baissant (là encore, si possible) son niveau d'énergie de i. On peut vérifier que

$$[b_i, b_i] = 0 \text{ si } i \neq -j, \qquad [b_i, b_{-i}] = i\,\mathrm{Id} \text{ si } i \geqslant 1.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned} b_{-i}|0\rangle &= |\{i, -1, -2, \dots\}\rangle + |\{i-1, 0, -2, \dots\}\rangle + \cdots \\ &\qquad + |\{1, 0, \dots, 1-i, -1-i, \dots\}\rangle \\ b_i|0\rangle &= 0 \\ \text{et} \quad b_i b_{-i}|0\rangle &= |\{0, -1, \dots\}\rangle + \cdots + |\{0, -1, \dots\}\rangle = i|0\rangle. \end{aligned}$$

Bien sûr, il suffit d'effectuer la renormalisation $b_i \mapsto b_i/i$ pour $i \geqslant 1$ pour retrouver exactement les mêmes relations de commutations (2.2) que dans le cas bosonique.

On note $\mathcal{H}_f$ le sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}'_f$ engendré par le vecteur $|0\rangle$ sous l'action itérée des opérateurs b_i, b_{-i} pour $i \in \mathbb{N}$. C'est l'*espace de Fock fermionique*.

La question se pose maintenant : *peut-on classifier les uplets* $(\mathcal{H}, b_i, b_{-i} \mid i \geqslant 1)$ *formés d'un espace de Hilbert et d'une famille d'opérateurs* $b_{\pm i}$ *satisfaisant aux relations de commutation (*2.2*) ?*

[1] Il faut, ici, faire attention à des questions de signes que nous passerons sous silence — cf. paragraphe 6.2.

Comme on le verra, la réponse est « oui » sous certaines hypothèses naturelles (satisfaites en particulier par les espaces de Fock bosoniques et fermionique). On déduira même de ce résultat de classification abstrait l'existence d'un (unique) isomorphisme $\mathcal{H}_c \simeq \mathcal{H}_f$ envoyant le vecteur vide sur le vecteur vide et commutant aux opérateurs de création et annihilation $b_{\pm i}$! C'est la correspondance bosons-fermions.

3. L'algèbre de Heisenberg et l'algèbre de Weyl

3.1. Groupes et algèbres de Lie. Rappelons rapidement le contexte dans lequel nous nous placerons. Un *groupe de Lie* est une variété différentielle (réelle ou complexe) G munie d'applications lisses (i.e., C^∞)

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G, \\ (f,g) &\longmapsto fg, \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \iota : G &\longrightarrow G, \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

induisant sur G une structure de groupe, c'est-à-dire satisfaisant aux relations usuelles d'associativité et d'inverse. Par exemple, les composées $\mu(\mu \times \mathrm{Id})$ et $\mu(\mathrm{Id} \times \mu) : G \times G \times G \to G$ sont égales, et la composée $\mu(\iota \times \mathrm{Id})\Delta : G \to G$ est égale à l'identité, où $\Delta : G \to G \times G$ désigne le plongement diagonal $\Delta(g) = (g,g)$. Nous noterons $e \in G$ l'élément unité. La plupart des groupes de matrices sont de façon naturelle des groupes de Lie : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathrm{SL}(n,\mathbb{C}), \mathrm{O}_n(\mathbb{C}), \dots$ Par définition, une représentation (de dimension finie) d'un groupe de Lie G est une paire (V,ρ) où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ est un morphisme de groupe et une application C^∞. Ici $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ suivant que G est réel ou complexe. Un morphisme entre deux représentations $(V,\rho), (V\,\rho')$ de G est une application linéaire $\sigma : V \to V'$ telle que

$$\sigma\rho(g) = \rho'(g)\sigma, \qquad \forall g \in G$$

autrement dit une application linéaire $V \to V'$ compatible avec les actions de G sur V et V'. Un morphisme de représentations $\sigma : V \to V'$ inversible est un isomorphisme. Même si c'est quelque peu réducteur, on peut dire que le but premier de la théorie des représentations est de construire et de classifier, à isomorphisme près, toutes les représentations des groupes.

La théorie des algèbre de Lie est un outil puissant permettant de « linéariser » le problème de classification de représentations. Soit G un groupe de Lie. L'espace tangent $\mathfrak{g} = T_eG$ de G en l'identité est muni d'une opération bilinéaire anti-symétrique

$$\begin{aligned} \Lambda^2\mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}, \\ (x,y) &\longmapsto [x,y] \end{aligned}$$

appelée *crochet de Lie* et définie comme suit : la conjugaison

$$c_x : y \longmapsto xyx^{-1}$$

par un élément $x \in G$ préserve e et induit par différentiation (en e) une application $dc_x : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$; en variant x on obtient une application

$$c : G \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}), \quad x \longmapsto dc_x.$$

Cette application est elle-même différentiable et sa dérivée en e s'écrit $dc : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(\mathfrak{g})$. On vérifie que $dc(u)(v) = -dc(v)(u)$ ce qui permet de définir $[u,v] = dc(u)(v)$. En plus d'être anti-commutatif, le crochet de Lie satisfait à l'identité suivante, dite *de Jacobi* :

$$[u,[v,w]] = [[u,v],w] + [v,[u,w]], \qquad \forall u,v,w \in \mathfrak{g}.$$

On appelle *algèbre de Lie* un espace vectoriel $\mathfrak{g}$ (non nécessairement de dimension finie) muni d'une application $\Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, (u,v) \mapsto [u,v]$ satisfaisant à l'identité de Jacobi. On peut penser à la notion d'algèbre de Lie comme la « trace infinitésimale » au voisinage de e de la structure de groupe de Lie ; la multiplication (qui ne préserve pas l'identité) est perdue, mais on conserve l'information infinitésimale du *commutateur* entre les éléments. Lorsque $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est un groupe de matrices, on a $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) := M_n(\mathbb{C})$, et le crochet s'identifie alors au commutateur linéaire $[u,v] = uv - vu$. En particulier, $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ est une algèbre de Lie.

La plupart des notions portant sur les groupes de Lie ont une version linéaire. Un morphisme d'algèbre de Lie entre deux algèbres de Lie $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ est une application linéaire $a : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ satisfaisant à $a([u,v]) = [a(u),a(v)]$ pour tout $u,v \in \mathfrak{g}$. La différentielle en e d'un morphisme de groupes de Lie est un morphisme d'algèbre de Lie. Une *représentation d'une algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ est une paire (V, ρ) formée d'un espace vectoriel V et d'un morphisme d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) := \mathrm{End}(V)$. La différentielle en e d'une représentation (V, ρ) d'un groupe de Lie G est une représentation $(V, d\rho)$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Il existe des théorèmes précis — les théorèmes de Lie — reliant les représentations des groupes de Lie et de leurs algèbres de Lie ; sous certaines hypothèses topologiques sur G, une représentation (V, ρ) de G est totalement déterminée par sa différentielle en e $(V, d\rho)$. Sans rentrer dans les détails, nous nous bornerons à dire ici que la classification des représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G est un pas important dans la classification des représentations de G lui-même. Nous renvoyons le lecteur à [Var84] pour une introduction à la théorie des groupes et algèbres de Lie.

3.2. Groupe et algèbre de Heisenberg. Soit k un corps (commutatif). Bien que la théorie existe en toute caractéristique, nous supposerons pour simplifier que k est de caractéristique zéro. Le lecteur ne perdra rien en supposant même que $k = \mathbb{C}$. Commençons par rappeler que le groupe de Heisenberg $\mathrm{Heis}(R)$ (d'ordre trois) associé à une k-algèbre R est par définition le groupe des matrices

$$\mathrm{Heis}(R) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in R \right\}.$$

On peut également écrire la loi de groupe directement, en identifiant $\mathrm{Heis}(R)$ à R^3 :

$$xx' := (a, b, c) \cdot (a', b', c') = (a + a', b + b' + ac', c + c')$$

et un calcul immédiat fournit l'inverse de (a, b, c) :

$$x^{-1} := (a, b, c)^{-1} = (-a, -b + ac, -c),$$

ainsi que le commutateur

$$xx'x^{-1}x'^{-1} = (0, ac' - a'c, 0).$$

On en déduit que le centre est de rang 1 :

$$Z_{\mathrm{Heis}(R)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; b \in R \right\}.$$

Le commutateur de deux éléments est donc dans le centre, et il en résulte que ce groupe est nilpotent. De plus, le quotient de groupes $\mathrm{Heis}(R)/Z_{\mathrm{Heis}(R)}$ s'identifie au groupe *additif* R^2 muni de la loi

$$(a, c) \cdot (a', c') = (a + a', c + c')$$

qui est un groupe commutatif. Le groupe de Heisenberg est donc une extension centrale de rang 1 d'un groupe additif de rang 2.

Lorsque $k = R = \mathbb{R}$ ou $k = R = \mathbb{C}$, on peut munir $\mathrm{Heis}(R)$ d'une structure de groupe de Lie (réel ou complexe), et ainsi considérer son algèbre de Lie $\mathrm{heis}(R)$. En tant qu'espace vectoriel, $\mathrm{heis}(R)$ est isomorphe à R^3 et pour calculer son crochet de Lie, on développe le commutateur dans $\mathrm{Heis}(R)$ pour $x = e + ht = (ha, hb, hc)$ et $y = e + h't' = (h'a', h'b', h'c')$ au premier ordre en h et h' :

$$xyx^{-1}y^{-1} = (0, hh'(ac' - a'c), 0) + O(h^2) + O((h')^2).$$

Ainsi la structure d'algèbre de Lie sur R^3 est la suivante :

$$[(a, b, c), (a', b', c')] = (0, ac' - a'c, 0). \tag{3.1}$$

À l'instar de $\mathrm{Heis}(R)$, $\mathrm{heis}(R)$ est nilpotente (ici, $[[x, y], z] = 0$ pour tous $x, y, z \in \mathrm{heis}(R)$) et une extension centrale de dimension 1 d'une algèbre de Lie abélienne (i.e., dont le crochet est identiquement nul) de rang 2.

3.3. Algèbre de Heisenberg et espaces vectoriels symplectiques. Il est facile de généraliser le crochet de Lie (3.1) : soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique, i.e., V est un k-espace vectoriel et $\omega : \Lambda^2 V \to k$ est non dégénérée. L'algèbre de Lie de Heisenberg associée à (V, ω) est par définition

$$\mathrm{heis}(V, \omega) = V \oplus kc, \qquad [v + ac, w + bc] = \omega(v, w)c.$$

Alors c est central et l'hypothèse de non-dégénérescence de ω assure que le centre de $\mathrm{heis}(V, \omega)$ est réduit à kc. Si l'on choisit une base symplectique de $\{P_i, Q_i\}_i$ de V, le crochet de Lie de $\mathrm{heis}(V,\omega)$ s'écrit

$$[P_i, P_j] = 0, \qquad [Q_i, Q_j] = 0, \qquad [P_i, Q_j] = \delta_{i,j}c. \tag{3.2}$$

C'est sous cette forme que l'algèbre de Heisenberg est tout d'abord apparue, dans les travaux de Heisenberg (avec une valeur spécifique de c), les variables P_i et Q_i dénotant respectivement les coordonnées des vecteurs position et moment d'une particule de la mécanique quantique, vus comme opérateurs dans un espace de Hilbert convenable.

3.4. Automorphismes. Intéressons nous à présent au groupe d'automorphismes de l'algèbre de Heisenberg $\mathrm{heis}(V,\omega)$. Il est facile de voir qu'un tel automorphisme $\gamma \in \mathrm{GL}(V \oplus kc)$ préserve nécessairement le centre kc, i.e., est de la forme $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} g & 0 \\ h & \mu \end{smallmatrix}\right)$ avec $g \in \mathrm{GL}(V)$, $\mu \in k^*$ et $h \in \mathrm{Hom}(V, kc)$. Pour que l'équation $[\gamma(x), \gamma(y)] = \gamma([x,y])$ soit satisfaite pour tout $x, y \in \mathrm{heis}(V,\omega)$, il faut et il suffit que

$$\omega(g(v), g(w)) = \mu\omega(v,w), \qquad \forall v, w \in V.$$

On en déduit le résultat suivant :

Lemme 3.1. *Le groupe d'automorphismes de* $\mathrm{heis}(V,\omega)$ *est isomorphe au produit semi-direct* $\mathrm{GSp}(\omega) \ltimes V^*$*, où* $\mathrm{GSp}(\omega) \subset \mathrm{GL}(V)$ *est le sous-groupe des automorphismes linéaires* $g : V \to V$ *tels qu'il existe* $\mu \in k^*$ *pour lequel* $\omega(g(v), g(w)) = \mu\omega(v,w)$ *pour tout* $v, w \in V$*.*

3.5. Versions graduées. Revenons à la présentation (3.2) de l'algèbre de Heisenberg. Si l'on munit les générateurs P_i, resp. Q_i, resp. l'élément central c, du degré 1, resp. -1, resp. 0, on voit que les relations de commutation (3.2) préservent le degré. Autrement dit, on peut munir $\mathrm{heis}(V,\omega)$ d'une structure d'algèbre de Lie $\mathbb{Z}$-graduée. Notons que le groupe d'automorphisme de $\mathrm{heis}(V,\omega)$ préservant cette graduation est bien plus petit, isomorphe à $\mathrm{GL}(V^+)$, où $V^+ = \bigoplus_i kP_i$. Autrement dit, il n'y a pas de graduation *canonique* de $\mathrm{Heis}(V,\omega)$, mais plutôt une graduation associée à chaque sous-espace lagrangien V^+ de (V,ω).

3.6. Algèbre enveloppante et algèbre de Weyl. À chaque algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est associée de manière canonique une algèbre associative $U(\mathfrak{g})$ (l'*algèbre enveloppante* de $\mathfrak{g}$) qui possède la propriété universelle suivante : il existe un morphisme $i : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ d'algèbre de Lie tel que pour toute représentation $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(U)$ de $\mathfrak{g}$ il existe un unique morphisme *d'algèbres associatives* $\widetilde{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(U)$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} U(\mathfrak{g}) \arrow[dr, "\widetilde{\rho}"] & \\ \mathfrak{g} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{End}(U) \end{tikzcd}$$

Dit de façon moins précise, on peut dire que les représentations de $\mathfrak{g}$ en tant qu'algèbre de Lie sont les mêmes que les représentations de $U(\mathfrak{g})$ en tant qu'algèbre associative. Nous passerons souvent dans ce texte des représentations de $\mathfrak{g}$ à celles de $U(\mathfrak{g})$. L'algèbre $U(\mathfrak{g})$ peut se construire de façon explicite comme le quotient de l'algèbre tensorielle

$$T(\mathfrak{g}) = k \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^{\otimes 2} \oplus \cdots$$

par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y], \qquad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Dit là encore de manière quelque peu imprécise, $U(\mathfrak{g})$ est l'algèbre associative engendrée par les éléments de $\mathfrak{g}$ modulo les relations $x \cdot y - y \cdot x = [x, y]$ pour $x, y \in \mathfrak{g}$. Par exemple, si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne alors $U(\mathfrak{g}) \simeq S\mathfrak{g}$, l'algèbre symétrique de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}$ (i.e., les fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$) ; autrement dit, si $x_1, x_2, \ldots$ est une base de $\mathfrak{g}$ alors $U(\mathfrak{g})$ s'identifie à l'algèbre des polynômes $k[x_1, x_2, \ldots]$.

Qu'en est-il de l'algèbre de Heisenberg ? Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique de dimension finie, et fixons pour simplifier une base symplectique $\{P_i, Q_i\}_{i=1,\ldots n}$ de V. L'algèbre enveloppante $U(\mathrm{heis}(V, \omega))$ est engendrée par des éléments P_i, Q_i et c modulo les relations

$$\begin{aligned} P_iP_j &= P_jP_i, & Q_iQ_j &= Q_jQ_i, \\ P_iQ_i - Q_iP_i &= c, & P_iQ_j &= Q_jP_i \quad \forall i \neq j, \\ P_ic &= cP_i, & Q_ic &= cQ_i. \end{aligned}$$

La spécialisation $c = 1$ de cette algèbre est familière : il s'agit tout simplement de l'algèbre des opérateurs différentiels polynomiaux en une famille de variables $x_1, x_2, \dots$ (l'*algèbre de Weyl*) ! Plus précisément, soit W un espace vectoriel de dimension n et soient $\{x_1, \dots, x_n\}$ une base de W^*, de sorte que l'anneau des fonctions polynomiales sur W s'identifie à $k[x_1, \dots, x_n]$. L'algèbre D_W des opérateurs différentiels polynomiaux sur W est engendrée[(2)] par les opérateurs (notés encore x_i) de multiplication par les x_i et par les opérateurs de dérivation partielle $\partial/\partial x_i$. On vérifie que la correspondance

$$P_i \longmapsto x_i, \qquad Q_i \longmapsto \partial/\partial x_i \tag{3.3}$$

s'étend en un isomorphisme

$$U(\mathrm{heis}(V,\omega))_{|c=1} \xrightarrow{\sim} D_W. \tag{3.4}$$

La théorie des représentations des algèbres telles que D_W est un sujet extrêmement riche et actif (c'est le point de départ de la théorie des *D-modules algébriques*, aussi importante en géométrie, en théorie des équations différentielles algébriques, qu'en théorie des représentations). Citons par exemple la fameuse

***Conjecture 3.2* (Dixmier).** *Tout endomorphisme non trivial de l'algèbre de Weyl D_W (pour W un espace vectoriel de dimension finie) est un automorphisme.*

La conjecture de Dixmier est équivalente à la non moins fameuse *conjecture jacobienne* : toute application polynomiale $f : W \to W$ dont le jacobien $J_f = \det((\partial f_i/\partial x_j)_{i,j})$ est inversible en tout point (ce qui entraîne en fait qu'il est constant non nul) possède un inverse *polynomial.*

[(2)] Rappelons que l'on a supposé le corps k de caractéristique nulle ; si $\mathrm{car}(k) = p$, il y a plusieurs notions possibles d'opérateurs différentiels.

Proposition 3.3. *L'algèbre de Weyl D_W est simple, i.e., elle ne possède pas d'idéaux bilatères non triviaux.*

Démonstration. Commençons par établir quelques lemmes. Pour $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{N}^n$ on pose

$$x^{\boldsymbol{p}} = x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n}, \qquad \partial^{\boldsymbol{p}} = (\partial/\partial x_1)^{p_1} \cdots (\partial/\partial x_n)^{p_n}.$$

Le degré d'un tel monôme est

$$\deg(x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}) = |\boldsymbol{p}| - |\boldsymbol{q}|,$$

où $|(r_1, \ldots, r_n)| = \sum_i r_i$

Lemme 3.4. *Les monômes $x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}$ pour $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^n$ forment une k-base de D_W.*

Démonstration. Les relations

$$(\partial/\partial x_j)x_i = x_i(\partial/\partial x_j) + \delta_{i,j}$$

permettent de réordonner tous les monômes en les générateurs $x_i, (\partial/\partial x_i)$ de façon à ce que les $\partial/\partial x_i$ soient à droite des x_i ; ceci montre que les monômes $x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}$ engendrent linéairement D_W. Pour prouver que ces monômes sont linéairement indépendants, il suffit de vérifier qu'ils le sont dans une représentation. Par construction, D_W opère sur l'espace des fonctions polynomiales

$$SW^* = k[x_1, x_2, \ldots, x_n].$$

Soit $\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \alpha_{\boldsymbol{p}\boldsymbol{q}} x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}} = 0$ une relation de dépendance linéaire. Choisissons $\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0$ avec $|\boldsymbol{q}_0|$ minimal et $\alpha_{\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0}$ non nul. Pour $|\boldsymbol{q}| \geqslant |\boldsymbol{q}_0|$ on a

$$(x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}) \cdot x^{\boldsymbol{q}_0} = \delta_{\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}_0} \prod_i (q_{0,i})!\; x^{\boldsymbol{p}}$$

ce qui implique que

$$0 = \left(\sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \alpha_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}\right) \cdot x^{\boldsymbol{q}_0} = \sum_{\boldsymbol{p}} \alpha_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}_0} \prod_i (q_{0,i})! x^{\boldsymbol{p}}.$$

Or le membre de droite ne peut être nul puisque le coefficient $\alpha_{\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0}$ est non nul. Contradiction. □

Le lemme suivant résulte d'un calcul direct (et immédiat).

Lemme 3.5. *Les relation suivantes sont vérifiées dans D_W :*

$$(\partial/\partial x_i)x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}} - x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}(\partial/\partial x_i) = p_i x^{\boldsymbol{p}-\varepsilon_i}\partial^{\boldsymbol{q}},$$

$$x_i x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}} - x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}\partial x_i = -q_i x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}-\varepsilon_i},$$

où $\{\varepsilon_i\}_i$ désigne la base canonique de $\mathbb{Z}^n$.

En d'autres termes, l'opération de faire le commutateur dans D_W avec l'élément $(\partial/\partial x_i)$ revient à dériver par rapport à la variable x_i, et faire le commutateur avec x_i revient (au signe près) à dériver par rapport à la variable $\partial/\partial x_i$. Cette symétrie entre les $\{x_i\}_i$ et les $\{\partial/\partial x_i\}_i$ est très naturelle ; il existe un automorphisme d'algèbre — appelé *transformée de Fourier* dans ce contexte — tel que $x_i \mapsto \partial/\partial x_i$ et $\partial/\partial x_i \mapsto -x_i$.

Terminons à présent la démonstration de la proposition. Soit $I \subseteq D_W$ un idéal bilatère non nul. Soit $u = \sum_{\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}} \alpha_{\boldsymbol{pq}} x^{\boldsymbol{p}}\partial^{\boldsymbol{q}}$ un élément non nul de I. Soit $(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{q}_0)$ tel que $\alpha_{\boldsymbol{p}_0,\boldsymbol{q}_0} \neq 0$ avec $|\boldsymbol{q}_0|$ maximal. En formant $|\boldsymbol{q}_0|$ commutateurs successifs avec des éléments x_i adéquats, on obtient un élément non nul $u' = \sum_{\boldsymbol{p}} \beta_{\boldsymbol{p}} x^{\boldsymbol{p}}$ de I. Soit à présent $\boldsymbol{p}_0$ tel que $\beta_{\boldsymbol{p}_0} \neq 0$ et $|\boldsymbol{p}_0|$ maximal. En formant maintenant $|\boldsymbol{p}_0|$ commutateurs successifs avec des éléments $\partial/\partial x_i$ adéquats, on obtient finalement une constante non nulle, ce qui implique que $I = D_W$. □

3.7. L'algèbre de Heisenberg graduée de dimension infinie

Nous nous focaliserons dans ces notes sur les représentations d'une algèbre de Heisenberg spécifique, qui apparaît le plus souvent en physique théorique. On prendra également $k = \mathbb{C}$ pour fixer les idées. On commence par introduire, de façon géométrique, un espace vectoriel symplectique de dimension infinie très naturel : soit $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ (que l'on peut voir, si l'on veut, comme une variété algébrique affine[3]) et $V = \mathbb{C}[X]$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur X. Un choix d'une coordonnée locale z au voisinage de 0 nous permet d'identifier V à l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$,

---

[3] Le voisinage épointé d'un point lisse sur une courbe arbitraire ferait tout autant l'affaire.

mais il est très important de garder à l'esprit qu'il n'y a pas, à priori, de choix *canonique* d'une telle coordonnée locale[4]. Munissons V de la structure symplectique définie par la formule

$$\omega(g, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint f dg$$

où l'intégrale porte sur un contour entourant zéro. De façon plus algébrique, on a $(1/2\pi i) \oint h(z) dz = h_{-1}$, où l'on a développé en série de Laurent $h(z) = \sum_i h_i z^i$. Notons que $\oint dh = 0$ pour toute fonction $h \in V$ (cela peut, par exemple, se voir par la formule algébrique ci-dessus), ce qui fait que

$$\omega(f, g) + \omega(g, f) = \frac{1}{2\pi i} \oint (f dg + g df) = \frac{1}{2\pi i} \oint d(fg) = 0,$$

et ω est bien antisymétrique. Le lecteur attentif sera ici, à juste titre, perplexe : cette forme n'est pas non dégénérée, les fonctions constantes étant dans le noyau. On peut néanmoins étendre la définition de l'algèbre de Heisenberg au cadre d'un espace vectoriel muni d'une forme antisymétrique.

Définition. On notera $\mathfrak{h}$ et on appellera simplement *algèbre de Heisenberg* l'algèbre de Heisenberg associée à $\mathbb{C}[X]$ et ω.

Le choix d'une coordonnée locale z et donc d'une base $b_i = z^i$, $i \in \mathbb{Z}$, de $\mathbb{C}[X]$ permet d'identifier $\mathfrak{h}$ avec l'algèbre de Lie engendrée par des éléments b_i, $i \in \mathbb{Z}$, et c modulo les relations suivantes :

$$[b_i, b_j] = i\delta_{i,-j} c, \qquad [c, b_i] = 0 \qquad \forall i, j. \tag{3.5}$$

On munit $\mathfrak{h}$ d'une structure d'algèbre de Lie graduée en posant $\deg(b_i) = i$, $\deg(c) = 0$. Notons que le centre $Z(\mathfrak{h})$ de $\mathfrak{h}$ est maintenant de dimension 2, engendré par b_0 et c.

Qu'en est-il de l'algèbre de Weyl dans ce cas ? Il est naturel de considérer l'algèbre $D_{\mathbb{C}^\infty}$ des opérateurs différentiels polynomiaux à une infinité de variables $x_1, x_2, \ldots$, et de décréter que x_i est placé en degré i. On a bien une identification d'algèbres $U(\mathfrak{h})_{|c=1, b_0=1} \simeq D_{\mathbb{C}^\infty}$.

---

[4]Cette liberté se traduira par l'apparition de symétries « cachées » engendrant une action d'une autre algèbre de Lie fondamentale — l'*algèbre de Virasoro*, cf. paragraphe 7.

Il existe néanmoins une autre manière plus commode (bien qu'équivalente) de voir $D_{\mathbb{C}^\infty}$. Soient $z_1, z_2, \dots$ une famille de variables, toutes de degré 1. L'espace des polynômes *symétriques* en ces variables forme un anneau

$$S := \mathbb{C}[z_1, z_2, \dots]^{\mathfrak{S}_\infty}$$

appelé *anneau de Macdonald des fonctions symétriques.* Un théorème classique de Macdonald fournit un isomorphisme d'anneaux

$$S \simeq \mathbb{C}[p_1, p_2, \dots],$$

où $p_k = \sum_i z_i^k$ sont les *fonctions symétriques de Newton.* Par exemple,

$$p_1 = z_1 + z_2 + \cdots, \qquad p_2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots$$

Bien sûr, les éléments de S sont, à l'instar des p_i, des sommes infinies donc il faut définir ces notions avec soin, cf. [Mac15]. Les p_i sont par construction des « polynômes » de degré i, donc S est bien une algèbre de polynôme en des générateurs de degrés respectifs $1, 2, 3, \dots$ On peut ainsi voir $D_{\mathbb{C}^\infty}$ comme une algèbre d'opérateurs différentiels sur l'anneau S, et écrire en particulier

$$D_{\mathbb{C}^\infty} = \mathbb{C}\langle p_k, \partial/\partial p_k \mid k \in \mathbb{N}\rangle \;/\; \{[p_j, \partial/\partial p_k] = \delta_{j,k}\}.$$

L'identification avec $U(\mathfrak{h})_{|c=1,b_0=1}$ s'obtient en posant, pour $k > 0$,

$$b_k = \partial/\partial p_k, \qquad b_{-k} = kp_k.$$

3.8. Une digression : algèbres de lacets et algèbres de Lie affines. On a présenté l'algèbre de Heisenberg comme une extension centrale de l'algèbre de Lie (abélienne) des fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}[X]$, où $X = \mathbb{C}\smallsetminus\{0\}$. On peut aussi voir $\mathbb{C}[X]$ comme l'algèbre de Lie des fonctions de X vers $\mathfrak{gl}(1)$, l'algèbre de Lie (abélienne) des matrices 1×1 (!). Ceci nous amène directement à considérer plus généralement les algèbres de fonctions de X vers $\mathfrak{gl}(n)$ pour n un entier quelconque, voire même les algèbres de fonctions de X vers $\mathfrak{so}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$ — ou n'importe quelle autre algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ces espaces de fonctions sont naturellement équipés d'une structure d'algèbre de Lie, où l'on définit le commutateur « point par point », i.e., via la formule

$$[f(z)a, g(z)b] = fg(z)[a, b], \qquad \forall f(z), g(z) \in \mathbb{C}[X],\ \forall a, b \in \mathfrak{g}.$$

On appelle cette algèbre de Lie l'*algèbre de lacet de* $\mathfrak{g}$. Encore une fois, un choix de coordonnée locale z permet d'identifier celle-ci avec l'espace des polynômes de Laurent en z à coefficients dans $\mathfrak{g}$, i.e., l'espace vectoriel des sommes (finies) $x = \sum_i u_i z^i$ avec $u_i \in \mathfrak{g}$. Cet espace est noté le plus souvent $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$.

On peut alors se poser la question suivante : quelles sont les extensions centrales possibles de $\mathfrak{g}[z, z^{-1}]$? Dans le cas d'une algèbre de Lie de dimension finie simple (i.e., sans idéal propre) telle que $\mathfrak{sl}(n)$, $\mathfrak{sp}(2n)$, $\mathfrak{so}(n)$, la réponse est la même que pour l'algèbre de Heisenberg : il existe une extension centrale (universelle) de dimension 1, définie comme suit :

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$$

$$[f(z)a, g(z)b] = fg(z)[a, b] + (a, b)_K \frac{1}{2\pi i} \oint f dg c, \qquad [c, f(z)a] = 0$$

où $(\ ,\ )_K$ est l'unique forme bilinéaire symétrique invariante non dégénérée sur $\mathfrak{g}$. Par exemple, si $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ alors $\widehat{\mathfrak{sl}}(n) = \mathfrak{sl}(n)[z, z^{-1}] \oplus \mathbb{C}c$, muni du crochet de Lie

$$[az^n, bz^m] = [a, b]z^{n+m} + n\delta_{n,-m} \operatorname{tr}(ab)c.$$

L'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$ s'appelle l'*algèbre de Lie affine de* $\mathfrak{g}$. Elle joue un rôle quelque peu similaire à l'algèbre de Heisenberg, notamment dans la théorie des cordes ou en physique statistique.

Remarque. Plus généralement, on peut chercher à comprendre les extensions centrales des algèbres de Lie de la forme $\mathfrak{g}(A)$, où A est une $\mathbb{C}$-algèbre commutative quelconque (i.e., qu'on remplace $\mathbb{C}[X]$ par une $\mathbb{C}$-algèbre commutative arbitraire). Lorsque $\mathfrak{g}$ est simple, la réponse à cette question est fournie par un célèbre théorème de C. Kassel : les extensions centrales sont paramétrées par le quotient $K = \Omega^1_{A/\mathbb{C}}/dA$ des 1-formes de Kähler de A (cf. [Har77, p. 172]) par l'espace des formes exactes (cf. [Kas84]). On laisse au lecteur le soin de calculer, en guise d'exemple, l'extension universelle des *algèbres de lacets doubles* $\mathfrak{g}[z^{\pm 1}, w^{\pm 1}]$ (on obtient alors les *algèbres de Lie elliptiques*).

4. Représentations de dimension finie

Maintenant que nous avons introduit les algèbres de Heisenberg, il est temps de nous intéresser à leurs représentations. Commençons par celles qui sont de dimension finie.

4.1. Représentations de niveau. Une représentation $\rho : \mathfrak{h} \to \operatorname{End}(U)$ de $\mathfrak{h}$ sera dite de *niveau*, ou de *charge centrale*, $\kappa \in \mathbb{C}$ si $\rho(c) = \kappa \operatorname{Id}_U$. L'élément b_0 est, lui, totalement indépendant des autres (i.e., on peut lui assigner n'importe quelle valeur sans changer la représentation) et il est donc inintéressant du point de vue de la théorie des représentations.

Rappelons qu'une représentation (U, ρ) d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est dite *simple* ou *irréductible* s'il n'existe pas de sous-représentations propre $\{0\} \subsetneq U' \subsetneq U$. Dans la même veine, un vecteur v d'une représentation (U, ρ) est dit *cyclique* si U est linéairement engendré par les éléments $\{v, \rho(g_1)\cdot v, \rho(g_2)\rho(g_1)\cdot v, \cdots \mid g_1, g_2, \cdots \in \mathfrak{g}\}$. Autrement dit, il n'existe pas de sous-espace vectoriel propre U' de U contenant v et préservé par l'action de $\mathfrak{g}$. Il est équivalent de dire que l'application canonique

$$\overline{\rho} : U(\mathfrak{g}) \longrightarrow U, \qquad u \longmapsto \widetilde{\rho}(u) \cdot v$$

est surjective. Il est immédiat qu'une représentation est irréductible si et seulement si tout vecteur non nul $v \in U$ est cyclique.

Proposition 4.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et (U, ρ) une représentation simple de $\mathfrak{g}$ de dimension finie. Alors le centre $Z(\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ opère via un caractère, i.e., qu'il existe une application linéaire $\chi : Z(\mathfrak{g}) \to \mathbb{C}$ tel que $\rho(z) = \chi(z) \operatorname{Id}_U$ pour tout $z \in Z(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Soit $z \in Z(\mathfrak{g})$. Comme U est complexe, de dimension finie, $\rho(u)$ admet une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Notons U_λ l'espace propre associé. On a, pour $v \in U_\lambda$

$$\begin{aligned} \rho(z)\rho(g) \cdot v &= \rho(g)\rho(z) \cdot v + \rho([z, g]) \cdot v \\ &= \rho(g)\rho(z) \cdot v \\ &= \lambda\rho(g) \cdot v \end{aligned} \tag{4.1}$$

On en déduit que U_λ est stable par $\mathfrak{g}$, i.e., est une sous-représentation de U. Comme U est simple, on a donc $U = U_\lambda$, et donc $\rho(z) = \lambda\,\mathrm{Id}_U$. La proposition en découle. □

Corollaire 4.2. *Toute représentation de dimension finie simple de $\mathfrak{h}$ est de niveau χ pour un certain $\chi \in \mathbb{C}$.*

Notons que la proposition ci-dessus est fausse sans l'hypothèse $\dim(U) < \infty$, et que la simple hypothèse que U possède un vecteur cyclique ne suffit pas. La même démonstration montre plus généralement qu'une représentation simple d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, dans laquelle un élément non trivial du centre possède un vecteur propre, admet un caractère central. On peut voir cette proposition comme un avatar du classique lemme de Schur en théorie des groupes.

À partir d'une représentation (U, ρ) de $\mathfrak{h}$ et d'un automorphisme $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{h})$ on peut fabriquer une nouvelle représentation $(U, \rho \circ \sigma)$, notée parfois plus simplement U^σ. Bien sûr, les caractéristiques principales de U (par exemple l'irréductibilité...) restent inchangées ; on dit que U^σ est la σ-conjuguée (ou σ-tordue) de U. Pour tout $\mu \neq 0$, il est facile de construire des automorphismes σ de $\mathfrak{h}$ tels que $\sigma(c) = \mu(c)$. On voit ainsi qu'il n'y a, à conjugaison près, que deux cas à considérer pour des représentations de niveau : le cas $\chi = 0$ et le cas $\chi = 1$. Noter qu'une représentation de niveau 1 n'est autre qu'une représentation de l'algèbre de Weyl $D_{\mathbb{C}^\infty}$, cf. paragraphe 3.6.

Proposition 4.3. *Toute représentation simple de $\mathfrak{h}$ de dimension finie est de niveau* 0 *et de dimension un.*

Démonstration. D'après le corollaire 4.2, U est de niveau, disons χ. Quitte à conjuguer, on peut supposer que $\chi = 0$ ou $\chi = 1$. Supposons par l'absurde que $\chi = 1$. Dans ce cas, U est une représentation de dimension finie de $D_{\mathbb{C}^\infty}$. En particulier, on dispose du morphisme

$$\overline{\rho} : D_{\mathbb{C}^\infty} \longrightarrow \mathrm{End}(U), \qquad u \longmapsto \widetilde{\rho}(u).$$

Ce morphisme est non nul car $\overline{\rho}(1) = \mathrm{Id}_U$. Comme $\dim(D_{\mathbb{C}^\infty}) = \infty$ et $\dim(\mathrm{End}(U)) < \infty$, le noyau I de $\overline{\rho}$ est un idéal non nul (donc propre) de $D_{\mathbb{C}^\infty}$, ce qui est contradiction avec la proposition 3.3. Ainsi $\chi = 0$. Mais alors la proposition 4.1 implique que l'algèbre de Lie abélienne $\mathfrak{h}/\mathbb{C}c$ opère sur U par un caractère. Comme U est supposée irréductible, ce ci implique que U est de dimension un. $\square$

Remarques 4.4

(i) Rien n'interdit de s'intéresser aux représentations de dimension finie non simples. Une telle représentation U possède toujours une filtration $U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U$ dont les facteurs successifs sont de dimension 1. D'un point de vue matriciel, cela veut dire que les matrices $\rho(a), a \in \mathfrak{h}$ sont toutes simultanément trigonalisables. Classifier les représentations de niveau 0 et de dimension finie revient ainsi à l'étude de l'ensemble des uplets (infinis) de matrices commutantes deux à deux, à conjugaison globale près ; cet ensemble est une variété algébrique singulière, la *variété commutante* très intéressante d'un point de vue géométrique, et qui est toujours un sujet de recherches actif.

(ii) Il existe un argument très simple pour prouver qu'une représentation de $\mathfrak{h}$ de niveau et de dimension finie est forcément de niveau 0. En effet, $\mathfrak{h}$ contient une sous-algèbre $\mathbb{C}x \oplus \mathbb{C}y \oplus \mathbb{C}c$ avec $[x, y] = c$ (par exemple, $x = b_1, y = b_{-1}$). En prenant la trace dans la représentation U il vient

$$0 = \mathrm{Tr}([\rho(x), \rho(y)]) = \mathrm{Tr}(c) = \chi \dim(U),$$

d'où $\chi = 0$.

(iii) Un argument similaire à celui de la proposition 4.3 montre que toute représentation simple de dimension finie d'une algèbre de Lie affine $\widehat{\mathfrak{g}}$ est de niveau 0 (i.e., se factorise par le quotient $\widehat{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{g}[z, z^{-1}]$). Les travaux de Chari [Cha86] fournissent une élégante classification de ces représentations simples en termes de produits tensoriels de représentations de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et de paramètres spectraux.

4.2. Représentations graduées de dimension finie. Nous avons insisté, au paragraphe 3.6 sur le caractère *gradué* de $\mathfrak{h}$. Une représentation (U, ρ) de $\mathfrak{h}$ est elle-même graduée si elle est munie d'une graduation $U = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} U[i]$ compatible avec la graduation de $\mathfrak{h}$, i.e., telle que $\rho(b_i)(U[j]) \subseteq U[j-i]$ pour tout i, j. La classification des représentations graduées de dimension finie de $\mathfrak{h}$ est remarquablement simple (et évidente au vu des résultats du paragraphe précédent) :

Corollaire 4.5. *Une représentation simple de dimension finie graduée* (U, ρ) *de* $\mathfrak{h}$ *est de dimension un et se factorise par le quotient* $\mathfrak{h} \to \mathbb{C}b_0$*, i.e., on a* $\rho(b_i) = \rho(c) = 0$ *pour tout* $i \neq 0$.

5. Représentations de dimension infinie et représentations de plus haut poids

Passons maintenant aux représentations graduées de dimension infinie. Sans aucune hypothèse supplémentaire, la classification semble ardue. Nous présentons ici une première représentation de dimension infinie et de niveau 0 (la *représentation vectorielle*), puis nous nous concentrons sur une classe particulière de représentations, celles dites *de plus haut poids* et énonçons le théorème fondamental de classification de ces représentations de plus haut poids. C'est là qu'apparaît *l'espace de Fock*.

5.1. Représentation vectorielle de niveau 0**.** Reprenons la définition géométrique de l'algèbre de Heisenberg, comme extension centrale de $\mathbb{C}[X]$, où $X = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Il est clair que $\mathbb{C}[X]$ opère sur lui-même par multiplication, donc $\mathbb{C}[X]$ est une représentation de $\mathfrak{h}$ de niveau 0 de façon tautologique ! Si l'on choisit une coordonnée locale z, cette action s'écrit simplement

$$\rho : \mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{C}[X]), \qquad b_i = z^{-i} \longmapsto \big(z^a \mapsto z^{a-i}\big).$$

On note V cette représentation (de niveau 0) de $\mathfrak{h}$.

Les algèbres affines $\widehat{\mathfrak{gl}}(n)$ possèdent elles aussi une représentation fondamentale de niveau 0, définie de la façon suivante : $\mathfrak{gl}(n)$ opérant sur $\mathbb{C}^n$, on peut étendre les scalaires à $\mathbb{C}[z, z^{-1}]$ et définir une action de $\mathfrak{gl}(n)[z, z^{-1}]$ sur $V = \mathbb{C}^n[z, z^{-1}]$ simplement en posant

$$\rho : \mathfrak{gl}(n)[z, z^{-1}] \longrightarrow \mathrm{End}(V), \qquad uz^{-i} \longmapsto \big(vz^a \mapsto u(v)z^{a-i}\big).$$

On obtient ainsi la représentation vectorielle de $\widehat{\mathfrak{gl}}(n)$. On peut penser au cas de l'algèbre de Heisenberg comme une version de cette représentation pour $n = 1$. Des constructions similaires existent pour les algèbres de Lie $\widehat{\mathfrak{so}}(n)$, $\widehat{\mathfrak{sp}}(2n)$, etc.

5.2. Représentations de plus haut poids. La représentation fondamentale est une représentation libre, en ce sens que tous les éléments b_i opèrent librement (i.e., de façon injective) dans V. À l'inverse, nous appellerons *représentation de plus haut poids* une représentation (U, ρ) engendrée par un vecteur v satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\rho(c) \cdot v = \chi v, \qquad \rho(b_0) \cdot v = \lambda v, \qquad \rho(b_i) \cdot v = 0 \quad \forall i > 0. \tag{5.1}$$

Un tel vecteur v est appelé *vecteur de plus haut poids*, de plus haut poids $(\chi, \lambda) \in \mathbb{C}^2$. Nous supposerons également que U est graduée, i.e., que $U = \bigoplus_{n \leqslant 0} U[n]$ et que cette graduation est compatible avec celle de $\mathfrak{h}$, i.e.,

$$\deg(h \cdot u) = \deg(h) + \deg(u), \qquad \forall u \in U, h \in \mathfrak{h}.$$

Comme on peut toujours décaler le degré d'un entier, nous pourrons toujours faire l'hypothèse que $\deg(v) = 0$, i.e., que $v \in U[0]$.

Notons $\phi(q)$ la fonction (série) d'Euler définie formellement par

$$\phi(q) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^i} = \sum_{n=1}^{\infty} p(n) q^n,$$

où $p(n)$ désigne le nombre de partitions de l'entier n. Le théorème fondamental de la théorie des représentations de plus haut poids de l'algèbre de Heisenberg s'énonce ainsi :

Théorème 5.1. *Pour tout $(\chi, \lambda) \in \mathbb{C}^2$, il existe une unique représentation irréductible $L_{\chi,\lambda}$ de plus haut poids (χ, λ) de $\mathfrak{h}$. De plus, on a*

$$\dim(L_{\chi,\lambda}) = 1 \qquad si\ \chi = 0,$$
$$\sum_n \dim(L_{\chi,\lambda}[n]) q^n = \phi(q) \qquad si\ \chi \neq 0.$$

Démonstration. Nous allons montrer l'existence et l'unicité de ces représentations de plus haut poids en même temps, en construisant explicitement $L_{\chi,\lambda}$. Pour cela, considérons le problème universel suivant : étant donné (χ, λ), existe-t-il une « plus grande » représentation de plus haut poids (χ, λ) i.e., existe-t-il une représentation $M_{\chi,\lambda}$ de plus haut poids (χ, λ), engendrée par un vecteur de plus haut poids v, satisfaisant à la condition suivante : *pour toute représentation U*

de plus haut poids (χ, λ)*, de vecteur de plus haut poids* u*, il existe un (unique) morphisme de* $\mathfrak{h}$*-modules* $p : M_{\chi,\lambda} \to U$ *tel que* $p(v) = u$*?* Notons que comme U est engendré par u, un tel morphisme p est nécessairement surjectif, et U est ainsi un quotient de $M_{\lambda,\chi}$.

Nous allons maintenant construire cette représentation $M_{\chi,\lambda}$ de $\mathfrak{h}$, de deux manières différentes. La première est purement formelle et utilise la notion de produit tensoriel ; la deuxième est bien plus explicite, mais elle peut paraître « tombée du ciel »[5]. Notons

$$\mathfrak{b}^+ = \bigoplus_{i \geqslant 0} \mathbb{C} b_i \oplus \mathbb{C} c, \qquad \mathfrak{h}^- = \bigoplus_{i<0} \mathbb{C} b_i$$

de sorte que $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}^- \oplus \mathfrak{b}^+$. Noter que $\mathfrak{b}^+, \mathfrak{h}^-$ sont des algèbres de Lie abéliennes. Par exactement le même raisonnement que dans la démonstration du lemme 3.4, on peut montrer que

$$U(\mathfrak{h}) = U(\mathfrak{h}^-) \otimes U(\mathfrak{b}^+)$$

(isomorphisme d'espace vectoriel). En particulier, $U(\mathfrak{b}^+)$ est une sous-algèbre (commutative) de $U(\mathfrak{h})$. Soit à présent $f_{\chi,\lambda} : U(\mathfrak{b}^+) \to \mathbb{C}$ le caractère (i.e., morphisme d'algèbres) défini par

$$f_{\chi,\lambda}(b_i) = 0 \quad \forall i > 0, \qquad f_{\chi\lambda}(b_0) = \lambda, \qquad f_{\chi,\lambda}(c) = \chi$$

et $\mathbb{C}_{\chi,\lambda} = \mathbb{C} v_{\chi,\lambda}$ la représentation de $\mathfrak{b}^+$ (de manière équivalente, de $U(\mathfrak{b}^+)$) de dimension un telle que $h \cdot v_{\chi,\lambda} = f_{\chi,\lambda}(h) v_{\chi,\lambda}$, i.e.,

$$b_i \cdot v_{\chi,\lambda} = 0, \quad \forall i > 0, \qquad b_0 \cdot v_{\chi,\lambda} = \lambda v_{\chi,\lambda}, \qquad c \cdot v_{\chi,\lambda} = \chi v_{\chi,\lambda}.$$

Afin d'obtenir une représentation de $\mathfrak{h}$ tout entier, nous utilisons le procédé d'induction suivant (analogue pour les algèbre de Lie du procédé d'induction de la théorie des groupes finis, par exemple)

$$M_{\chi,\lambda} := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}^+}^{\mathfrak{h}} \mathbb{C}_{\chi,\lambda} := U(\mathfrak{h}) \otimes_{U(\mathfrak{b}^+)} \mathbb{C}_{\chi,\lambda}.$$

On a ainsi un $\mathfrak{h}$-module (qui opère par multiplication à gauche). Notons que comme $U(\mathfrak{h}) = U(\mathfrak{h}^-) \otimes U(\mathfrak{b}^+)$, le morphisme

$$\psi : U(\mathfrak{h}^-) \longrightarrow M_{\chi,\lambda}, \qquad u \longmapsto u \cdot v_{\chi,\lambda}$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. Il s'en suit en particulier que $M_{\chi,\lambda}$ est engendré par $v_{\chi,\lambda}$ et est donc bien une représentation de

[5]... à travers les nuages :)

plus haut poids (χ, λ). Montrons à présent la propriété universelle de $M_{\chi,\lambda}$. Soit U une autre représentation de plus haut poids (χ, λ) et u son vecteur de plus haut poids. Comme U est de plus haut poids, u est un vecteur cyclique, et on a un morphisme surjectif

$$\phi : U(\mathfrak{h}) \longrightarrow U, \qquad h \longmapsto h \cdot u.$$

Par définition de vecteur de plus haut poids, l'idéal à droite $\mathrm{Ker}(\phi)$ contient $\mathrm{Ker}(f_{\chi,\lambda})$. Mais comme $\mathrm{Ker}(\psi)$ est précisément (essentiellement par définition) engendré par $\mathrm{Ker}(f_{\chi,\lambda})$, il existe une unique factorisation de ϕ

$$U(\mathfrak{h}) \xrightarrow{\psi} M_{\chi,\lambda} \xrightarrow{p} U$$

et donc un unique morphisme de $\mathfrak{h}$-modules $p : M_{\chi,\lambda} \to U$, qui envoie $v_{\chi,\lambda}$ vers u.

Donnons une description explicite de $M_{\chi,\lambda}$ qui n'utilise pas la notion de produit tensoriel. Pour cela, introduisons l'espace vectoriel $\widetilde{M}$ de base les symboles

$$\{b_{-i_1} b_{-i_2} \cdots b_{-i_\ell} v \mid i_1, \ldots, i_\ell \geqslant 1, \ell \geqslant 0\}$$

et notons M son quotient par les sous-espace vectoriel engendré par les éléments

$$b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v - b_{-j_1} \cdots b_{-j_\ell} v$$

pour tout uplets $(i_1, \ldots, i_\ell)$, $(j_1, \ldots, j_\ell)$ égaux *à permutation près.* Nous noterons toujours $b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v$ les images des vecteurs de base dans le quotient M. Définissons une structure de $\mathfrak{h}$-module sur M de la façon suivante :

$$c \cdot b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v = \chi b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v, \tag{5.2}$$

$$b_0 \cdot b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v = \lambda b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v, \tag{5.3}$$

$$b_{-i} \cdot b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v = b_{-i} b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v, \quad \forall i > 0 \tag{5.4}$$

$$b_i \cdot b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v = i\chi \sum_{k, i_k = i} b_{-i_1} \cdots \widehat{b_{-i_k}} \cdots b_{-i_\ell} v. \tag{5.5}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que l'on obtient ainsi bien une représentation de $\mathfrak{h}$ de plus haut poids. Les relations (5.2)–(5.4) sont claires. Pour comprendre d'où sort (5.5), il suffit de voir que dans n'importe quelle représentation d'une algèbre de Lie on a

$$x \cdot y_1 \cdot \dots \cdot y_\ell \cdot v = [x, y_1] \cdot y_2 \cdots y_\ell v + y_1 \cdot [x, y_2] \cdots y_\ell \cdot v \\ + \cdots + y_1 \cdots [x, y_\ell] \cdot v + y_1 \cdots y_\ell x \cdot v.$$

À présent que l'on dispose de la représentation « universelle » $M_{\chi,\lambda}$ (on dit *module de Verma*) reprenons la démonstration du théorème. Toute représentation de plus haut poids (χ, λ) étant un quotient de $M_{\chi,\lambda}$, il suffit d'étudier les sous-modules de $M_{\chi,\lambda}$. Notons que $M_{\chi,\lambda}$ est naturellement muni d'une graduation $M_{\chi,\lambda} = \bigoplus_{n \leqslant 0} M_{\chi,\lambda}[n]$ où

$$\deg(b_{-i_1} \cdots b_{-i_\ell} v_{\chi,\lambda}) = -\sum_k i_k.$$

On a $M_{\chi,\lambda}[0] = \mathbb{C} v_{\chi,\lambda}$ (le terme « vecteur de plus haut poids » vient précisément de ce fait que $v_{\chi,\lambda}$ est l'élément de degré (« poids ») maximal). Pour que le quotient par un sous-module I soit encore muni d'une graduation compatible, il est nécessaire que I soit lui-même homogène, i.e., que

$$I = \bigoplus_n \left(I \cap M_{\chi,\lambda}[n] \right).$$

En particulier, un sous-module propre I est toujours inclus dans $\bigoplus_{n>0} M_{\chi,\lambda}[n]$. Mais alors la somme de tous les sous-modules propres satisfait à la même hypothèse, et en particulier est également propre. Ceci prouve qu'il n'existe qu'un seul sous-module propre maximal, et donc une unique représentation irréductible de plus haut poids (χ, λ) !

Pour décrire explicitement cette représentation irréductible, distinguons les cas :

(i) $\chi = 0$. Il est facile de voir (via par exemple (5.5)) que les éléments b_i opèrent trivialement sur $M_{\chi,\lambda}$ pour $i > 0$. On en déduit que $\bigoplus_{n>0} M_{\chi,\lambda}[n]$ est la sous-représentation maximale, et donc $L_{0,\lambda}$ est de dimension un (cette représentation est déjà apparue au paragraphe précédent).

(ii) $\chi \neq 0$. Dans ce cas, nous allons montrer qu'il n'y a *pas* de sous-représentation propre de $M_{\chi,\lambda}$, i.e., que $M_{\chi,\lambda} = L_{\chi,\lambda}$. Pour cela, il suffit clairement de montrer que

$$v_{\chi,\lambda} \in U(\mathfrak{h}) \cdot v \tag{5.6}$$

pour tout $v \in M_{\chi,\lambda}$, car par construction $v_{\chi,\lambda}$ est un vecteur cyclique. Soit donc $v \in M_{\chi,\lambda}$ et écrivons $v = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ avec $v_\ell \in M_{\chi,\lambda}[\ell]$, puis

$$v_\ell = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m} \alpha(i_1, i_2, \ldots, i_m) b_{-i_1} b_{-i_2} \cdots b_{-i_m} v_{\chi,\lambda},$$

où la somme porte sur les uplets $(i_1, \ldots, i_m)$ avec $\sum i_k = n$. Il existe bien sûr un uplet $(i_1, \ldots, i_m)$ tel que $\alpha(i_1, \ldots, i_m) \neq 0$. Un rapide calcul à l'aide de (5.5) montre alors que

$$b_{i_1} \cdots b_{i_m} \cdot b_{-i_1} \cdots b_{-i_m} v_{\chi,\lambda} = C_{i_1, \ldots, i_m} v_{\chi,\lambda}$$

pour une constante non nulle $C_{i_1, \ldots, i_m}$ que l'on peut explicitement calculer

$$C_{i_1, \ldots, i_m} = \chi^m \prod_k i_k \prod_\ell (\#\{k \mid i_k = \ell\})!$$

(en effet, chaque b_{i_k} « annule » un b_{-i_k} — avec une multiplicité si on a des coïncidences entre les i_k). Le même calcul combiné avec un argument de degré montre que

$$b_{i_1} \cdots b_{i_m} \cdot b_{-j_1} \cdots b_{-j_p} v_{\chi,\lambda} = 0$$

si $\{j_1, \ldots, j_p\} \neq \{i_1, \ldots, i_m\}$ et $\sum j_\ell \leqslant \sum i_k$. Ceci entraîne que

$$b_{i_1} \cdots b_{i_m} v = \alpha(i_1, \ldots, i_m) C_{i_1, \ldots, i_m} v_{\chi,\lambda},$$

d'où l'on déduit (5.6). On a montré que $M_{\chi,\lambda} = L_{\chi,\lambda}$. Enfin, la formule pour le caractère gradué de $M_{\chi,\lambda}$ résulte de l'observation suivante : les éléments

$$b_{-i_1} \cdots b_{-i_m} v_{\chi,\lambda}, \qquad i_1 \geqslant i_2 \geqslant \cdots, \ \sum_k i_k = n$$

forment une base de $M_{\chi,\lambda}[n]$. □

Corollaire 5.2. *Soit* $(\chi, \lambda) \in \mathbb{C}^2$ *avec* $\chi \neq 0$. *Il n'existe à isomorphisme près (lui-même unique à un scalaire près) qu'une seule représentation de* $\mathfrak{h}$ *de plus haut poids* (χ, λ).

Démonstration. En effet, une telle représentation est forcément un quotient (non nul) de $M_{\chi,\lambda}$, qui est lui-même irréductible. □

Remarque. L'argument donné ci-dessus pour prouver l'existence et l'unicité des représentations irréductibles de plus haut poids est très général et classique ; il s'applique aux algèbres de Lie semi-simples comme $\mathfrak{sl}_n, \mathfrak{so}(n)$, etc., mais aussi aux algèbres affines $\widehat{\mathfrak{sl}}(n)$, $\widehat{\mathfrak{so}}(n)$, etc., ou plus généralement à toute algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ possédant une décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^- \oplus \mathfrak{g}^+$ avec $\mathfrak{g}^+$ avec $\mathfrak{g}^+$ « résoluble » (par exemple abélienne).

6. Espaces de Fock bosonique et fermionique

Le théorème de classification des représentations de plus haut poids de $\mathfrak{h}$ est un remarquable résultat de rigidité. Il nous dit en particulier que pour $\chi \neq 0$, il existe entre deux représentations de plus haut poids (χ, λ) un isomorphisme *canonique* qui soit compatible avec la structure de $\mathfrak{h}$-module. Nous allons illustrer ce principe en construisant deux modèles a priori très différents de mécanique quantique : le modèle *bosonique* — basé d'un point de vue mathématique sur des variables commutatives, i.e., sur des produits symétriques, et le modèle *fermionique* — basé sur des variables anti-commutatives, i.e., sur des produits alternés. Ces deux modèles possèdent chacun une action de l'algèbre de Heisenberg, pour laquelle ils sont de (même) plus haut poids. La théorie générale fournit donc une *unique* manière d'identifier ces deux modèles !

6.1. L'espace de Fock bosonique. Commençons par la version « commutative ». Dans ce modèle, un état quantique est décrit par une configuration d'électrons qui peuvent occuper des états d'énergie *positifs*, et être à plusieurs dans le même état. On modélise ceci algébriquement par une algèbre de polynômes en une infinité de variables $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$, en associant à l'état avec n_1 électrons au niveau 1, n_2 électrons au niveau 2, etc. le monôme (fini) $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots$, où $\deg(x_i) = i$. Là encore, il est conceptuellement plus satisfaisant de remplacer $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots]$ par $S = \mathbb{C}[p_1, p_2, \ldots]$ (même si cette transformation $x_i \mapsto p_i$ est purement cosmétique). Sur ce modèle, on a l'action d'opérateurs de « création » d'électrons de niveau i (i.e., de multiplication par p_i), et d'opérateurs « d'annihilation » d'électrons de niveau i (i.e., de dérivation par rapport à p_i). On reconnaît précisément la représentation tautologique de $\mathfrak{h}$ (ou plutôt de l'algèbre de Weyl $D_{\mathbb{C}^\infty}$ sur S du paragraphe 3.6) !

Proposition 6.1. *Les formules suivantes munissent S d'une structure de $\mathfrak{h}$-module de plus haut poids* $(1,0)$ *:*

$$b_i \longmapsto i\frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad b_{-i} = p_i, \quad \forall i > 0,$$
$$b_0 \longmapsto 0, \qquad c \longmapsto 1.$$

Le vecteur de plus haut poids est le polynôme constant $1 \in S[0]$*.*

Le $\mathfrak{h}$-module S est appelé *l'espace de Fock bosonique.* Encore une fois, en tant qu'espace vectoriel, ce n'est rien d'autre que l'algèbre de Macdonald des polynômes symétriques.

6.2. L'espace de Fock fermionique. Dans ce modèle, il y a deux types de particules : les électrons et les positrons qui ont des charges opposées : un électron a une charge négative, un positron une charge positive. De plus, ces particules satisfont au principe d'exclusion de Pauli, qui empêchent deux particules d'être au même niveau d'énergie (positif ou négatif). Une manière de modéliser ceci est d'imaginer qu'une particule à l'état « vide » a tous ses niveaux d'énergie négative $0, -1, -2, \ldots$ occupés, et qu'un état avec une énergie positive est obtenu en « excitant » un (ou plusieurs) des particules de niveau négatif en les faisant passer en un niveau positif (ce qui laissera un « trou » en niveau d'énergie négatif). D'un point de vue mathématique, cela nous amène à considérer l'espace vectoriel

$$V = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{C}v_i$$

qui modélise les états d'énergie possible des particules (v_i correspondant à l'état i — noter la présence de niveaux négatifs), puis un produit alterné « infini »

$$\Lambda^\infty V = \bigoplus_{i_0>i_1>\cdots} \mathbb{C}v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots$$

dont le vecteur modélisant l'état vide est

$$|0\rangle = v_0 \wedge v_{-1} \wedge v_{-2} \wedge \cdots$$

Qu'est-ce-que cela peut bien vouloir dire ? Bien qu'il soit possible de donner un sens précis à un tel produit alterné infini, notons que notre modèle ne contient que des états dans lesquels seul un nombre *fini* de particules de niveau négatif ont été excités. Ainsi nous ne devons considérer que les combinaisons linéaires finies de vecteurs

$$v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots$$

pour lesquels $i_k = -k$ pour $k \gg 0$. Il est clair que l'addition de tels vecteurs est encore de la même forme, et peut s'effectuer sur un nombre fini de composantes du produit alterné. Nous noterons $\Lambda_0^\infty V$ cet espace vectoriel. Le degré (niveau d'énergie) d'un vecteur de $\Lambda_0^\infty V$ est donné par la formule suivante (fixant le niveau du vecteur vide à zéro) :

$$\deg(v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots) = \sum_{k \geqslant 0} (k + i_k).$$

Maintenant que l'espace vectoriel des états quantiques est bien défini, intéressons-nous à l'action des opérateurs de création et d'annihilation. Pour cela, commençons par décrire une action de ces opérateurs sur une unique particule, i.e., sur l'espace vectoriel V. Bien sûr, les opérateurs de création vont exciter une particule, i.e., la faire passer à un niveau d'énergie supérieur alors que les opérateurs d'annihilation vont la faire passer à un niveau inférieur.

Lemme 6.2. *Les formules suivantes munissent l'espace vectoriel V d'une structure de $\mathfrak{h}$-module :*

$$b_i : v_k \longmapsto v_{k-i}, \quad \forall i \neq 0, \qquad b_0 \longmapsto 0, \qquad c \longmapsto 0.$$

Démonstration. En effet, on reconnaît la représentation vectorielle de $\mathfrak{h}$ (cf. paragraphe 5.1) après le changement de variables $v_i \mapsto z^{-i}$. $\square$

En particulier, V est une représentation de niveau 0, qui n'est *pas* de plus haut poids. Considérons à présent l'action induite de $\mathfrak{h}$ sur le produit alterné $\Lambda_0^\infty V$. On est tenté décrire simplement, comme pour un produit alterné fini de représentations

$$g \cdot v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots = (g \cdot v_{i_0}) \wedge v_{i_1} \wedge \cdots + v_{i_0} \wedge (g \cdot v_{i_1}) \wedge \cdots + \cdots \tag{6.1}$$

mais il faut s'assurer que a) ceci a bien encore un sens ! et b) ceci définit une action de $\mathfrak{h}$. Pour cela, vérifions que pour n'importe quel b_i, $i \in \mathbb{Z}$ et n'importe quel vecteur $v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \in \Lambda_0^\infty V$ le terme de droite de (6.1) est fini, c'est-à-dire que pour $\ell \gg 0$ on a

$$v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_{\ell-1}} \wedge (g \cdot v_{i_\ell}) \wedge v_{i_{\ell+1}} \wedge \cdots = 0.$$

Vu que b_0 opère par 0, nous pouvons supposer que $i \neq 0$. Comme $i_k = -k$ pour $k \gg 0$, on a, pour $\ell \gg 0$, $i_\ell = -\ell$ et $i_{\ell+i} = -\ell - i$ d'où

$$(g \cdot v_{i_\ell}) \wedge v_{i_{\ell+i}} = (g \cdot v_{-\ell}) \wedge v_{-\ell-i} = v_{-\ell-i} \wedge v_{-\ell-i} = 0,$$

ce qui prouve bien la finitude du terme de droite de (6.1). Maintenant, comment définir l'action de c ? Une première idée est de prendre $c \mapsto 0$ mais à y regarder de plus près, on a une infinité de termes qui contribuent (certes, chacun pour 0 !) ; le plus sûr est de calculer directement les commutateurs $[b_i, b_j]$ — cela permettra de traiter le point b) en même temps. Soit donc $v = v_{i_0} \wedge v_{i_1} \cdots \in \Lambda_0^\infty$, $i, j \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$.

Supposons d'abord que $i + j \neq 0$. Lorsque l'on opère par $b_i b_j$ ou $b_j b_i$ sur v il peut y avoir les deux cas de figure suivants :

(i) deux niveaux d'énergie précédemment inoccupés sont à présent occupés (et inversement, deux niveaux précédemment occupés sont à présent vides). Dans cette situation, il n'y a pas le choix, on peut déterminer précisément quelles particules ont été changées de niveau et l'ordre d'excitation de ces particules n'importe pas. Donc les coefficients matriciels (des signes ± 1) correspondants de $b_i b_j$ et $b_j b_i$ sont égaux ;

(ii) un seul niveau d'énergie précédemment inoccupé est à présent occupé (et inversement, un niveaux précédemment occupé est à présent vide). Notons $k - i - j$ le niveau nouvellement occupé (de sorte que le niveau à présent vide est k). Dans cette situation, il y a encore plusieurs sous-cas à considérer, suivant que les niveaux $k - i$ et $k - j$ sont vides ou occupés. Supposons par exemple que $k - i$ est vide mais $k - j$ occupé ; alors on peut d'abord exciter la particule au niveau k vers le niveau $k - j$, puis la particule au niveau $k - i$ vers le niveau $k - i - j$, mais on peut également permuter l'ordre des excitations. Il s'ensuit[6] que, comme au (i), les coefficients matriciels de b_ib_j et b_jb_i sont égaux. Bien sûr le cas où $k-j$ est occupé et $k-i$ vide se traite de la même façon. Dans le cas où $k-i$ et $k-j$ sont vides, on peut exciter la particule de niveau k vers le niveau $k-i$, puis vers le niveau $k-i-j$, mais aussi d'abord vers le niveau $k-j$ puis vers le niveau $k-i-j$. Là encore, on trouve que les coefficients matriciels sont identiques. Enfin, il est facile de voir que le cas où les deux niveaux $k-i$ et $k-j$ sont occupés est impossible (d'où viendrait alors la particule de niveau $k-i-j$?).

On a donc bien montré la relation $b_ib_j = b_jb_i$ si $i+j \neq 0$. Passons maintenant au cas où $i+j=0$. Dans cette situation, il y a encore deux cas possibles :

(i) deux niveaux d'énergie précédemment inoccupés sont à présent occupés (et inversement, deux niveaux précédemment occupés sont à présent vides). C'est la même chose que dans le cas i) ci-dessus ; les particules qui ont été excités sont uniquement déterminées.

(ii) l'état quantique final est identique à l'état initial ; on est donc dans la situation d'un coefficient matriciel diagonal : on a fait passer une particule d'un état k à l'état $k-i$, puis fait revenir à l'état k, ou inversement, on a fait passer une particule de l'état k à l'état $k+i$ et ensuite fait revenir à l'état k. En supposant pour fixer les choses que $i>0$, le coefficient diagonal de l'action du commutateur $[b_i, b_{-i}]$ sur v est ainsi donné par la formule suivante :

$$\#\{k \mid i_k + i \notin \{i_j\}\} - \#\{k \mid i_k - i \notin \{i_j\}\}.$$

Or ce nombre n'est à priori pas nul ! Nous affirmons même que ce nombre vaut i, quelque soit v. Il y a plusieurs manières de voir ceci, en voici une : en se restreignant à chaque classe de résidu modulo i, on est ramené au problème suivant : étant donné un sous-ensemble F de $\mathbb{Z}$ qui contient un intervalle $[-\infty, n]$ et dont le complémentaire contient un intervalle $[m, \infty]$, calculer la quantité

$$\#\{k \in F \mid k+1 \notin F\} - \#\{k \in F \mid k-1 \notin F\}. \tag{6.2}$$

[6]attention aux signes !

Le lecteur se convaincra facilement qu'une telle quantité vaut toujours 1 : il suffit de le vérifier pour un intervalle $F = [-\infty, N]$, puis de voir que (6.2) ne varie pas lorsqu'on ôte un entier à F. On a ainsi montré que $[b_i, b_{-i}] = i$ en tant qu'opérateurs sur $\Lambda_0^\infty V$.

Résumons : $\mathfrak{h}$ opère bien sur $\Lambda_0^\infty V$, mais c'est une action de niveau 1. Noter le fait remarquable qu'on a construit une représentation de niveau un comme un produit alterné infini de représentations de niveau 0 !

Proposition 6.3. *En tant que $\mathfrak{h}$-module, $\Lambda_0^\infty V$ est irréductible, de plus haut poids $(1, 0)$. Le vecteur de plus haut poids est le vecteur de l'état vide $|0\rangle$.*

Démonstration. Tout d'abord, vérifions que $|0\rangle$ est bien un vecteur de plus haut poids $(1, 0)$. Il est évident par la définition de b_0 que $b_0|0\rangle = 0$. On vérifie immédiatement que pour tout $i > 0$, $b_i|0\rangle = 0$ car

$$b_i \cdot v_0 \wedge v_{-1} \wedge \cdots = v_{-i} \wedge v_{-1} \wedge \cdots + v_0 \wedge v_{-1-i} \wedge v_{-2} \wedge \cdots + \cdots$$

et tous les termes s'annulent car v_{-i-l+1} apparaît deux fois dans le produit alterné dans le $l$ème terme. Par la théorie générale, il existe donc un (unique) morphisme *injectif*

$$p : M_{1,0} \longrightarrow \Lambda_0^\infty V.$$

Nous allons montrer que p est un isomorphisme en comparant les dimensions graduées de $M_{1,0}$ et $\Lambda_0^\infty V$, et plus précisément en montrant que $\dim(\Lambda_0^\infty V[n]) = p(n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Pour cela, raisonnons comme suit : le degré d'un vecteur $v_{i_0} \wedge v_{i_1} \wedge \cdots$ est égal au « degré d'excitation total » des particules qui ont été déplacées, et vaut $n := \sum_k (i_k + k)$. En posant $\lambda_k = i_k + k$ on obtient une partition $\lambda(v) := (\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots)$ de l'entier n. Il est clair que $v \mapsto \lambda(v)$ définit une bijection entre les vecteurs de base de $\Lambda_0^\infty V$ et l'ensemble des partitions. En particulier, on a bien $\dim(\Lambda_0^\infty V[n]) = p(n)$ pour tout $n \geqslant 0$, comme voulu. □

La représentation $\Lambda_0^\infty V$ s'appelle l'*espace de Fock fermionique* (de charge 0).

6.3. La correspondance bosons-fermions. Nous avons obtenu, au deux paragraphes précédents deux constructions explicites de $M_{1,0}$, de nature très différentes. Par la théorie générale, nous savons qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathfrak{h}$-modules entre les deux espaces de Fock :

$$\Psi : \Lambda_0^\infty V \xrightarrow{\sim} S, \qquad \Psi(|0\rangle) = 1.$$

Autrement dit, nous pouvons associer à tout état quantique du modèle fermionique (impliquant des particules de niveaux d'énergie négatives et positives) un état — ou plutôt une superposition (i.e., une combinaison linéaire) d'états quantiques du modèle bosonique (impliquant seulement des particules à niveau d'énergie positive). La question qui se pose à présent est la suivante : *comment calculer cette correspondance « bosons-fermions » explicitement* ? La réponse, forcément combinatoire, fait intervenir la famille de polynômes symétriques la plus connue et importante, la famille des *polynômes de Schur*, dont nous donnons brièvement une définition ici et renvoyons à [Mac15] pour plus de détails.

Les polynômes de Schur élémentaires sont définis par la fonction génératrice suivante :

$$\sum_k S_k(x_1, x_2, \dots) w^k = \prod_{l \geqslant 1} \frac{1}{1 - x_i w}.$$

Par exemple,

$$S_1(x_1, x_2, \dots) = \sum_i x_i = p_1(x_1, x_2, \dots)$$

et

$$S_2(x_1, x_2, \dots) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_1 x_2 + \cdots = \frac{1}{2} p_2(x_1, \dots) + \frac{1}{2} p_1(x_1, \dots)^2.$$

À chaque partition $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots)$ on associe un polynôme de Schur $S_\lambda(x_1, \dots)$ par la formule suivante :

$$S_\lambda = \begin{vmatrix} S_{\lambda_1} & S_{\lambda_1+1} & S_{\lambda_1+2} & \cdots \\ S_{\lambda_2-1} & S_{\lambda_2} & S_{\lambda_2+1} & \cdots \\ S_{\lambda_3-2} & S_{\lambda_3-1} & S_{\lambda_3} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

où on prend un déterminant $k \times k$ si λ est de longueur k. Par exemple,

$$S_{(1^2)}(x_1, \dots) = x_1 x_2 + \cdots$$

est le polynôme symétrique élémentaire (il en va de même pour (1^d), mais les autres cas sont plus complexes). L'importance des polynômes $S_\lambda(x_1,\dots,)$ vient du fait qu'ils fournissent les caractères des représentations irréductibles complexes de dimension finie des groupes $\mathrm{GL}(n)$ et des groupes symétriques S_k.

Rappelons que l'on a défini, dans la démonstration de la Proposition 6.3, une bijection $v \mapsto \lambda(v)$ entre les vecteurs de base de $\Lambda_0^\infty V$ et l'ensemble des partitions.

Théorème 6.4. *Pour tout vecteur de base* v*, on a* $\Psi(v) = S_{\lambda(v)}(x_1,\dots)$.

Nous renvoyons le lecteur au magnifique petit livre de Kac et Raina [KR87, Lect. 6] pour la démonstration de ce théorème — qui se résume essentiellement à un calcul direct.

Remarque. Il existe une extension de tout ceci aux algèbres affines (et mêmes à leurs déformations quantiques) associées aux algèbres de Lie $\mathfrak{sl}(n)$; nous renvoyons par exemple encore au livre Kac-Raina [KR87] ainsi qu'à l'article [VV99].

7. Algèbre de Virasoro et construction de Sugawara

Nous terminons ces notes par quelques remarques, ce paragraphe se voulant plus un pointeur vers les développements naturels de la théorie exposée dans les paragraphes précédents qu'autre chose.

Le lecteur pourra revenir sur les paragraphes 3-6 et se poser la question suivante : en quoi les constructions faites dépendent-elles du choix d'une coordonnée locale z pour étudier l'algèbre de Heisenberg (et ainsi fournir une base explicite) ? La réponse est claire : les constructions précises des espaces de Fock (et leur identification avec les espaces symétriques ou anti-symétriques) dépendent de ce choix, mais par contre, la notion de représentation de plus haut poids n'en dépend pas ! En effet, la sous-algèbre $\mathfrak{b}^+$ de $\mathfrak{h}$ n'est rien d'autre que la sous-algèbre des fonctions qui se prolongent en 0 (i.e., qui n'ont pas de pôle en 0), et la sous-algèbre $\mathfrak{h}^+ := \bigoplus_{i>0} b_i$ s'identifie à la sous-algèbre de $\mathfrak{b}^+$ des fonctions qui s'annulent en 0. On en déduit en particulier que les modules irréductibles $L_{\chi,\lambda}$ sont « indépendants » d'un tel choix de coordonnée locale. Pour donner un sens précis à un tel énoncé on peut considérer le groupe Aut^+ des « automorphismes algébriques locaux de $\mathbb{C}$ préservant 0 », i.e., le groupe des changements formels de bases

$$z \longmapsto \sum_{i \geqslant 1} a_i z^i, \qquad a_i \in \mathbb{C},\ a_1 \neq 0.$$

Ce groupe d'automorphisme opère naturellement sur $\mathfrak{h}$ (par automorphismes d'algèbre de Lie) en préservant $\mathfrak{b}^+$. On en déduit que pour n'importe quel $\sigma \in \mathrm{Aut}^+$, $L^\sigma_{\chi,\lambda}$ est encore de plus haut poids, et donc il existe un (essentiellement unique) isomorphisme $p_\sigma : L^\sigma_{\chi,\lambda} \simeq L_{\chi,\lambda}$.

Il y a mieux ! Par différentiation, on déduit une action de l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(\mathrm{Aut}^+)$ sur $L_{\chi,\lambda}$. Cette action se prolonge en une action de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs polynomiaux sur $X = \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ — mais avec une charge centrale non nulle, i.e., seulement après une extension centrale de dimension 1. Cette extension centrale n'est autre que l'algèbre de Lie de *Virasoro*, dont voici une présentation par générateurs et relations : Vir est engendrée par des éléments L_i, $i \in \mathbb{Z}$ et un centre c satisfaisant à

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \delta_{n,-m}\,\frac{n^3-n}{12}\,c.$$

Les opérateurs L_n correspondent au champs de vecteur $-z^{n+1}\partial/\partial z$ sur X, et l'extension centrale est universelle (i.e., qu'il n'y a pas de choix dans la formule étrange $(n^3-n)/12$ (!)).

La théorie des représentations de l'algèbre Vir est extrêmement intéressante. Outre les représentations de plus haut poids (ou celles de plus bas poids) — dont la structure est bien plus subtile que pour l'algèbre de Heisenberg, il existe aussi une famille de représentations de niveau 0, quelque peu analogue à celle des représentations vectorielles du paragraphe 5.1. Pour plus détails sur ces représentations, nous renvoyons (encore et toujours !) à [KR87].

Une dernière remarque : l'action de Vir dans l'espace de Fock $M_{1,0}$ est très bien comprise : on peut exprimer l'action des opérateurs L_i en terme des opérateurs de Heisenberg, c'est la construction de Sugawara, cf. [KR87, Lecture 3] ; on a

$$L_k = \frac{\delta_{k \equiv 0 \bmod 2}}{2}\, b_{k/2}^2 + \sum_{j > k/2} b_{-j} b_{j+k}.$$

Références

[Cha86] V. Chari – « Integrable representations of affine Lie-algebras », *Invent. Math.* **85** (1986), no. 2, p. 317–335.

[Har77] R. Hartshorne – *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Math., vol. 52, Springer-Verlag, 1977.

[KR87] V. G. Kac & A. K. Raina – *Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras*, Advanced Series in Math. Physics, vol. 2, World Scientific Publishing Co., Inc., Teaneck, NJ, 1987.

[Kas84] Ch. Kassel – « Kähler differentials and coverings of complex simple Lie algebras extended over a commutative algebra », *J. Pure Appl. Algebra* **34** (1984), no. 2-3, p. 265–275, Proceedings of the Luminy conference on algebraic K-theory (Luminy, 1983).

[Mac15] I. G. Macdonald – *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2e éd., Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2015.

[Var84] V. S. Varadarajan – *Lie groups, Lie algebras, and their representations*, Graduate Texts in Math., vol. 102, Springer-Verlag, New York, 1984.

[VV99] M. Varagnolo & E. Vasserot – « On the decomposition matrices of the quantized Schur algebra », *Duke Math. J.* **100** (1999), no. 2, p. 267–297.

Olivier Schiffmann, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France
E-mail : `Olivier.Schiffmann@math.u-psud.fr`
Url : `https://sites.google.com/site/olivierschiffmann/`