SUR LA

COMPOSITION DES FORMES QUADRATIQUES QUATERNAIRES

ET SES APPLICATIONS AUX GROUPES FUCHSIENS,

PAR M. X. STOUFF,

Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier.

I.

Soit la forme quadratique quaternaire

$$(1)\quad \Phi(x,y,z,u) = A(x^2+u^2)+A'y^2+A''z^2+(By+Cz)(x-u)+Dxu+Eyz,$$

avec les relations

$$(2)\qquad \frac{A}{A'} = \frac{A''}{A} = -\frac{C}{B}, \qquad A(D+E) = BC;$$

je considère les équations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= X[-(A+D)x+Cz-Au] \\ &\quad + Y[Bx+A'y+(E-A)z-Bu]+Z(Ay+A''z)+U(-Ax-Cz+Au), \\ y_1 &= X[-(A+D)y+A''z] \\ &\quad + Y[-Ax-Cz-(A+D)u]+Z(-A''x+Cy+A''u)+U(-Ay-A''z), \\ z_1 &= X(-A'y-Az) \\ &\quad + Y(A'x-Bz-A'u)+Z[-(A+D)x+By-Au]+U[A'y-(A+D)z], \\ u_1 &= X(Ax+By-Au) \\ &\quad + Y(A'y+Az)+Z[Cx+(E-A)y+A''z-Cu]+U[-Ax-By-(A+D)u]; \end{aligned}\right.$$

nous dirons que le système x_1, y_1, z_1, u_1 résulte de la *composition* du sys-

(1) Cette forme quadratique a été obtenue en remplaçant dans la forme (16) (*voir* plus loin) les coefficients numériques par des lettres et en attribuant à ces lettres les propriétés évidentes de ces coefficients.

Comparer deux Notes de M. Bianchi : *Sopra una classe di gruppi fuchsiani reducibili a gruppi modulari* et *Sui gruppi di sostituzioni lineari e sulle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1890, 1891), et le Mémoire fondamental de M. Picard : *Annales de l'École Normale*, 3e série, t. I.

tème X, Y, Z, U avec le système x, y, z, u, et nous écrirons

$$(x_1, y_1, z_1, u_1) = (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{U})(x, y, z, u).$$

Désignons par

$$\begin{array}{cccc} \lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \lambda_{13}, & \lambda_{14}, \\ \lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \lambda_{23}, & \lambda_{24}, \\ \lambda_{31}, & \lambda_{32}, & \lambda_{33}, & \lambda_{34}, \\ \lambda_{41}, & \lambda_{42}, & \lambda_{43}, & \lambda_{44} \end{array}$$

les coefficients de X, Y, Z, U dans les équations (3). On peut se proposer d'ordonner les équations (3) par rapport à x, y, z, u, et l'on arrive au résultat suivant :

$$(4)\quad \begin{cases} x_1 = \Lambda_{33} x + \Lambda_{42} y + \Lambda_{43} z - \Lambda_{41} u, \\ y_1 = \Lambda_{24} x + \Lambda_{11} y - \Lambda_{23} z + \Lambda_{21} u, \\ z_1 = \Lambda_{34} x - \Lambda_{32} y + \Lambda_{44} z + \Lambda_{31} u, \\ u_1 = \Lambda_{14} x + \Lambda_{12} y + \Lambda_{13} z + \Lambda_{22} u. \end{cases}$$

Ici chacun des coefficients Λ n'est autre que le coefficient désigné précédemment par la lettre minuscule correspondante où l'on a remplacé x, y, z, u respectivement par X, Y, Z, U.

On peut aussi se proposer de résoudre les équations (3) par rapport à X, Y, Z, U. Pour les résoudre par rapport à X, par exemple, je les ajoute après les avoir multipliées respectivement par $-\lambda_{22}$, λ_{12}, λ_{13}, λ_{14} et, en opérant d'une manière analogue pour trouver les valeurs de Y, Z, U, il vient

$$(5)\quad \begin{cases} \mathrm{X} = \dfrac{-\lambda_{22} x_1 + \lambda_{12} y_1 + \lambda_{13} z_1 + \lambda_{14} u_1}{(-\mathrm{D} - 2\mathrm{A})\Phi(x, y, z, u)}, \\ \mathrm{Y} = \dfrac{\lambda_{21} x_1 - \lambda_{11} y_1 + \lambda_{23} z_1 + \lambda_{24} u_1}{(-\mathrm{D} - 2\mathrm{A})\Phi(x, y, z, u)}, \\ \mathrm{Z} = \dfrac{\lambda_{31} x_1 + \lambda_{32} y_1 - \lambda_{44} z_1 + \lambda_{34} u_1}{(-\mathrm{D} - 2\mathrm{A})\Phi(x, y, z, u)}, \\ \mathrm{U} = \dfrac{\lambda_{41} x_1 + \lambda_{42} y_1 + \lambda_{43} z_1 - \lambda_{33} u_1}{(-\mathrm{D} - 2\mathrm{A})\Phi(x, y, z, u)}. \end{cases}$$

On vérifie aisément que

$$(-u, y, z, -x)(x, y, z, u) = [\Phi(x, y, z, u), 0, 0, \Phi(x, y, z, u)].$$

Nous dirons que les deux systèmes

$$(-u, y, z, -x), \qquad (x, y, z, u)$$

sont *inverses l'un de l'autre*.

Je forme encore les combinaisons suivantes :

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-(\mathrm{A}+\mathrm{D})x_1+\mathrm{C}z_1-\mathrm{A}u_1\\
&\quad=(\mathrm{D}+2\mathrm{A})[\mathrm{X}(\mathrm{D}x-\mathrm{C}z+\mathrm{A}u)+\mathrm{Y}(-\mathrm{B}x-\mathrm{A}'y-\mathrm{E}z+\mathrm{B}u)+\mathrm{Z}(-\mathrm{C}x-\mathrm{A}''z)+\mathrm{UA}x],\\
&\mathrm{B}x_1+\mathrm{A}'y_1+(\mathrm{E}-\mathrm{A})z_1-\mathrm{B}u_1\\
&\quad=(\mathrm{D}+2\mathrm{A})[\mathrm{X}(-\mathrm{B}x+\mathrm{A}z)-\mathrm{YA}'x+\mathrm{Z}(-\mathrm{E}x+\mathrm{A}u)+\mathrm{U}(-\mathrm{A}'y-\mathrm{E}z+\mathrm{B}u)],\\
&\mathrm{A}y_1+\mathrm{A}''z_1=(\mathrm{D}+2\mathrm{A})(-\mathrm{XA}y-\mathrm{YA}u-\mathrm{ZA}''x-\mathrm{UA}''z),\\
&-\mathrm{A}x_1-\mathrm{C}z_1+\mathrm{A}u_1=(\mathrm{D}+2\mathrm{A})[\mathrm{XA}x+\mathrm{YA}z+\mathrm{Z}(\mathrm{C}x-\mathrm{A}y)+\mathrm{U}(\mathrm{C}z-\mathrm{A}u)].
\end{aligned}
\right.
$$

En multipliant par $-u_1, y_1, z_1, -x_1$ respectivement les deux membres de ces équations, puis en les ajoutant membre à membre, il vient

$$
(7)\qquad \Phi(x_1, y_1, z_1, u_1)=(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\,\Phi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{U})\,\Phi(x, y, z, u).
$$

Les formules (3) permettent donc de *composer avec elle-même* la forme quaternaire Φ.

Nous appellerons le système

$$
(\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}', \mathrm{U}')=(-u, y, z, -x)(\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}, \mathrm{U})(x, y, z, u)
$$

transformé du système X, Y, Z, U par le système x, y, z, u. $\mathrm{X}', \mathrm{Y}', \mathrm{Z}', \mathrm{U}'$ sont des fonctions linéaires homogènes de X, Y, Z, U.

$$
(8)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\mathrm{X}'&=\mu_{11}\mathrm{X}+\mu_{12}\mathrm{Y}+\mu_{13}\mathrm{Z}+\mu_{14}\mathrm{U},\\
\mathrm{Y}'&=\mu_{21}\mathrm{X}+\mu_{22}\mathrm{Y}+\mu_{23}\mathrm{Z}+\mu_{24}\mathrm{U},\\
\mathrm{Z}'&=\mu_{31}\mathrm{X}+\mu_{32}\mathrm{Y}+\mu_{33}\mathrm{Z}+\mu_{34}\mathrm{U},\\
\mathrm{U}'&=\mu_{41}\mathrm{X}+\mu_{42}\mathrm{Y}+\mu_{43}\mathrm{Z}+\mu_{44}\mathrm{U}.
\end{aligned}
\right.
$$

Les coefficients μ ont les valeurs suivantes :

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\mu_{11}&=-\lambda_{11}\lambda_{44}+\lambda_{12}\lambda_{24}+\lambda_{13}\lambda_{34}-\lambda_{14}^2, & \mu_{21}&=-\lambda_{21}\lambda_{44}+\lambda_{22}\lambda_{24}+\lambda_{23}\lambda_{34}-\lambda_{24}\lambda_{14},\\
\mu_{12}&=\lambda_{11}\lambda_{42}-\lambda_{12}\lambda_{22}-\lambda_{13}\lambda_{32}+\lambda_{14}\lambda_{12}, & \mu_{22}&=\lambda_{21}\lambda_{42}-\lambda_{22}^2-\lambda_{23}\lambda_{32}+\lambda_{24}\lambda_{12},\\
\mu_{13}&=\lambda_{11}\lambda_{43}-\lambda_{12}\lambda_{23}-\lambda_{13}\lambda_{33}+\lambda_{14}\lambda_{13}, & \mu_{23}&=\lambda_{21}\lambda_{43}-\lambda_{22}\lambda_{23}-\lambda_{23}\lambda_{33}+\lambda_{24}\lambda_{13},\\
\mu_{14}&=-\lambda_{11}\lambda_{41}+\lambda_{12}\lambda_{21}+\lambda_{13}\lambda_{31}-\lambda_{14}\lambda_{11}, & \mu_{24}&=-\lambda_{21}\lambda_{41}+\lambda_{22}\lambda_{21}+\lambda_{23}\lambda_{31}-\lambda_{24}\lambda_{11},\\
\mu_{31}&=-\lambda_{31}\lambda_{44}+\lambda_{32}\lambda_{24}+\lambda_{33}\lambda_{34}-\lambda_{34}\lambda_{14}, & \mu_{41}&=-\lambda_{41}\lambda_{44}+\lambda_{42}\lambda_{24}+\lambda_{43}\lambda_{34}-\lambda_{44}\lambda_{14},\\
\mu_{32}&=\lambda_{31}\lambda_{42}-\lambda_{32}\lambda_{22}-\lambda_{33}\lambda_{32}+\lambda_{34}\lambda_{12}, & \mu_{42}&=\lambda_{41}\lambda_{42}-\lambda_{42}\lambda_{22}-\lambda_{43}\lambda_{32}+\lambda_{44}\lambda_{12},\\
\mu_{33}&=\lambda_{31}\lambda_{43}-\lambda_{32}\lambda_{23}-\lambda_{33}^2+\lambda_{34}\lambda_{13}, & \mu_{43}&=\lambda_{41}\lambda_{43}-\lambda_{42}\lambda_{23}-\lambda_{43}\lambda_{33}+\lambda_{44}\lambda_{13},\\
\mu_{34}&=-\lambda_{31}\lambda_{41}+\lambda_{32}\lambda_{21}+\lambda_{33}\lambda_{31}-\lambda_{34}\lambda_{11}, & \mu_{44}&=-\lambda_{41}^2+\lambda_{42}\lambda_{21}+\lambda_{43}\lambda_{31}-\lambda_{44}\lambda_{11}.
\end{aligned}
\right.
$$

On vérifie aisément les relations

$$(10)\qquad \begin{cases} \mu_{12}+\mu_{42}=\mu_{13}+\mu_{43}=0, \\ \mu_{11}+\mu_{41}=\mu_{14}+\mu_{44}=-(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\,\Phi(x,y,z,u), \\ \mu_{21}+\mu_{24}=\mu_{31}+\mu_{34}=0, \\ \mu_{11}+\mu_{14}=\mu_{41}+\mu_{44}=-(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\,\Phi(x,y,z,u); \end{cases}$$

il en résulte

$$(11)\qquad \mathrm{X}'+\mathrm{U}'=-(\mathrm{D}+2\mathrm{A})(\mathrm{X}+\mathrm{U})\,\Phi(x,y,z,u).$$

II.

Nous appellerons *système unité* un système x, y, z, u tel que les valeurs de x_1, y_1, z_1, u_1 fournies par les équations (3) soient proportionnelles à celles de X, Y, Z, U, quels que soient X, Y, Z, U. Pour cela, il faut, entre autres conditions, que l'on ait

$$\begin{gathered} -(\mathrm{A}+\mathrm{D})y+\mathrm{A}''z=0, \\ -\mathrm{A}y-\mathrm{A}''z=0, \\ -\mathrm{A}'y-\mathrm{A}z=0, \\ \mathrm{A}'y-(\mathrm{A}+\mathrm{D})z=0, \end{gathered}$$

et en ajoutant membres à membres la première et la seconde de ces équations, puis la troisième et la quatrième, on trouve que y et z doivent être nuls. On voit ensuite facilement que z doit être égal à u.

Un système est nommé *périodique* quand une de ses puissances sera le système unité. En effet, les puissances successives d'un pareil système reproduisent périodiquement les mêmes systèmes. Dire qu'un système est périodique, cela revient à dire que les équations (3) représentent une substitution linéaire périodique des variables X, Y, Z, U aux variables x_1, y_1, z_1, u_1.

On sait que l'étude de la périodicité d'une substitution linéaire d'un nombre quelconque de variables a lieu au moyen de l'équation déterminante qui est ici

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_{11}-\theta & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22}-\theta & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33}-\theta & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44}-\theta \end{vmatrix}=0.$$

En développant ce déterminant, il vient

$$\begin{aligned}&\theta^4 + 2\theta^3(x+u)(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\\ &\quad + [(\mathrm{D}+2\mathrm{A})^2(x+u)^2 + 2(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\,\Phi(x,y,z,u)]\,\theta^2\\ &\quad + 2\theta(\mathrm{D}+2\mathrm{A})^2\,\Phi(x,y,z,u)(x+u) + (\mathrm{D}+2\mathrm{A})^2\,\Phi^2(x,y,z,u) = 0\end{aligned}$$

ou

$$(13)\qquad [\theta^2 + (x+u)(\mathrm{D}+2\mathrm{A})\theta + \Phi(x,y,z,u)(\mathrm{D}+2\mathrm{A})]^2 = 0:$$

ainsi le premier membre de l'équation déterminante est carré parfait. Pour qu'un système soit périodique, il faudra que les rapports des racines de l'équation précédente pour ce système soient des racines de l'unité. Ainsi, un système ne peut présenter que les périodes 2, 3, 4, 6, lorsque les coefficients de la forme (1) sont rationnels.

III.

Voici une application. Je considère le groupe G_{13} défini dans un travail antérieur [1], dont une substitution quelconque est de la forme

$$\mathrm{S}_j \left| z,\ \frac{z\sum_{h=1}^{6}\alpha_h(j^h - j^{-h}) + \sum_{h=1}^{6}\beta_h(j^h + j^{-h})}{z\sum_{h=1}^{6}\gamma_h(j^h + j^{-h}) + \sum_{h=1}^{6}\delta_h(j^h + j^{-h})} \right|, \qquad \beta_h = 3\beta'_h,$$

où le déterminant des coefficients est égal à l'unité. De plus, la substitution S_j est telle que la substitution, obtenue en changeant dans S_j j en j^2, et la transformée de S_j par $\sum = \left(z,\ \frac{6z+3}{-7z-3}\right)$ soient identiques.

En utilisant les formules données dans le travail en question et en exprimant que le déterminant des coefficients de S_j est égal à l'unité, on trouve, pour une substitution impaire,

$$(14)\qquad 13(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) = 1;$$

on ne peut vérifier cette équation par des valeurs entières de α_1, β_1, γ_1, δ_1;

---

(1) *Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes* (*Annales de la Faculté de Toulouse*, 1891).

donc *le groupe* G_{13} *ne contient pas de substitutions impaires*. Pour une substitution paire, on trouve, au contraire, la condition

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} & -84\alpha_1^2+756\alpha_1\beta'_1-108\alpha_1\gamma_1 \\ & \qquad +169\alpha_1\delta_1-1764\beta'^2_1+465\beta'_1\gamma_1-756\beta'_1\delta_1-36\gamma_1^2+108\gamma_1\delta_1-84\delta_1^2=1, \end{aligned} \right.$$

qui, en ordonnant autrement les termes et en remplaçant $3\beta'_1$ par β_1, devient

$$(16)\quad \left\{ \begin{aligned} & -84(\alpha_1^2+\delta_1^2)-196\beta_1^2-36\gamma_1^2 \\ & \qquad +(252\beta_1-108\gamma_1)(\alpha_1-\delta_1)+169\alpha_1\delta_1+155\beta_1\gamma_1=1. \end{aligned} \right.$$

Le premier membre de cette dernière équation est précisément de la forme de la fonction $\Phi(x, y, z, u)$ avec la relation $D+2A=1$.

Désignons par S et $\overline{S}$ deux substitutions quelconques de G_{13}, les nombres A_1, B'_1, Γ_1, Δ_1 relatifs au produit $S\overline{S}$ sont donnés par les formules suivantes :

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} A_1 &= \alpha_1(-85\overline{\alpha_1}-108\overline{\gamma_1}+84\overline{\delta_1})+\beta'_1(756\overline{\alpha_1}-1764\overline{\beta'_1}+717\overline{\gamma_1}-756\overline{\delta_1}) \\ & \qquad +\gamma_1(-252\overline{\beta'_1}-36\overline{\gamma_1})+\delta_1(84\overline{\alpha_1}+108\overline{\gamma_1}-84\overline{\delta_1}), \\ B'_1 &= \alpha_1(-85\overline{\beta'_1}-12\overline{\gamma_1})+\beta'_1(84\overline{\alpha_1}+108\overline{\gamma_1}-85\overline{\delta_1}) \\ & \qquad +\gamma_1(12\overline{\alpha_1}-108\overline{\beta'_1}-12\overline{\delta_1})+\delta_1(84\overline{\beta'_1}+12\overline{\delta_1}), \\ \Gamma_1 &= \alpha_1(588\overline{\beta'_1}+84\overline{\gamma_1})+\beta'_1(-588\overline{\alpha_1}-756\overline{\gamma_1}+588\overline{\delta_1}) \\ & \qquad +\gamma_1(-85\overline{\alpha_1}+756\overline{\beta'_1}+84\overline{\delta_1})+\delta_1(-588\overline{\beta'_1}-85\overline{\gamma_1}), \\ \Delta_1 &= \alpha_1(-84\overline{\alpha_1}+756\overline{\beta'_1}+84\overline{\delta_1})+\beta'_1(-1764\overline{\beta'_1}-252\overline{\gamma_1}) \\ & \qquad +\gamma_1(-108\overline{\alpha_1}+717\overline{\beta'_1}-36\overline{\gamma_1}+108\overline{\delta_1})+\delta_1(84\overline{\alpha_1}-756\overline{\beta'_1}-85\overline{\delta_1}). \end{aligned} \right.$$

Si l'on fait la substitution

$$\beta'_1=\frac{\beta_1}{3},\qquad \overline{\beta'_1}=\frac{\overline{\beta_1}}{3},\qquad B'_1=\frac{B_1}{3},$$

ces équations prennent la forme (3).

La recherche de solutions de l'équation (15) en nombres entiers paraît d'abord assez difficile. On en forme aisément par la méthode suivante. Donnons-nous l'invariant I de la substitution, qui est égal à $\alpha_1+\delta_1$. Posons

$$\rho=-\beta'_1,\qquad \sigma=\gamma_1+7\beta'_1.$$

En résolvant l'équation (15) par rapport à α_1, après y avoir remplacé δ_1 par $I - \alpha_1$, on trouve

$$(18) \qquad \alpha_1 = \frac{-3024\rho - 216\sigma + 337I \pm \sqrt{156(7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2) + 337(I^2 - 4)}}{674}.$$

Dans le cas où I est pair, on peut simplifier un peu cette formule. En posant $I = 2I'$, il vient

$$(19) \qquad \alpha_1 = \frac{-1512\rho - 108\sigma + 337I' \pm \sqrt{39(7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2) + 337(I'^2 - 1)}}{337}.$$

La forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$, qui paraît jouer un rôle fondamental dans la théorie du groupe, a pour déterminant 337. Cette circonstance suffit à indiquer la nature très complexe du groupe G_{13}.

Pour que les formules (18) et (19) fournissent pour α_1 des valeurs acceptables, il faut que les valeurs numériques des quantités placées sous les radicaux soient carrés parfaits. Par suite, le groupe n'admet aucune substitution dont l'invariant soit divisible par 3. En effet, si I était congru à zéro, mod 3, la quantité placée sous le radical dans la formule (18) serait congrue à -1, mod 3, et non reste quadratique de 3. Distinguons maintenant deux cas :

I est impair; $337(I^2 - 4)$ doit être reste quadratique par rapport au module 156.

I' doit être congru à $0, \pm 1, \pm 9, \pm 11$, mod 26, sous réserve de n'être pas divisible par 3.

I' est pair. $337(I'^2 - 1)$ doit être reste quadratique mod 39. I' doit être congru à $0, \pm 1, \pm 2, \pm 6$, mod 13, sous la même réserve.

La valeur de I ou de I' une fois choisie, on aura à résoudre en nombres entiers l'une des deux équations

$$156u + 337(I^2 - 4) = v^2, \qquad 39u + 337(I'^2 - 1) = v^2,$$

par rapport à u et à v. Il faudra ensuite chercher à représenter le nombre u par la forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$.

Quand dans les équations (18) ou (19) on a trouvé des valeurs de ρ, σ, I ou I' qui rendent les quantités placées sous les radicaux des carrés parfaits, ces mêmes valeurs rendent *toujours entière* l'une des deux valeurs de α_1, et, par conséquent, fournissent une substitution du groupe de G_{13}. En effet, le produit des deux valeurs de α_1 est $\frac{841^2+1}{337}$; donc l'un des deux numérateurs dans (18) doit être divisible par 337, qui est premier; que I soit pair ou impair, les deux numérateurs sont toujours pairs. Donc une des deux valeurs fournies par la formule (18) est non seulement rationnelle, mais entière.

Ce procédé, en décomposant la difficulté, rend le problème praticable et permet de rechercher méthodiquement les plus simples substitutions du groupe. Remarquons que, une substitution une fois obtenue, on peut en déduire immédiatement cinq autres en la transformant par les puissances de la substitution $\sum$. Voici les résultats (¹). Les quatre nombres inscrits dans chaque parenthèse indiquent les valeurs des coefficients α_1, β'_1, γ_1, δ_1.

$\mathrm{I} = 1$ (période 3).

$$(-4, -1, 7, 5) = \sum^2,$$

(− 82, − 19, 127, 83), (− 88, − 19, 145, 89), (− 118, − 25, 193, 119),
(− 142, − 31, 223, 143), (− 136, − 31, 205, 137), (− 106, − 25, 157, 107).

$\mathrm{I} = 2$ (paraboliques).

(− 83, − 19, 132, 85), (− 98, − 21, 163, 100), (− 131, − 28, 213, 133),
(− 149, − 33, 232, 151), (− 134, − 31, 201, 136), (− 101, − 24, 151, 103),
(− 89, − 21, 136, 91), (− 86, − 19, 141, 88), (− 113, − 24, 187, 115),
(− 143, − 31, 228, 145), (− 146, − 33, 223, 148) (− 119, − 28, 177, 121).

$\mathrm{I} = 4$ (hyperboliques).

(− 115, − 26, 187, 119), (− 145, − 31, 242, 149), (− 190, − 41, 307, 194),
(− 205, − 46, 317, 209), (− 175, − 41, 262, 179), (− 130, − 31, 197, 134).

$\mathrm{I} = 11$ (hyperboliques).

(− 35, − 9, 65, 46), (− 47, − 11, 87, 58), (− 65, − 15, 113, 76),
(− 71, − 17, 117, 82), (− 59, − 15, 95, 70), (− 41, − 11, 69, 52).

$\mathrm{I} = 13$ (hyperboliques).

(− 397, − 89, 649, 410), (− 511, − 109, 851, 524), ...

(¹) Les substitutions placées sur la même ligne horizontale sont dans l'ordre où elles sont écrites, les transformées de la première de cette ligne par les puissances successives de Σ.

$I = 14$ (hyperboliques).

$$(-35, -10, 62, 49),\quad (-29, -8, 58, 43),\quad (-41, -10, 80, 55),$$
$$(-59, -14, 106, 73),\quad (-65, -16, 110, 79),\quad (-53, -14, 88, 67).$$

$I = 17$ (hyperboliques).

$$(-65, -17, 113, 82),\quad (-71, -17, 131, 88),\quad (-101, -23, 179, 118),$$
$$(-125, -29, 209, 142),\quad (-119, -29, 191, 136),\quad (-89, -23, 143, 106),$$
$$(-152, -37, 247, 169),\quad (-164, -37, 283, 181),\quad (-224, -49, 379, 241),$$
$$(-272, -61, 439, 289),\quad (-260, -61, 403, 277),\quad (-200, -49, 307, 217).$$

$I = 22$ (hyperboliques).

$$(-103, -26, 178, 125),\quad (-121, -28, 218, 143),\quad (-169, -38, 292, 191),$$
$$(-199, -46, 326, 221),\quad (-181, -44, 286, 203),\quad (-133, -34, 212, 155),$$
$$(-109, -26, 196, 131),\quad (-151, -34, 266, 173),\quad (-193, -44, 322, 215),$$
$$(-193, -46, 308, 215),\quad (-151, -38, 238, 173),\quad (-109, -28, 182, 131),$$
$$(-124, -31, 209, 146),\quad (-139, -32, 247, 161),\quad (-193, -43, 332, 215),$$
$$(-232, -53, 379, 254),\quad (-217, -52, 341, 239),\quad (-154, -41, 256, 176),$$
$$(-133, -31, 236, 155),\quad (-184, -41, 319, 206),\quad (-229, -52, 377, 251),$$
$$(-223, -53, 352, 245),\quad (-172, -43, 269, 194),\quad (-125, -32, 211, 149).$$

$I = 25$ (hyperboliques).

$$(-10, -5, 33, 35),\quad (2, -3, 11, 23),\quad (20, 1, -15, 5),$$
$$(26, 3, -19, -1),\quad (14, 1, 3, 11),\quad (-4, -3, 29, 29),$$
$$(-89, -17, 123, 114),\quad (-112, -29, 183, 137),\quad \ldots .$$

$I = 26$ (hyperboliques).

$$(-101, -26, 170, 127),\quad \ldots .$$

On trouve les relations

$$\begin{aligned}(5, 1, 7, -4) &= (-35, -10, 62, 49)(-35, -9, 65, 46)\\ &= (-35, -9, 65, 46)(-41, -10, 80, 55),\end{aligned}$$
$$(-35, -9, 65, 46)(-88, -19, 145, 89) = (-29, -8, 58, 43).$$

Le groupe G_{13} est contenu dans six autres groupes. En effet, considérons les solutions en nombres entiers de l'équation (16), pour lesquelles β_1 n'est pas divisible par 3. β'_1 est alors fractionnaire. Rien n'empêche cependant de construire avec ces nombres une substitution S_j (1). On trouve que $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6$ sont fractionnaires.

(1) D'après les formules de la page 9 du Mémoire déjà cité.

Les formules de composition (17) montrent d'ailleurs aisément que les coefficients A_1, B_1, Γ_1, Δ_1 obtenus en composant deux de ces systèmes sont entiers. Donc l'ensemble des solutions en nombres entiers de l'équation (16) définit un groupe de substitutions S_j que nous appellerons G'_{13} et qui contient G_{13}. En transformant ce groupe par la substitution $\sum$ et par ses puissances, on obtient cinq autres groupes distincts entre eux et du premier G''_{13}, G'''_{13}, ..., $G^{(6)}_{13}$.

On peut former les substitutions de G'_{13} par un procédé analogue à celui qui a servi à former les substitutions de G_{13}. Posons dans la relation (16)

$$\beta_1 = -10\rho - \sigma, \qquad \gamma_1 = 21\rho + 2\sigma, \qquad \delta_1 = I - \alpha_1,$$

et résolvons par rapport à α_1, il vient

$$(20) \qquad \alpha_1 = \frac{337I - 9576\rho - 936\sigma \pm \sqrt{337(I^2-4) + 52(14\rho^2 - 15\rho\sigma - 2\sigma^2)}}{674}.$$

Lorsque I est pair, posons encore $I = 2I'$; la formule devient alors

$$(21) \qquad \alpha_1 = \frac{337I' - 4788\rho - 468\sigma \pm \sqrt{337(I'^2-1) + 13(14\rho^2 - 15\rho\sigma - 2\sigma^2)}}{337}.$$

Tout revient à obtenir des valeurs de I, I', ρ, σ rendant les radicaux (20) ou (21) rationnels. On trouve que les seules valeurs de I qui puissent convenir à des substitutions du groupe sont celles congrues à 0, 1, 2, 4, 9, 11, 12, mod 13.

On pourrait obtenir, pour le calcul des substitutions du groupe, des formules plus curieuses, mais moins commodes que les formules (20) et (21). Posons, dans la relation (16),

$$\beta_1 = 271\rho - 336\sigma,$$
$$\gamma_1 = -567\rho + 703\sigma,$$

on aura

$$\alpha_1 = \frac{337I + 259056\rho - 291816\sigma \pm \sqrt{337(I^2-4) - 52(7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2)}}{337},$$

où figure la forme qui entrait déjà dans l'équation (18), mais avec un signe contraire. D'ailleurs cette forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$ et son égale et de signe contraire $-7\rho^2 - \rho\sigma + 12\sigma^2$ sont de la même classe, comme on le reconnaît en développant leurs racines en fractions continues. On pourrait donc obtenir une formule analogue à la formule (18) et où la forme $7\rho^2 + \rho\sigma - 12\sigma^2$ serait affectée du signe $+$, mais les coefficients de cette formule sont extrêmement compliqués.

Voici les valeurs de α_1, β'_1, γ_1, δ_1 pour quelques substitutions du groupe G'_{13} :

$$\begin{gathered}(-10, -\tfrac{7}{3}, 15, 10), \quad (-15, -\tfrac{10}{3}, 23, 15), \quad (-11, -\tfrac{7}{3}, 18, 11),\\ (-35, -\tfrac{25}{3}, 53, 36), \quad (39, -\tfrac{28}{3}, 59, 41),\\ (-44, -\tfrac{31}{3}, 67, 46), \quad (-79, -\tfrac{56}{3}, 118, 81),\\ (-5, -\tfrac{5}{3}, 10, 9), \quad (-76, -\tfrac{55}{3}, 115, 80).\end{gathered}$$

Citons encore un exemple de la forme $\Phi(x, y, z, u)$. Il s'obtient en adoptant pour j une racine $15^{\text{ième}}$ primitive de l'unité et en considérant le groupe G_{15} des substitutions S :

$$S, \left(z, \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}\right),$$

où les coefficients sont des nombres complexes de la forme

$$a_j = \sum \alpha_h j^h \qquad (h = 1, 2, 4, 8),$$

et où le changement de j en j^2 dans S réalise la transformation de S par la substitution de période 4 $\left(z, \frac{-2}{z+2}\right)$. On trouve que les β_h doivent être pairs. Soit $\beta_h = 2\beta'_h$.

Le déterminant d'une substitution paire est

$$-7\alpha_1^2 + 14\alpha_1\beta'_1 - 14\alpha_1\gamma_1 + 15\alpha_1\delta_1 - 14\beta'^2_1 - 2\beta'_1\gamma_1 - 14\beta'_1\delta_1 - 14\gamma_1^2 + 14\gamma_1\delta_1 - 7\delta_1^2.$$

En remplaçant β'_1 par $\frac{\beta_1}{2}$, on trouve précisément une forme Φ.

Le déterminant d'une substitution impaire est

$$-5\alpha_1^2 + 10\alpha_1\beta'_1 - 10\alpha_1\gamma_1 - 15\alpha_1\delta_1 - 10\beta'^2_1 - 10\beta'_1\gamma_1 - 10\beta'_1\delta_1 - 10\gamma_1^2 + 10\gamma_1\delta_1 - 5\delta_1^2;$$

il n'existe donc, comme dans le cas du nombre 13, pas de substitution impaire à déterminant 1 (1).

---

(1) Comparer le travail de M. Fricke : *Ueber eine besondere Classe discontinuirlicher Grüppen reeller linearer Substitutionen* (*Mathematische Annalen*, 1891), où l'isomor-

IV.

Nous allons maintenant rechercher si, à chaque système x, y, z, u, on peut faire correspondre une substitution d'un groupe fuchsien, $\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, par les formules

$$
(\mathrm{A}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \eta_{11} x + \eta_{12} y + \eta_{13} z + \eta_{14} u,\\
\beta &= \eta_{21} x + \eta_{22} y + \eta_{23} z + \eta_{24} u,\\
\gamma &= \eta_{31} x + \eta_{32} y + \eta_{33} z + \eta_{34} u,\\
\delta &= \eta_{41} x + \eta_{42} y + \eta_{43} z + \eta_{44} u,
\end{aligned}
\right.
$$

où les η sont seize nombres fixes; de telle sorte qu'au système x_1, y_1, z_1, u_1, composé de x, y, z, u et de X, Y, Z, U, corresponde la substitution

$$
\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} = \frac{\mathrm{A}\dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} + \mathrm{B}}{\Gamma\dfrac{\alpha z + \delta}{\gamma z + \delta} + \Delta},
$$

nous aurons ainsi les équations

$$
\begin{aligned}
&\eta_{11} x_1 + \eta_{12} y_1 + \eta_{13} z_1 + \eta_{14} u_1\\
&\quad = (\eta_{11}\mathrm{X} + \eta_{12}\mathrm{Y} + \eta_{13}\mathrm{Z} + \eta_{14}\mathrm{U})(\eta_{11} x + \eta_{12} y + \eta_{13} z + \eta_{14} u)\\
&\qquad + (\eta_{21}\mathrm{X} + \eta_{22}\mathrm{Y} + \eta_{23}\mathrm{Z} + \eta_{24}\mathrm{U})(\eta_{31} x + \eta_{32} y + \eta_{33} z + \eta_{34} u), \qquad \ldots,
\end{aligned}
$$

qui, si l'on y remplace x_1, y_1, z_1, u_1 par leurs valeurs (A) doivent se réduire à des identités. On obtient ainsi soixante-quatre relations entre les η. Elles se partagent en quatre groupes. J'écris seulement les équations du premier groupe :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\eta_{11}^2 \qquad + \eta_{21}\eta_{31} &= -(\mathrm{A} + \mathrm{D})\eta_{11} + \mathrm{A}\eta_{14},\\
\eta_{11}\eta_{12} + \eta_{21}\eta_{32} &= -(\mathrm{A} + \mathrm{D})\eta_{12} - \mathrm{A}'\eta_{13} + \mathrm{B}\eta_{14},\\
\eta_{11}\eta_{13} + \eta_{21}\eta_{33} &= \mathrm{C}\eta_{11} + \mathrm{A}''\eta_{12} - \mathrm{A}\eta_{13},\\
\eta_{11}\eta_{14} + \eta_{21}\eta_{34} &= -\mathrm{A}\eta_{11} - \mathrm{A}\eta_{14},
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\eta_{11}\eta_{12} + \eta_{22}\eta_{31} &= \mathrm{B}\eta_{11} - \mathrm{A}\eta_{12} + \mathrm{A}'\eta_{13},\\
\eta_{12}^2 \qquad + \eta_{22}\eta_{32} &= \mathrm{A}'\eta_{11} + \mathrm{A}'\eta_{14},\\
\eta_{12}\eta_{13} + \eta_{22}\eta_{33} &= (\mathrm{E} - \mathrm{A})\eta_{11} - \mathrm{C}\eta_{12} - \mathrm{B}\eta_{13} + \mathrm{A}\eta_{14},\\
\eta_{12}\eta_{14} + \eta_{22}\eta_{34} &= -\mathrm{B}\eta_{11} - (\mathrm{A} + \mathrm{D})\eta_{12} - \mathrm{A}'\eta_{13};
\end{aligned}
\right.
$$

---

phisme de certains groupes avec eux-mêmes est réalisé par une substitution de période 4. Ce travail porte la date du 7 janvier 1891 et, par conséquent, est un peu antérieur au travail de l'auteur *Sur certains groupes fuchsiens formés avec les racines d'équations binômes* (*Annales de Toulouse*).

$$\left\{\begin{array}{l}
\eta_{11}\eta_{13}+\eta_{23}\eta_{31}=-A''\eta_{12}-(A+D)\eta_{13}+C\eta_{14},\\
\eta_{12}\eta_{13}+\eta_{23}\eta_{32}=A\eta_{11}+C\eta_{12}+B\eta_{13}+(E-A)\eta_{14},\\
\eta_{13}^2\quad+\eta_{23}\eta_{33}=A''\eta_{11}+A''\eta_{14},\\
\eta_{13}\eta_{14}+\eta_{23}\eta_{34}=A''\eta_{12}-A\eta_{13}-C\eta_{14},
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\eta_{11}\eta_{14}+\eta_{24}\eta_{31}=-A\eta_{11}-A\eta_{14},\\
\eta_{12}\eta_{14}+\eta_{24}\eta_{32}=-A\eta_{12}+A'\eta_{13}-B\eta_{14},\\
\eta_{13}\eta_{14}+\eta_{24}\eta_{33}=-C\eta_{11}-A''\eta_{12}-(A+D)\eta_{13},\\
\eta_{14}^2\quad+\eta_{24}\eta_{34}=A\eta_{11}-(A+D)\eta_{14}.
\end{array}\right.$$

En éliminant η_{31}, η_{32}, η_{33}, η_{34} entre les quatre premières et les quatre dernières équations, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\eta_{21}}{\eta_{24}}&=\frac{\eta_{11}^2+(A+D)\eta_{11}-A\eta_{14}}{\eta_{11}\eta_{14}+A\eta_{11}+A\eta_{14}}=\frac{\eta_{11}\eta_{12}+(A+D)\eta_{12}+A'\eta_{13}-A\eta_{14}}{\eta_{12}\eta_{14}+A\eta_{12}-A'\eta_{13}+B\eta_{14}}\\
&=\frac{\eta_{11}\eta_{13}-C\eta_{11}-A''\eta_{12}+A\eta_{13}}{\eta_{13}\eta_{14}+C\eta_{11}+A''\eta_{12}+(A+D)\eta_{13}}=\frac{\eta_{11}\eta_{14}+A\eta_{11}+A\eta_{14}}{\eta_{14}^2-A\eta_{11}+(A+D)\eta_{14}},\end{aligned}$$

et, en ajoutant termes à termes les deux rapports extrêmes,

$$=\frac{\eta_{11}(\eta_{11}+\eta_{14}+D+2A)}{\eta_{14}(\eta_{11}+\eta_{14}+D+2A)},$$

l'hypothèse $\frac{\eta_{11}}{\eta_{14}}=\frac{\eta_{21}}{\eta_{24}}$ est inadmissible, car elle conduirait à poser tous les η proportionnels : donc

$$\eta_{11}+\eta_{14}=-D-2A \qquad \text{et} \qquad \eta_{21}+\eta_{24}=0;$$

ces équations deviennent alors des identités. On trouve facilement

$$\eta_{31}+\eta_{34}=0, \qquad \eta_{41}+\eta_{44}=-D-2A.$$

En éliminant η_{34}, η_{32}, η_{33}, η_{34} entre les quatre premières équations et les quatre suivantes, il vient

$$\frac{\eta_{21}}{\eta_{22}}=\frac{\eta_{11}^2+(A+D)\eta_{11}-A\eta_{14}}{\eta_{11}\eta_{12}-B\eta_{11}+A\eta_{12}-A'\eta_{13}}=\frac{\eta_{11}\eta_{12}+(A+D)\eta_{12}+A'\eta_{13}-A\eta_{14}}{\eta_{12}^2-A'\eta_{11}-A'\eta_{14}}=\ldots.$$

L'égalité du second et du troisième rapport fournit une relation entre η_{11}, η_{12}, η_{13}, η_{14} ; rendons cette relation homogène à l'aide de l'égalité

$$\frac{\eta_{11}+\eta_{14}}{-D-2A}=1,$$

il vient, après simplifications,

$$A\eta_{11}^2 + A''\eta_{12}^2 + A'\eta_{13}^2 + A\eta_{14}^2 + (B\eta_{13} + C\eta_{12})(\eta_{14} - \eta_{11}) + D\eta_{12}\eta_{13} + E\eta_{11}\eta_{14} = 0.$$

On pourra prendre pour η_{11}, η_{12}, η_{13}, η_{14} quatre nombres quelconques vérifiant cette équation et l'équation

$$\eta_{11} + \eta_{14} = -D - 2A;$$

les autres nombres η sont alors déterminés (¹).

V.

Plus généralement, soit un système de quatre nombres x_1, x_2, x_3, x_4; nous conviendrons, pour abréger, de représenter ce système par (x). On dira que le système (X) résulte de la *composition du système* (x) *avec le système* (X'), si l'on a (²)

$$X_i = \sum_{j=1}^{4} x_j \sum_{h=1}^{4} a_{ijh} X'_h \qquad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{22}$$

et l'on écrira

$$(X) = (x)(X'). \tag{23}$$

On peut se proposer de chercher les conditions que doivent remplir les coefficients a_{ijh} pour que la composition des systèmes suive le *principe associatif*, c'est-à-dire que l'on ait

$$(x)[(x')(X'')] = [(x)(x')](X''). \tag{24}$$

Désignons par (X') le produit symbolique $(x')(X'')$. On aura

$$X'_h = \sum_{k=1}^{4} x'_k \sum_{h=1}^{4} a_{hkl} X''_l \qquad (h = 1, 2, 3, 4), \tag{25}$$

(¹) La marche suivie ici est la même que celle adoptée par M. Bianchi dans son travail : *Sopra certi gruppi fuchsiani reducibili à gruppi modulari* (*Rendiconti della Accademia dei Lincei*, 1890). La forme Φ présente beaucoup d'analogie avec la forme quadratique à indéterminées conjuguées de M. Picard, qui sert de point de départ à M. Bianchi.

(²) Comparer les travaux de Kronecker : *Ueber Composition von Systemen* dans les dernières années des *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*.

et, en portant dans (22) les valeurs de X'_h fournies par les équations (25)

$$X_i = \sum_{j,k,l=1}^{4,4,4} x_j x'_k X''_l \sum_{h=1}^{4} a_{ijh} a_{hkl}. \tag{26}$$

Soit (x'') le produit symbolique $(x)(x')$; on a

$$x''_m = \sum_{j=1}^{4} x_j \sum_{k=1}^{4} a_{mjk} x'_k. \tag{27}$$

D'ailleurs on doit avoir

$$(X) = (x'')(X''),$$

et, par suite,

$$X_i = \sum_{m=1}^{4} x''_m \sum_{l=1}^{4} a_{iml} X''_l, \tag{28}$$

et, en éliminant les x''_m entre les équations (27) et (28), on obtient

$$X_i = \sum_{j,k,l=1}^{4,4,4} x_j x'_k X''_l \sum_{m=1}^{4} a_{mjk} a_{iml}. \tag{29}$$

On doit donc avoir, pour tous les systèmes de valeurs de j, h, k, l,

$$\sum_{h=1}^{4} a_{ijh} a_{hkl} = \sum_{m=1}^{4} a_{mjk} a_{iml}. \tag{30}$$

Ces équations sont au nombre de deux cent cinquante-six, mais elles ne sont évidemment pas toutes distinctes, car, d'après ce qui précède, nous en possédons des solutions contenant des constantes arbitraires. Sans les discuter complètement, on peut en déduire quelques conséquences intéressantes. Si dans l'équation (30) on donne à j, k, l la même valeur, il vient

$$\sum_{h=1}^{k} a_{hjj}(a_{ijh} - a_{ihj}) = 0. \tag{31}$$

Dans (31) donnons à i les valeurs 1, 2, 3, 4. Nous obtenons quatre équations dans lesquelles les coefficients de a_{jjj} sont nuls, ces équations étant homogènes par rapport aux a_{hjj}, il faut, ou bien que l'on ait

$$a_{hjj} = 0 \qquad (h \neq j),$$

ou bien que tous les déterminants de la matrice

$$\text{(M)} \qquad | a_{ijh} - a_{ihj} |,$$

où j est fixe, où i prend les valeurs 1, 2, 3, 4 et h les mêmes valeurs, moins la valeur j, soient nuls. Cette dernière hypothèse paraît la plus importante, car elle se présente dans les formules (3).

On obtient encore aisément les relations

$$(32) \qquad \sum_{h=1}^{4} [a_{hjk}(a_{ilh} - a_{ihl}) + a_{hlj}(a_{ikh} - a_{ihk}) + a_{hkl}(a_{ijh} - a_{ihj})] = 0$$
$$(i = 1, 2, 3, 4);$$

chacune de ces équations ne contient que neuf termes, parce que les multiplicateurs de a_{hjk}, a_{hlj}, a_{hkl} sont nuls respectivement pour $h = l, k, j$.

Cherchons la condition pour qu'il existe un système unité (ξ), c'est-à-dire pour que les nombres du système $(x\xi)$ soient proportionnels à ceux du système (x), quel que soit (x). On devra avoir

$$(33) \qquad \sum_{h=1}^{4} a_{ijh}\xi_h = 0 \qquad (j \neq i),$$

et

$$(34) \qquad \sum_{h=1}^{4} a_{iih}\xi_h = \text{S},$$

S désignant un certain nombre, le même pour les quatre valeurs $i = 1, 2, 3, 4$. Les conditions d'existence des nombres ξ_h et S s'expriment par la nullité d'un certain nombre de déterminants qui s'écrivent sans difficulté.

Quelles sont les conditions pour qu'à chaque système correspondent les substitutions d'un groupe de substitutions linéaires, de telle sorte qu'au système formé en composant (x) avec (X') corresponde la substitution obtenue en multipliant la substitution correspondant au premier système par la substitution correspondant au second. C'est une généralisation du problème du § IV ? En définissant les nombres η comme dans ce paragraphe, on doit avoir

$$
\left.
\begin{array}{ll}
(35) & \eta_{1j}\eta_{1h} + \eta_{2j}\eta_{3h} = \sum_{i=1}^{4} \eta_{1i} a_{ijh} \\
(36) & \eta_{1j}\eta_{2h} + \eta_{2j}\eta_{4h} = \sum_{i=1}^{4} \eta_{2i} a_{ijh} \\
(37) & \eta_{3j}\eta_{1h} + \eta_{4j}\eta_{3h} = \sum_{i=1}^{4} \eta_{3i} a_{ijh} \\
(38) & \eta_{3j}\eta_{2h} + \eta_{4j}\eta_{4h} = \sum_{i=1}^{4} \eta_{4i} a_{ijh}
\end{array}
\right\} \quad (j, h = 1, 2, 3, 4).
$$

Si la correspondance a lieu, il existe évidemment un système unité, et, comme à ce système doit correspondre la substitution unité, on a

$$
(39) \qquad \sum_{h=1}^{4} \xi_h \eta_{1h} = \sum_{h=1}^{4} \xi_h \eta_{4h} = \mathrm{T}, \qquad \sum_{h=1}^{4} \xi_h \eta_{2h} = \sum_{h=1}^{4} \xi_h \eta_{3h} = 0.
$$

Parmi les équations (35), je considère celles qui sont relatives à $j = 1$, $h = 1, 2, 3, 4$, et je les ajoute après les avoir multipliées par $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$. Il vient

$$\eta_{11}(\mathrm{S} - \mathrm{T}) = 0.$$

On voit facilement que l'hypothèse $\eta_{11} = 0$ ne convient pas. Il faut donc que T et S soient égaux.

En éliminant les η_{3h} entre les équations (35), on obtient les relations

$$
(40) \left\{
\begin{array}{l}
\eta_{1h}\eta_{1n} \sum_{i=1}^{4} a_{imk}\eta_{1i} + \eta_{1k}\eta_{1m} \sum_{i=1}^{4} a_{inh}\eta_{1i} - \eta_{1k}\eta_{1n} \sum_{i=1}^{4} a_{imh}\eta_{1i} - \eta_{1h}\eta_{1m} \sum_{i=1}^{4} a_{ink}\eta_{1i} \\
\qquad + \left(\sum_{i=1}^{4} a_{imh}\eta_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{ink}\eta_{1i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{4} a_{inh}\eta_{1i}\right)\left(\sum_{i=1}^{4} a_{imk}\eta_{1i}\right) = 0 \\
\qquad\qquad (h, k, m, n = 1, 2, 3, 4).
\end{array}
\right.
$$

Toutes ces relations doivent se réduire à une seule, en tenant compte de la relation $\mathrm{T} = \mathrm{S}$. En effet, il doit exister, si la correspondance est possible, une infinité double de nombres η qui réalisent cette correspondance. Enfin la relation (40) doit s'abaisser au second degré, car si l'on considère deux systèmes inverses l'un de l'autre, en exprimant que le produit des deux substitutions correspondantes est égal à 1, on obtient une relation du second degré entre les η, qui n'est évidemment pas identique (¹).

NOTE RELATIVE A CERTAINES SUBSTITUTIONS COMPLEXES.

Dans un travail antérieur, j'ai mentionné, mais sans donner de méthode générale pour les former, des substitutions complexes $\sum_j$ formées avec une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, telles que

$$(1) \qquad \sum_j \sum_j{}^{\rho} \cdots \sum_j{}^{\rho^{\frac{p-1}{2}}} = 1.$$

On peut employer les procédés suivants, que je me bornerai à expliquer sur des exemples. Soit $p = 7$. Les racines primitives troisièmes de l'unité vérifient l'équation

$$(2) \qquad \omega^2 + \omega + 1 = 0;$$

considérons la substitution de z à z' définie par la relation

$$(3) \qquad \frac{z' + j^2 + j^5 + 2\omega(j^4 + j^3)}{z' + j^2 + j^5 + 2\omega^2(j^4 + j^3)} = \omega \frac{z + j + j^6 + 2\omega(j^2 + j^5)}{z + j + j^6 + 2\omega^2(j^2 + j^5)};$$

dans chacune des deux fractions, le dénominateur ne diffère du numérateur que par le changement de ω en ω^2. La forme (3) montre évidemment que cette substitution jouit de la propriété (1); mais elle ne contient pas ω. En effet, par un calcul facile, on trouve

$$z' = \frac{z(-j^2 - j^5 + 2j^4 + 2j^3) - 5(j + j^6) - 2(j^2 + j^5) + j^4 + j^3}{z + j + j^6}:$$

c'est une substitution complexe qui jouit de la propriété demandée.

Considérons une substitution de la forme

$$z' = \frac{[m_1(j + j^6) + m_2(j^2 + j^5) + m_3(j^3 + j^4)]z + n_1(j + j^6) + n_2(j^2 + j^5) + n_3(j^3 + j^4)}{[p_1(j + j^6) + p_2(j^2 + j^5) + p_3(j^3 + j^4)]z + q_1(j + j^6) + q_2(j^2 + j^5) + q_3(j^3 + j^4)}.$$

(¹) *Voir* le Mémoire déjà cité de M. Picard.

En posant

$$z = \frac{x}{y}, \qquad z' = \frac{x'}{y'},$$

nous pourrons remplacer la substitution précédente par une substitution à deux variables

$$(4)\quad \begin{cases} x' = [m_1(j+j^6) + m_2(j^2+j^5) + m_3(j^3+j^4)]x \\ \qquad + [n_1(j+j^6) + n_2(j^2+j^5) + n_3(j^3+j^4)]y, \\ y' = [p_1(j+j^6) + p_2(j^2+j^5) + p_3(j^3+j^4)]x \\ \qquad + [q_1(j+j^6) + q_2(j^2+j^5) + q_3(j^3+j^4)]y. \end{cases}$$

Soient

$$\begin{array}{lll} x(j+j^6) = x_1, & x(j^2+j^5) = x_2, & x(j^3+j^4) = x_3, \\ y(j+j^6) = y_1, & y(j^2+j^5) = y_2, & y(j^3+j^4) = y_3, \\ x'(j^3+j^4) = x'_1, & x'(j+j^6) = x'_2, & x'(j^2+j^5) = x'_3, \\ y'(j^3+j^4) = y'_1, & y'(j+j^6) = y'_2, & y'(j^2+j^5) = y'_3. \end{array}$$

La substitution complexe (4) est remplacée par la substitution à six variables

$$(5)\quad \begin{cases} x'_1 = (m_2 - m_3)x_1 + (m_1 + m_2 - 2m_3)x_2 \\ \qquad + (n_2 - 2m_3)x_3 + (n_2 - n_3)y_1 + (n_1 + n_2 - 2n_3)y_2 + (n_1 - 2n_3)y_3, \\ x'_2 = (m_2 - 2m_1)x_1 + (m_3 - m_1)x_2 \\ \qquad + (m_2 + m_3 - 2m_1)x_3 + (n_2 - 2n_1)y_1 + (n_3 - n_1)y_2 + (n_2 + n_3 - 2n_1)y_3, \\ x'_3 = (m_1 + m_3 - 2m_2)x_1 + (m_3 - 2m_2)x_2 \\ \qquad + (m_1 - m_2)x_3 + (n_1 + n_3 - 2n_2)y_1 + (n_3 - 2n_2)y_2 + (n_1 - n_2)y_3, \\ y'_1 = (p_2 - p_3)x_1 + (p_1 + p_2 - 2p_3)x_2 \\ \qquad + (p_1 - 2p_3)x_3 + (q_2 - q_3)y_1 + (q_1 + q_2 - 2q_3)y_2 + (q_1 - 2q_3)y_3, \\ y'_2 = (p_2 - 2p_1)x_1 + (p_3 - p_1)x_2 \\ \qquad + (p_2 + p_3 - 2p_1)x_3 + (q_2 - 2q_1)y_1 + (q_3 - q_1)y_2 + (q_2 + q_3 - 2q_1)y_3, \\ y'_3 = (p_1 + p_3 - 2p_2)x_1 + (p_3 - 2p_2)x_2 \\ \qquad + (p_1 - p_2)x_3 + (q_1 + q_3 - 2q_2)y_1 + (q_3 - 2q_2)y_2 + (q_1 - q_2)y_3. \end{cases}$$

Il suffit d'exprimer que celle-ci est de période 6, ce qui aura lieu d'après une théorie connue.