NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$,

PAR M. A. LAFAY,

Lieutenant d'Artillerie au 11[e] bataillon de forteresse, à Lyon.

1. Dans cette Note, nous allons étudier la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ à l'aide des formules générales suivantes qui peuvent être utilisées dans bien des cas analogues.

De la relation évidente

$$(0)\qquad 0 = \int_r^q f(x)\,dx - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f(n+1-u)\,du,$$

on déduit, en intégrant par parties l'intégrale placée sous le signe $\sum$ et en utilisant les propriétés bien connues des polynômes bernoulliens, $\varphi_\alpha(u)$,

$$(1)\qquad \sum_r^{q-1} f(n) = \int_r^q f(x)\,dx - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f'(n+1-u)\,du,$$

$$(2)\qquad \sum_r^{q-1} f(n) = \left[\int f(x)\,dx - \frac{1}{1.2} f(x)\right]_r^q - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f''(n+1-u)\varphi_1(u)\,du,$$

. . . . ,

$$(2p)\qquad \sum_r^{q-1} f(n) = \Bigg[\int f(x)\,dx - \frac{1}{1.2} f(x) + \frac{1}{2} B_1 f'(x) + \ldots + (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} f^{2p-3}(x)\Bigg]_r^q - \sum_r^{q-1} \int_0^1 f^{2p}(n+1-u)\,\varphi_{2p-1}(u)\,du.$$

Ces formules s'obtiennent également de la manière suivante : Dans la formule d'Euler

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx = \frac{h}{1.2}\Delta f(a) + hf(a) - \frac{1}{2}B_1 h^2 \Delta f'(a) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-1}\frac{B_{p-1}h^{2p-2}}{1.2\ldots(2p-2)}\Delta f^{2p-3}(a)$$
$$+ h^{2p}\int_0^h f^{2p}(a+h-u)\varphi_{2p-1}\left(\frac{u}{h}\right)du,$$

faisons $a = n$, $h = 1$; puis effectuons sur l'équation ainsi obtenue l'opération $\sum_r^{q-1}$ par rapport à n, en isolant dans le premier membre le terme $\sum_r^{q-1} f(n)$, nous aurons la formule $(2p)$.

2. L'application de ces formules nécessite l'étude des conditions d'absolue convergence des séries

$$R_\alpha = \sum_r^{q-1}\int_0^1 f^\alpha(n+1-u)\varphi_{\alpha-1}(u)\,du \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2p),$$

lorsque q devient infini; pour cela nous nous servons de la transformation suivante qui simplifie le travail, mais donne naturellement des conditions moins larges.

On a, en désignant par M le maximum de $|\varphi_{\alpha-1}(u)|$ entre o et 1 et en appliquant la relation (o),

$$|R_\alpha| < \sum_r^{q-1}\left|\int_0^1 f^\alpha(n+1-u)\varphi_{\alpha-1}(u)\,du\right|$$
$$< M\sum_r^{q-1}\int_0^1 |f^\alpha(n+1-u)|\,du < M\int_r^q |f^\alpha(x)|\,dx,$$

relations qui permettent d'écrire

$$\text{(A)} \qquad R_\alpha = e^{\omega\sqrt{-1}}\varphi_{\alpha-1}(\theta)\int_0^q |f^\alpha(x)|\,dx \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqq \theta \leqq 1,$$

et montrent qu'il suffit pour que R_α soit absolument convergente que l'intégrale $\int_r^{q=\infty} |f^\alpha(x)|\, dx$ soit finie et déterminée.

3. Considérons maintenant la série $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ dans laquelle $s = a + bi$; il vient en appliquant (1),

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^s} = \int_1^\infty \frac{dx}{x^s} - R_1. \tag{1'}$$

Supposons $a > 0$, la relation (A) montre que la série complémentaire R_1 est absolument convergente; car, $\left|\left(\frac{1}{x^s}\right)'\right| = \left|\frac{-h}{x^{1+s}}\right| = \frac{+\sqrt{a^2+b^2}}{x^{1+a}}$ reste fini dans le champ d'intégration (1 à ∞) et est infiniment petit d'ordre supérieur à 1 pour $x = \infty$.

L'étude de $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ est ainsi ramenée à celle de l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$, c'est-à-dire de

$$\lim_{q=\infty} \left[\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s}\right],$$

et l'on trouve alors facilement que la série considérée est

1° Absolument convergente si $a > 1$;

2° Finie, mais indéterminée comme l'expression $\lim_{x=\infty} \frac{1}{b}(\sin b \,\mathcal{l}x + i \cos b \,\mathcal{l}x)$, si $a = 1$ avec $b \gtrless 0$;

3° Divergente si $a = 1$ avec $b = 0$, ou $a < 1$ avec b quelconque,

et cette dernière conséquence subsiste pour $a \leqq 0$, car dans cette hypothèse (1′) montre que $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$ est la somme algébrique de deux quantités dont les ordres d'infinitude diffèrent et ne peuvent mutuellement se réduire.

4. D'après ce qui précède, $\sum_1^\infty \frac{1}{n^s}$, considérée comme fonction de s, n'est analytiquement bien définie que pour des valeurs de s dont l'affixe se trouve

dans la région du plan déterminée par la condition $a > 1$; mais l'équation

$$\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} = \left(\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{1-s} \right) - R_1$$

nous fournit directement, par la considération de $\lim_{q=\infty} \left[\sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \frac{q^{1-s}}{1-s} \right]$, une fonction de s qui, absolument confondue avec $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^s}$ dans la région $(a > 1)$, conserve des propriétés analytiques bien définies dans la région plus étendue $(a > 0)$, car dans toute cette région la série R_1 reste absolument convergente.

Enfin l'application de la formule $(2p)$ nous conduit à la fonction

$$\zeta(s) = \lim_{q=\infty} \left\{ \sum_1^{q-1} \frac{1}{n^s} - \left[\frac{q^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2} q^{-s} - \frac{1}{2} B_1 s q^{-s-1} + \ldots \right.\right.$$
$$\left.\left. + (-1)^{p-1} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} s(s+1)\ldots(s+2p-4) q^{-s-2p+3} \right] \right\},$$

dont le domaine analytique s'étend indéfiniment pour des valeurs de p, de plus en plus grandes.

Cette fonction $\zeta(s)$ qui se trouve ainsi mise sous la forme

$$(2p') \qquad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} B_1 s - \frac{B_2}{1.2.3.4} s(s+1)(s+2) + \ldots$$
$$+ (-1)^{p-2} \frac{B_{p-1}}{1.2\ldots(2p-2)} s(s+1)\ldots(s+2p-4)$$
$$- s(s+1)\ldots(s+2p-1) \sum_1^{\infty} \int_0^1 \frac{\varphi_{2p-1}(u)}{(n+1-u)^{s+2p}}$$

n'est autre chose que la fonction considérée par Riemann.

5. De la formule $(2p')$ se déduisent facilement quelques propriétés de $\zeta(s)$,

1° $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ ou $(s-1)\zeta(s)$ sont des fonctions holomorphes;

2° $\zeta(-2n) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ (Riemann), car

$$\zeta(-2n) = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \frac{B_1}{1.2} 2n + \ldots$$
$$+ (-1)^i \frac{B_i}{1.2\ldots 2i} 2n(2n-1)\ldots(2n-2i+2) + \ldots + (-1)^n B_n,$$

et le second membre est égal à

$$-(2n!)\varphi_{2n}(x) = -[1^{2n} + 2^{2n} + \ldots + (x-1)^{2n}] \quad \text{pour} \quad x = 1;$$

3° $$\zeta(-2n+1) = (-1)^n \frac{B_n}{2n} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \qquad (\text{M. Stieltjes}),$$

car, comme plus haut, on a

$$\zeta(-2n+1) = -(2n-1)!\,\varphi_{2n-1}(1) + (-1)^n \frac{B_n}{2n}.$$

4° Enfin, de la formule particulière

(1″) $$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + s \sum_1^\infty \int_0^1 (n+1-u)^{-s-1} u\,du$$

déduite de (1), nous tirons, en remplaçant l'intégrale qui y figure par le développement

$$\int_0^1 (n+1-u)^{-s-1} u\,du = \int_0^1 \frac{u\,du}{(n+1-u)^2} + \frac{1-s}{1} \int_0^1 \frac{\mathcal{L}(n+1-u)\,u\,du}{(n+1-u)^2} + \ldots$$
$$+ \frac{(1-s)^i}{1.2\ldots i} \int_0^1 \frac{\mathcal{L}^i(n+1-u)\,u\,du}{(n+1-u)^2} + \ldots$$

et en ordonnant suivant les puissances de $(s-1)$,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + M_0 + M_1(s-1) + \ldots + M_i(s-1)^i + \ldots,$$

dans laquelle

$$M_i = \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i} \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{\mathcal{L}^i(n+1-u) - i\mathcal{L}^{i-1}(n+1-u)}{(n+1-u)^2} u\,du,$$

et l'application de cette même formule (1), dans laquelle on fait $f(x) = \frac{\mathcal{L}^i x}{x}$, donne pour M_i l'expression indiquée par M. Jensen (*Comptes rendus*, t. CIV)

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_i &= \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i} \lim_{q=\infty} \left[\sum_1^{q-1}\left(\frac{1}{n}\mathfrak{L}^i n\right) - \frac{1}{i+1}\mathfrak{L}^{i+1} q\right] \\ &= \frac{(-1)^i}{1.2\ldots i} \sum_1^\infty \int_0^1 \frac{\mathfrak{L}^i(n+1-u) - i\mathfrak{L}^{i-1}(n+1-u)}{(n+1-u)^2}\, u\,du.\end{aligned}$$