
MÉMOIRE

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX A n VARIABLES,

PAR M. A. PELLET.

Dans ce Mémoire, j'expose une méthode nouvelle pour la recherche de ces systèmes, méthode qui conduit à la plupart des systèmes connus et en donne un grand nombre d'autres.

Cette recherche est précédée d'une théorie générale des surfaces à lignes de courbure coordonnées et des systèmes complètement orthogonaux de n familles de surfaces dans l'espace à n dimensions. Il résulte de cette théorie que, étant donné un tel système, on pourra en déduire l'équation, en se bornant aux termes du troisième ordre, d'une surface individuelle en l'un de ses points par des dérivations.

1. Pour que la fonction quadratique de n variables

$$F = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \text{ si } i \neq j,$$

puisse se ramener à une somme de carrés par une substitution orthogonale, il faut et il suffit que, Δ étant le discriminant de

$$F - s(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$$

pour chaque racine de degré q de multiplicité de l'équation en s , $\Delta = 0$, les mineurs de Δ d'ordre égal à $q - 1$ soient tous nuls, ceux d'ordre q ne s'annulant pas tous.

Il est facile de voir que la condition est nécessaire; montrons qu'elle est suffisante.

Supposons que, pour une racine s_1 de l'équation $\Delta = 0$, tous les mineurs de Δ

d'ordre $r - 1$ soient nuls, ceux d'ordre r n'étant pas tous nuls. Les équations

$$(1) \quad \frac{1}{2} \mathbf{F}'_{x_i} - s_1 x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donnent les valeurs de $n - r$ quantités x en fonctions des r autres, que nous supposerons être x_1, x_2, \dots, x_r . La somme $\sum_i x_i^2$ devient alors une fonction quadratique de x_1, x_2, \dots, x_r , que nous désignerons par φ .

Effectuons la substitution

$$(2) \quad x_i = \alpha_{i1} \xi_1 + \dots + \alpha_{in} \xi_n \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

le déterminant des coefficients α étant différent de 0. Donnons à ξ_{r+1}, \dots, ξ_n la valeur 0; les quantités x deviennent des fonctions de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$. On peut choisir les coefficients α de manière que les équations (1) soient satisfaites, quelles que soient les valeurs attribuées aux r variables $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$; ce qui donne $(n - r)r$ équations entre nr quantités α . La fonction φ devient une fonction de $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$. Nous considérerons séparément le cas où le discriminant de φ est nul et celui où il n'est pas nul.

1° Le discriminant de φ n'est pas nul. La fonction φ pouvant se décomposer en une somme de r carrés distincts, nous poserons

$$\varphi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_r^2;$$

ce qui revient à établir les relations

$$\sum_i \alpha_{ik}^2 = 1, \quad \sum_i \alpha_{ik} \alpha_{ij} = 0, \quad k - j \neq 0,$$

k et j étant des entiers différents et chacun d'eux au plus égal à r . Ces nr quantités α peuvent s'exprimer à l'aide de $\frac{r(r-1)}{2}$ paramètres qui sont ceux d'une substitution orthogonale d'ordre r . Les autres quantités α de la substitution (2) peuvent être assujetties aux conditions nécessaires pour que cette substitution soit orthogonale. Substituant aux quantités x leurs valeurs en fonctions des quantités ξ , on a

$$\sum_i x_i^2 = \sum_i \xi_i^2,$$

$$\mathbf{F} = s_1 (\xi_1^2 + \dots + \xi_r^2) + \mathbf{F}_1,$$

\mathbf{F}_1 ne dépendant que de $\xi_{r+1}, \xi_{r+2}, \dots, \xi_n$ et nullement des variables ξ d'indice égal ou inférieur à r .

Le discriminant de la fonction quadratique

$$(s_1 - s)(\xi_1 + \dots + \xi_r^2) + F_1 - s(\xi_{r+1}^2 + \dots + \xi_n^2),$$

égalé à 0, donne la même équation en s que $\Delta = 0$. Il a un seul mineur d'ordre r pouvant être différent de 0 pour $s = s_1$; ce mineur est le discriminant de

$$F_1 - s(\xi_{r+1}^2 + \dots + \xi_n^2);$$

le discriminant de cette dernière fonction ne s'annule donc pas pour $s = s_1$, et s_1 est une racine multiple d'ordre égal précisément à r pour l'équation $\Delta = 0$, autrement les mineurs d'ordre r de Δ s'annuleraient tous pour $s = s_1$, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi si la racine s_1 est d'un ordre de multiplicité supérieur à r , le discriminant de la fonction φ est nul.

2° Le discriminant de φ est nul. Dans ce cas, la racine s_1 est d'ordre de multiplicité supérieur à r .

Supposons, en effet, que φ se décompose en une somme de r_1 carrés distincts, $r_1 < r$. On pourra poser

$$\varphi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{r_1}^2,$$

ce qui donne les relations

$$\begin{aligned} \sum_i \alpha_{ik}^2 &= 1 & (k = 1, 2, \dots, r_1), \\ \sum_i \alpha_{ik}^2 &= 0 & (k = r_1 + 1, r_1 + 2, \dots, r), \\ \sum_i \alpha_{ik} \alpha_{ij} &= 0 & k - j \neq 0. \end{aligned}$$

Ces nr quantités α sont des fonctions de $\frac{r_1(r_1-1)}{2} + (r-r_1)^2$ paramètres.

Partageons l'expression de x_i en deux parties :

$$\begin{aligned} x_i &= \overline{x}_i + \overline{\overline{x}}_i, \\ \overline{x}_i &= \alpha_{i1} \xi_1 + \dots + \alpha_{ir} \xi_r, \\ \overline{\overline{x}}_i &= \alpha_{i,r+1} \xi_{r+1} + \dots + \alpha_{in} \xi_n. \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} F'_{x_i} - s_1 \overline{x}_i &= 0, \\ \sum x_i^2 &= \xi_1^2 + \dots + \xi_r^2 + 2 \sum_i \overline{x}_i \overline{\overline{x}}_i + \sum_i \overline{\overline{x}}_i^2, \\ F &= s_1(\xi_1^2 + \dots + \xi_r^2) + 2s_1 \sum_i \overline{x}_i \overline{\overline{x}}_i + F(\overline{\overline{x}}_1, \dots, \overline{\overline{x}}_n). \end{aligned}$$

Les coefficients des termes en ξ_1, \dots, ξ_r dans $\sum_i x_i^2$ et dans F sont proportionnels, ceux du second degré par rapport à ces variables se réduisant à la somme de r_1 carrés $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_{r_1}^2$. Un calcul facile montre que le discriminant de la nouvelle expression de $F - s \sum_i x_i^2$

$$(s_1 - s) \left(\xi_1^2 + \dots + \xi_{r_1}^2 + 2 \sum_i \overline{x_i x_i} \right) + F(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}) - s \sum_i \overline{x_i^2}$$

admet le facteur $s_1 - s$ avec l'exposant $2r - r_1$.

2. Lorsque les coefficients de la fonction F sont réels, les racines de l'équation en s , $\Delta = 0$, sont réelles et le deuxième cas ne peut se présenter.

En effet, si $\Delta = 0$ admettait une racine imaginaire s_1 , avec le degré de multiplicité q , elle admettrait aussi comme racine la quantité imaginaire conjuguée s'_1 avec le même degré de multiplicité q ; si les mineurs d'ordre r de Δ n'étaient pas tous nuls pour s_1 , ils ne le seraient pas non plus pour s'_1 , et, si l'on pouvait résoudre les équations (1) par rapport à x_{r+1}, \dots, x_n pour $s = s_1$, on pourrait les résoudre par rapport aux mêmes quantités pour $s = s'_1$. En donnant à x_1, \dots, x_r des valeurs réelles quelconques, on serait donc conduit à deux systèmes de valeurs imaginaires conjuguées :

$$\begin{array}{ll} x_{r+1}, & x_{r+2}, \dots, x_n & \text{d'une part,} \\ x'_{r+1}, & x'_{r+2}, \dots, x'_n & \text{d'autre part,} \end{array}$$

satisfaisant à la relation

$$x_1^2 + \dots + x_r^2 + x_{r+1} x'_{r+1} + \dots + x_n x'_n = 0,$$

ce qui est impossible.

Enfin le discriminant de φ ne peut être nul; car les équations

$$\varphi'_{x_1} = 0, \quad \varphi'_{x_2} = 0, \quad \dots, \quad \varphi'_{x_r} = 0$$

seraient satisfaites pour des valeurs de x_1, x_2, \dots, x_r différentes de 0 et réelles, et l'on en déduirait

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 0$$

pour des valeurs des quantités x réelles et non nulles.

3. Soient $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ l'équation d'une surface dans l'espace à n dimensions, et x_1, x_2, \dots, x_n les coordonnées d'un point pour lequel la fonction f est holomorphe, et la somme des carrés de ses dérivées premières différente de 0 :

$$R^2 = f'_{x_1}{}^2 + f'_{x_2}{}^2 + \dots + f'_{x_n}{}^2 \neq 0.$$

Transportant l'origine en ce point, l'équation de la surface devient

$$f_1 + \frac{1}{2}f_2 + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots k} f_k + \dots = 0,$$

f_k étant une fonction entière et homogène de degré k des nouvelles coordonnées h_1, h_2, \dots, h_n . Prenons pour nouveaux axes coordonnés la normale au plan $f_1 = 0$, axe des ζ , et $n - 1$ perpendiculaires entre elles et à celle-ci, axe des $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$. On pourra les choisir si la surface est réelle ainsi que le point pris sur cette surface, de manière que dans le développement de ζ suivant les puissances croissantes des variables ξ , les termes du second degré n'offrent pas de double produit de ces variables

$$\zeta = \frac{1}{2}(a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + \dots + a_{n-1}\xi_{n-1}^2) + \frac{1}{6}\zeta_3 + \dots$$

Les coefficients a_1, a_2, \dots, a_{n-1} courbures de la surface au point considéré sont déterminés par la condition que le discriminant de la fonction quadratique

$$f_2 + aR(h_1^2 + \dots + h_n^2)$$

s'annule pour ces valeurs de a , en supposant les quantités h_i liées par l'équation $f_1 = 0$. Ainsi on aura

$$(1) \quad \begin{aligned} f'_{2h_i} + 2aR h_i + \lambda f'_{x_i} &= 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \\ f_1 &= 0. \end{aligned}$$

L'élimination des quantités h et de l'indéterminée λ donne une équation de degré $n - 1$ en a . Substituant à a une racine de cette équation et résolvant par rapport aux quantités h les équations (1), on obtient l'équation de l'axe des ξ correspondant par rapport aux axes primitifs. Les points pour lesquels il n'y a pas de solution au problème sont situés à l'intersection de la surface $f = 0$ et de la surface lieu des points pour lesquels l'équation en a a des racines multiples ou infinies. Pour certains points de cette intersection, entre autres ceux qui sont réels sur les surfaces réelles, il y a des solutions au problème, mais toujours avec une certaine indétermination (n° 1).

Dans le cas où l'équation de la surface est donnée sous la forme

$$z = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

on a

$$R^2 = 1 + p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_{n-1}^2,$$

en posant $f'_{x_i} = p_i$; et les quantités a sont les racines de l'équation obtenue en annulant le discriminant de la fonction quadratique

$$(2) \quad f_2 - aR[h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_{n-1}^2 + (p_1 h_1 + \dots + p_{n-1} h_{n-1})^2].$$

Pour la surface du second degré

$$\frac{x_1^2}{A_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{A_n^2} - 1 = 0,$$

on a les équations

$$\frac{h_i}{A_i^2} + aR h_i + \lambda \frac{x_i}{A_i^2} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

$$\sum_i \frac{x_i}{A_i^2} h_i = 0,$$

en posant

$$R^2 = \frac{x_1^2}{A_1^4} + \dots + \frac{x_n^2}{A_n^4};$$

d'où

$$\sum_i \frac{x_i^2}{A_i^2 (A_i^2 R a + 1)} = 0.$$

Les axes des ξ sont les normales aux surfaces homofocales à la surface du second degré qui passent par le point considéré

$$\sum_i \frac{x_i^2}{A_i^2 - \rho^2} = 1.$$

4. Nous dirons qu'une surface est à lignes de courbure coordonnées lorsque les n coordonnées d'un point de la surface pourront s'exprimer, comme pour les surfaces du second degré, à l'aide de $n - 1$ paramètres, qui seront ceux des *lignes de courbure*, de façon que lorsque $n - 2$ d'entre eux resteront constants, la courbe obtenue en faisant varier le paramètre restant aura pour tangente en l'un quelconque de ses points une des *directions principales* de la surface. Soient u_1, u_2, \dots, u_{n-1} les paramètres d'un point de la surface de coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n . Le plan tangent aura pour équation

$$\zeta = \sum_i c_i (X_i - x_i) = 0,$$

les X_i étant les coordonnées courantes et les coefficients c_i définis par les équations

$$(1) \quad \sum_i c_i^2 = 1, \quad \sum_i c_i x'_{iu_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1).$$

Les plans normaux aux lignes coordonnées ont pour équations

$$\xi_k = \frac{1}{A_k} \sum_i x'_{iu_k} (X_i - x_i) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n - 1),$$

en posant

$$(2) \quad \Lambda_k^2 = \sum_i x'_{iu_k}{}^2,$$

et supposant les $n - 1$ quantités Λ_k différentes de 0. Si les lignes coordonnées sont orthogonales, on a les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ relations

$$(3) \quad \sum_i x'_{iu_k} x'_{iu_{k'}} = 0 \quad (k - k' \neq 0);$$

et si de plus elles admettent pour tangentes les directions principales de la surface, on a encore les $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ autres relations

$$(4) \quad \sum_i c_i x''_{iu_k u_{k'}} = 0 \quad (k - k' \neq 0).$$

Pour avoir les coordonnées d'un point de la surface

$$(u_1 + v_1, \quad u_2 + v_2, \quad \dots, \quad u_{n-1} + v_{n-1}),$$

par rapport au système d'axes formé par la normale à la surface, axe des ζ , et les directions principales, axes des $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, il faut remplacer dans l'expression de ces quantités X_k par

$$x_k + \sum_i \frac{\partial x_k}{\partial u_i} v_i + \frac{1}{2} \left(\sum_i \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i^2} v_i^2 + 2 \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 x_k}{\partial u_i \partial u_j} v_i v_j \right) + \dots,$$

il vient

$$\xi_k = \Lambda_k v_k + \frac{1}{2\Lambda_k} \left(\sum_j \sum_l m_{jl} v_j v_l \right) + \dots \quad (m_{jl} = m_{lj}, \quad l - j \neq 0),$$

où, d'après les équations (3) et (2),

$$m_{jj} = \sum_i x'_{iu_k} x''_{iu_j^2} = - \sum_i x'_{iu_j} x''_{iu_k u_k} = - \Lambda_j \Lambda'_{ju_k},$$

$$m_{jk} = m_{kj} = \sum_i x'_{iu_k} x''_{iu_k u_j} = \Lambda_k \Lambda'_{ku_j} \quad (j - k \neq 0).$$

Quant à m_{jl} , les indices j et l étant tous deux différents de k , ce coefficient est nul. En effet, il est égal à la somme

$$\sum_i x'_{iu_k} x''_{iu_j u_l}.$$

Or par dérivation, on tire des équations (3)

$$\begin{aligned}\sum_i x'_{iu_k} x''_{iu_j u_l} &= - \sum_i x'_{iu_j} x''_{iu_k u_l}, \\ \sum_i x'_{iu_j} x''_{iu_k u_l} &= - \sum_i x'_{iu_l} x''_{iu_j u_k}, \\ \sum_i x'_{iu_k} x''_{iu_j u_l} &= - \sum_i x'_{iu_l} x''_{iu_j u_k};\end{aligned}$$

et ces trois équations du premier degré exigent que les trois \sum différents qui y figurent soient nuls. En définitive

$$\xi_k = A_k v_k - \frac{1}{2 A_k} \sum_j A_j A'_{ju_k} v_j^2 + \left(\sum_j A'_{ku_j} v_j \right) v_k + \dots,$$

en se bornant aux termes du premier et du second degré par rapport aux quantités v .

Les sommations \sum_j s'étendent aux $n - 1$ valeurs $1, 2, \dots, n - 1$ de l'indice j .

Les termes du second degré dans le développement de ζ peuvent s'écrire

$$\frac{1}{2} \sum_j a_j A_j^2 v_j^2;$$

parmi les termes du troisième degré, ceux qui contiennent trois variables différentes v ont un coefficient nul.

En effet des équations (1) et (4) on tire

$$\sum_i c'_{iu_k} x'_{iu_k} = - \sum_i c_i x''_{iu_k^2} = - A_k^2 a_k, \quad \sum_i c'_{iu_k} x'_{iu_j} = 0 \quad (k - j \neq 0);$$

rapprochant des équations (1), il vient

$$(5) \quad c'_{iu_k} = - a_k x'_{iu_k}, \quad \sum_i c'_{iu_k^2} = A_k^2 a_k^2 = A_0^2 \quad [k = 1, 2, \dots, (n - 1)],$$

ce sont les formules d'Olinde Rodrigues.

Le coefficient du produit $v_k v_j v_l$ dans le développement de ζ est égal à

$\sum_i c_i x'''_{iu_k u_j u_l}$; or des équations (4) on tire

$$\sum_i c_i x'''_{iu_k u_j u_l} = - \sum_i c'_{iu_k} x''_{iu_j u_l} = a_k \sum_i x'_{iu_l} x''_{iu_j u_l}.$$

Si les indices k, j, l sont différents deux à deux, ce coefficient est donc nul.
Le coefficient de $v_k^2 v_j$ est égal à

$$\frac{1}{2} a_k \sum A_k A'_{ku_j};$$

et celui de v_k^3 à

$$\frac{1}{6} (3 A_k A'_{kv_1} a_k + A_k^2 a'_{kv_k}).$$

Si maintenant on prend pour variables indépendantes $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ au lieu de v_1, \dots, v_{n-1} , on a

$$\zeta = \frac{1}{2} \sum_j a_j \xi_j^2 + \frac{1}{6} \zeta_3 + \dots + \frac{1}{1.2 \dots p} \zeta_p + \dots,$$

ζ_p désignant un polynome entier et homogène de degré p des variables ξ . ζ_3 , on le voit facilement, ne contient pas de termes renfermant trois des variables ξ ; le nombre de ses termes est donc $(n-1)^2$.

Pour avoir facilement l'expression de ζ_3 , remarquons que les courbures au point $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ de la surface sont données par les racines de l'équation en a , obtenue en annulant le discriminant de la fonction quadratique correspondant à la formule (2) du n° 4; en se bornant aux termes du premier ordre par rapport aux variables ξ , cette équation devient

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} (a_k + \frac{1}{6} \zeta_3'' \xi_k^2 - a) = 0;$$

ainsi la différentielle totale de a_k est égale à $\frac{1}{6} \zeta_3'' \xi_k^2$, et en définitive

$$\zeta_3 = \frac{\partial a_1}{\partial s_1} \xi_1^3 + \dots + \frac{\partial a_{n-1}}{\partial s_{n-1}} \xi_{n-1}^3 + 3 \sum_i \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial s_j} \xi_i^2 \xi_j,$$

les nombres i, j dans la somme double étant différents, et $\frac{\partial a_i}{\partial s_j}$ représentant $\frac{1}{A_j} \frac{\partial a_i}{\partial u_j}$.

5. Toute surface à lignes de courbure coordonnées fait partie d'une infinité de systèmes complètement orthogonaux (DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les données curvilignes*, n° 104). Réciproquement, toute surface comprise dans un système orthogonal admet des lignes de courbure coordonnées.

Pour un système complètement orthogonal, les coordonnées x_1, x_2, \dots, x_n d'un point sont des fonctions de n paramètres u_1, u_2, \dots, u_n satisfaisant aux équations, au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$,

$$\sum x'_{iu_k} x'_{iu_l} = 0 \quad (k-l \neq 0).$$

Nous supposons la somme $\sum_i x'_{iu_k}{}^2$ différente de 0 et nous la désignerons par A_k^2 . Des n équations

$$dx_i = \sum_k x'_{iu_k} du_k \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

on déduit

$$\sum_i x'_{iu_k} dx_i = A_k^2 du_k;$$

donc les quantités u_k étant exprimées en fonctions des quantités x_i , leurs dérivées partielles seront données par la formule

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_i} = \frac{1}{A_k^2} x'_{iu_k},$$

et, par suite,

$$\sum_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{A_k A_l} \right)^2 \sum_i x'_{iu_k} x'_{iu_l} = 0.$$

Prenons pour nouveaux axes coordonnés, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, les normales aux surfaces qu'on obtient en laissant constants successivement u_1, u_2, \dots, u_n et faisant varier les $n - 1$ autres quantités u . Ainsi

$$\xi_k = \frac{1}{A_k} \sum_i x'_{iu_k} (X_i - x_i).$$

Le point correspondant aux accroissements v_1, v_2, \dots, v_n des paramètres aura pour coordonnées, dans le nouveau système,

$$\xi_k = A_k v_k - \frac{1}{2A_k} \sum_j A_j A'_{ju_k} v_j^2 + \left(\sum_j A'_{ku_j} v_j \right) v_k + \dots,$$

en se bornant à écrire les termes du premier et du second degré. Les termes du deuxième degré sont au nombre de $2n - 1$, après réduction, ceux contenant le produit de deux quantités v ayant un coefficient nul, lorsque l'un des indices des quantités v n'est pas égal à k . On arrive à cette expression par un calcul identique à celui du numéro précédent.

6. Si l'on fait $v_k = 0$ et si l'on élimine les autres quantités v , on a, pour l'équation de la surface correspondante,

$$\xi_k = - \frac{1}{2A_k} \sum_j \frac{A'_{ju_k}}{A_j} v_j^2 + \dots,$$

en se bornant à écrire les termes du second degré dans le second membre. Ainsi

les surfaces qui passent par un point admettent pour directions principales en ce point les normales aux autres surfaces qui y passent.

Ce qui est la généralisation du théorème de Dupin relatif aux systèmes triples orthogonaux.

Nous poserons

$$-\frac{1}{A_k} \frac{\partial A_j}{\partial u_k} = \mathfrak{A}_{kj}, \quad \mathfrak{A}_{kj} = A_j a_{kj};$$

j ne peut prendre la valeur k ; nous ferons, pour simplifier les formules, $\mathfrak{A}_{kk} = 0$, à l'imitation de M. Darboux.

$$\mathfrak{A}_{kk} = a_{kk} = 0 \quad [k = 1, 2, \dots, (n-1)].$$

Désignons les cosinus directeurs de la normale à la surface $v_k = 0$ avec les anciens axes par $c_{k1}, c_{k2}, \dots, c_{kn}$. On a

$$\sum_i c_{ki}^2 = 1, \quad c_{ki} = \frac{x'_{iu_k}}{A_k} = \frac{\partial x_i}{\partial s_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Mais, d'après les formules d'Olinde Rodrigues (5) du n° 4, on a

$$(2) \quad \frac{\partial c_{ki}}{\partial u_l} + a_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial u_l} = 0;$$

remplaçant $\frac{\partial x_i}{\partial u_l}$ par sa valeur $A_l c_{li}$, il vient

$$\frac{\partial c_{ki}}{\partial u_l} + \mathfrak{A}_{kl} c_{li} = 0 \quad (k - l \neq 0).$$

Pour avoir la dérivée de c_{ki} par rapport à u_k , nous partirons de la formule $\sum_i c_{ki}^2 = 1$; on en déduit

$$c_{ki} c'_{kiu_k} = -c_{1i} c'_{1ju_k} - \dots - c_{k-1,i} c'_{k-1,iu_k} - c_{k+1,iu_k} c'_{k+1,iu_k} - \dots,$$

$$\frac{\partial c_{ki}}{\partial u_k} = \sum_j \mathfrak{A}_{jk} c_{ji},$$

en appliquant la formule (2) et se rappelant que $\mathfrak{A}_{kk} = 0$. Ces formules sont identiques aux formules (24) et (26) des *Leçons sur les systèmes orthogonaux* de M. Darboux, n° 92. On en déduit ensuite les relations du n° 93 entre les fonctions \mathfrak{A}_{jk} qui sont désignées dans cet Ouvrage par $-\beta_{jk}$.

7. Recherche des systèmes orthogonaux. — Soit la fonction quadratique

$$\sum_i \sum_j m_{ij} h_i h_j - \lambda (h_1^2 + \dots + h_n^2), \quad m_{ij} = m_{ji};$$

les coefficients m_{ij} étant des fonctions des n variables x_1, x_2, \dots, x_n et λ une indéterminée. Pour les valeurs de λ qui annulent son discriminant Δ , les n équations

$$\sum_i m_{ij} h_j - 2\lambda h_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

admettent le système de solutions en h

$$\frac{h_1}{\delta_1} = \frac{h_2}{\delta_2} = \dots = \frac{h_n}{\delta_n},$$

$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ étant des mineurs du premier ordre de Δ . Si les différentielles totales

$$(1) \quad \delta_1 dx_1 + \dots + \delta_n dx_n = 0$$

sont intégrables pour toutes les valeurs de λ racines de l'équation $\Delta = 0$, on en déduira un système orthogonal, puisque pour les surfaces correspondant aux deux racines λ_1, λ_2 de $\Delta = 0$, on aura

$$\sum_i {}^1\delta_i {}^2\delta_i = 0,$$

${}^1\delta_i, {}^2\delta_i$ représentant δ_i pour les valeurs λ_1, λ_2 de λ . Ainsi, il faut que la condition d'intégrabilité de la différentielle totale (1)

$$\delta_i(\delta'_{jx_k} - \delta'_{kx_j}) + \delta_j(\delta'_{kx_l} - \delta'_{lx_k}) + \delta_k(\delta'_{lx_j} - \delta'_{jx_l}) = 0$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs λ racines de l'équation $\Delta = 0$, les indices i, j, k différant deux à deux. Prenons pour équation en λ

$$(2) \quad \sum \left(\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} - Z_i \right) = D,$$

X_i, Y_i, Z_i étant des fonctions de x_i seulement et D une constante. Exprimons que la différentielle totale

$$\sum_i \frac{X_i}{Y_i - \lambda} dx_i = 0$$

est intégrable pour chaque racine λ de cette équation (2). On a

$$\left[\sum_i \left(\frac{X_i}{Y_i - \lambda} \right)^2 \right] \lambda' = \frac{X}{(Y - \lambda)^2} N$$

en posant

$$N = -\frac{Z'}{X} \lambda^2 + 2 \left(\frac{Z'}{X} Y - X' \right) \lambda + 2 X' Y - \frac{Z'}{X} Y^2 - X Y'$$

et x représentant l'une quelconque des variables x_1, x_2, \dots, x_n . La condition d'intégrabilité devient

$$\begin{vmatrix} N_i & Y_i & 1 \\ N_j & Y_j & 1 \\ N_k & Y_k & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

λ dans le déterminant qui forme le premier membre de cette équation devant prendre n valeurs différentes, il faut qu'il soit nul quel que soit λ pour $n > 2$.

Ainsi

$$-\frac{Z'_i}{X_i} = a Y_i + b, \quad \frac{Z'_i}{X_i} Y_i - X'_i = c Y_i + d,$$

$$2 X'_i Y_i - X_i Y'_i - \frac{Z'_i}{X_i} Y_i^2 = e Y_i + f,$$

l'indice i prenant les valeurs $1, 2, \dots, n$, et a, b, c, d, e, f étant des constantes.

Il en résulte

$$N = (aY + b)\lambda^2 + 2(cY + d)\lambda + eY + f,$$

$$X' = -[aY^2 + (b + c)Y + d],$$

$$XY' = -[aY^3 + (b + 2c)Y^2 + 2d + e]Y + f = -P(Y),$$

$$XY'' = -[2aY^2 + (b + 3c)Y + d + e]Y',$$

$$\frac{Y''}{Y'} = \frac{2aY^2 + (b + 3c)Y + d + e}{P(Y)} Y'.$$

L'intégration de la dernière équation donne $CY' = \varphi(Y)$, $\varphi(\lambda)$ étant une fonction qui devient nulle ou infinie pour les valeurs de Y qui annulent $P(Y)$ et C une constante. On en déduit

$$x_i = C_i \int \frac{dY_i}{\varphi(Y_i)}, \quad X_i = -\frac{P(Y_i)}{Y'_i}, \quad Z_i = C_i \int \frac{(aY_i + b)P(Y_i)}{\varphi(Y_i)} dY_i,$$

C_i étant une constante différente avec l'indice i . Quant aux constantes qu'on peut introduire dans les intégrales définies qui figurent dans l'expression de x et celle de Z , elles n'ont aucune importance. On les choisira de manière à les simplifier.

8. L'intégrale de la différence totale

$$(1) \quad \sum_i \frac{X_i}{Y_i - \lambda_h} dx_i = 0,$$

où λ_h est une racine de l'équation

$$\sum_i \left(\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} - Z_i \right) = D,$$

est donnée par la formule

$$(2) \quad \int_{\alpha}^{\lambda_h} \omega(\lambda) \left[\sum_i \left(\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} - Z_i \right) - D \right] d\lambda = u_h,$$

u_h étant une constante, la limite inférieure α de l'intégrale représentant l'infini ou une racine de l'équation $P(\alpha) = 0$, suivant les cas, et enfin $\omega(\lambda)$ une solution de l'équation différentielle

$$(3) \quad P(\lambda) \omega'(\lambda) + 2[a\lambda^2 + (b+c)\lambda + d]\omega(\lambda) = 0.$$

En effet, on a

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i} = \int_{\alpha}^{\lambda_h} \omega(\lambda) \frac{X_i N_i}{(Y_i - \lambda)^2} d\lambda,$$

la limite supérieure λ_h , seule variable avec x_i , annulant la fonction placée sous le signe \int . Or

$$\frac{N_i}{(Y_i - \lambda)^2} = \frac{P(\lambda)}{(Y_i - \lambda)^2} + \frac{a\lambda^2 + 2c\lambda + e}{Y_i - \lambda};$$

donc si

$$(4) \quad [\omega(\lambda) P(\lambda)]' = (a\lambda^2 + 2c\lambda + e)\omega(\lambda),$$

on aura

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_i} = X_i \int_{\alpha}^{\lambda_h} \omega(\lambda) \frac{N_i}{(Y_i - \lambda)^2} d\lambda = \frac{X_i}{Y_i - \lambda_h} P(\lambda_h) \omega(\lambda_h),$$

en choisissant α de manière que

$$\frac{P(\alpha) \omega(\alpha)}{Y_i - \alpha}$$

soit nul. En développant l'équation (4), on obtient l'équation (3).

L'intégrale (2) est illusoire lorsque le point x_1, x_2, \dots, x_n est situé sur l'une des surfaces

$$\sum_i \left(\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda_0} - Z_i \right) = D,$$

λ_0 étant une racine de l'équation $P(\lambda) = 0$ pour $\lambda_h = \lambda_0$. Mais ces surfaces au nombre de trois, si α n'est pas nul, font partie du système et remplacent les intégrales correspondantes. Nous les appellerons *surfaces singulières du système*.

Posons

$$\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda_0} - Z_i = v_i.$$

La surface $\sum v_i = D$ a ses lignes de courbure coordonnées; les fonctions v_i

doivent donc satisfaire à une même équation de la forme

$$v' v''' = k v''^2 + k_1 v'' + k_2,$$

k, k_1, k_2 étant des constantes (DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, n° 78).

En effet, on a successivement

$$v'_i = \frac{X_i N_i}{(Y_i - \lambda_0)^2} = (a\lambda_0^2 + 2c\lambda_0 + e) \frac{X_i}{Y_i - \lambda_0},$$

puisque $P(\lambda_0) = 0$;

$$v''_i = (a\lambda_0^2 + 2c\lambda_0 + e) \frac{(Y_i - \lambda_0)X'_i - X_i Y'_i}{(Y_i - \lambda_0)^2},$$

le numérateur de v''_i est du second degré par rapport à Y_i , et il s'annule pour Y_i égal à λ_0 ; il est donc divisible par $Y_i - \lambda_0$ et l'on a

$$v''_i = k + \frac{k_1}{Y_i - \lambda_0},$$

k et k_1 étant des constantes.

$$v'''_i = -\frac{k_1}{(Y_i - \lambda_0)^2} Y'_i,$$

$$v'_i v'''_i = -k_1 (a\lambda_0^2 + 2c\lambda_0 + e) \frac{X_i Y'_i}{(Y_i - \lambda_0)^3}.$$

Le produit $X_i Y'_i$ s'annule pour $Y_i = \lambda_0$, et en désignant par k_2, k_3, k_4 de nouvelles constantes, on a

$$v'_i v'''_i = k_2 \frac{1}{(Y_i - \lambda_0)^2} + \frac{k_3}{Y_i - \lambda_0} + k_4.$$

L'élimination de $\frac{1}{Y_i - \lambda_0}$ entre les expressions de v''_i et le produit $v'_i v'''_i$ conduit à la relation que nous voulions établir.

La fonction v_i se réduit à une constante lorsque $a = c = e = 0$.

9. Lorsque a et b sont nuls, les fonctions Z_i sont toutes nulles, et l'on a pour l'équation en λ

$$\sum_i \frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} = D.$$

Lorsque D est nul, cette équation a seulement $n - 1$ racines; la $n^{\text{ième}}$ peut être considérée comme infinie et la famille de surfaces correspondantes est donnée par l'intégrale

$$(1) \quad \sum_i \int_{\alpha_i}^{x_i} X_i dx_i = u_n,$$

les limites inférieures α_i étant des constantes choisies à volonté et u_n le paramètre de la famille.

Ainsi lorsque D n'est pas nul, les surfaces du système orthogonal s'obtiennent en faisant varier u dans l'enveloppe de la surface

$$\int_{\alpha}^{\lambda} \omega(\lambda) \left[\sum_i \left(\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} \right) - D \right] d\lambda = u,$$

où λ est le paramètre et u considéré comme constant.

Lorsque D est nul, le système orthogonal est formé de la famille de surfaces (1) et de la famille de surfaces obtenues en faisant varier u dans l'enveloppe de la surface

$$\int_{\alpha}^{\lambda} \omega(\lambda) \left(\sum_i \frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} \right) d\lambda = u.$$

Les formules (3) du n° 7 se simplifient

$$(1) \quad \begin{aligned} N &= 2(cY + d)\lambda + eY + f, \\ X' &= -(cY + d), \quad XY' = -[2cY^2 + (2d + e)Y + f], \\ [2c\lambda^2 + (2d + e)\lambda + f]\omega'(\lambda) + 2(c\lambda + d)\omega(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Si c n'est pas nul, en éliminant Y des deux avant-dernières équations, on a

$$X'X'' = 2(X' + d)^2 - (2d + e)(X' + d) + cf.$$

Les systèmes orthogonaux qu'on obtient coïncident avec ceux donnés par M. Darboux dans ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, nos 80 et suivants.

Si c est nul, on ne peut exprimer Y en fonction de X' , et l'on obtient des systèmes qui n'ont pas été considérés par M. Darboux.

10. Nous nous plaçons dans l'hypothèse $a = b = c = 0$, et d différent de 0. On a

$$\begin{aligned} X &= -dx, \quad \frac{Y'}{(2d + e)Y + f} = \frac{1}{dx}, \\ [(2d + e)\lambda + f]\omega' + 2d\omega &= 0. \end{aligned}$$

Si $2d + e$ n'est pas nul, on peut supposer sans nuire à la généralité $f = 0$, et

il vient, en posant $2 + \frac{e}{a} = m$,

$$Y_i = C_i x_i^m, \quad \omega = \lambda^{-\frac{2}{m}}.$$

Le système orthogonal correspondant à $D \neq 0$ est formé des surfaces obtenues en faisant varier u dans l'équation de l'enveloppe de la surface

$$\int_{\alpha}^{\lambda} \lambda^{-\frac{2}{m}} \left[\sum_i \left(\frac{x_i^2}{C_i x_i^m - \lambda} \right) - 1 \right] d\lambda = u.$$

On en tire

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -m \lambda^{-\frac{2+m}{m}} \frac{x_i}{C_i x_i^m - \lambda},$$

α représentant 0 ou ∞ suivant que $-\frac{2}{m}$ est positif ou négatif. Le système admet une seule surface singulière qui a pour équation

$$\sum_i \frac{x_i^{2-m}}{C_i} = 1.$$

J'ai établi ce système (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, janvier 1899) par une autre marche.

On peut intégrer lorsque $-\frac{2}{m}$ est un nombre entier positif ou négatif, et les coefficients des termes logarithmiques sont indépendants des variables x .

Pour $m = -1$, on a

$$u = \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^2}{2} \sum_i x_i^2 + \lambda \sum_i C_i x_i + \sum_i C_i^2 \ell(C_i - \lambda x_i),$$

surface singulière

$$\sum_i \frac{x_i^3}{C_i} = 1.$$

Pour $m = -2$,

$$u = \frac{\lambda^2}{2} + \lambda \sum_i x_i^2 + \sum_i C_i \ell(C_i - \lambda x_i^2),$$

surface singulière

$$\sum_i \frac{x_i^4}{C_i} = 1.$$

Pour $m = 1$,

$$u = \frac{1}{\lambda} \left(1 - \sum_i \frac{x_i}{C_i} \right) + \sum_i \frac{1}{C_i^2} \ell \frac{1}{C_i x_i - \lambda}.$$

La surface singulière du système est le plan

$$\sum_i \frac{x_i}{C_i} = 1.$$

Ainsi le système détermine dans ce plan, c'est-à-dire dans un espace à $n - 1$ dimensions, un système orthogonal. Effectuons la substitution orthogonale

$$x_i = c_i \zeta + \sum_{j=1}^{j=n-1} c_{ij} \xi_j.$$

Pour les surfaces u_1, u_2, \dots, u_n qui passent par un même point $\zeta, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$, on a

$$\frac{\partial u_j}{\partial \zeta} \frac{\partial u_k}{\partial \zeta} + \sum_i \frac{\partial u_j}{\partial \xi_i} \frac{\partial u_k}{\partial \xi_i} = 0 \quad (j - k \neq 0).$$

Si les coefficients c satisfont aux relations

$$C_1 c_1 = C_2 c_2 = \dots = C_n c_n,$$

et si, de plus, ζ est déterminé par l'équation

$$\zeta \sum_i \frac{c_i}{C_i} = 1,$$

la dérivée de u par rapport à ζ est nulle. On obtient donc un système orthogonal dans l'espace à $n - 1$ dimensions ξ_1, \dots, ξ_{n-1} en faisant varier u dans l'équation de l'enveloppe de la surface

$$\sum c_i^2 l \frac{\lambda}{x_i - \lambda c_i} = u,$$

les fonctions x_i étant définies par l'équation

$$x_i = c_i \zeta + \sum_j c_{ij} \xi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1, n)$$

où ζ est une indéterminée.

En annulant D , on obtient un système de cônes orthogonaux en faisant varier u dans l'équation de l'enveloppe du cône

$$\int_{\alpha}^{\lambda} \lambda^{-\frac{2}{m}} \left(\sum_i \frac{x_i^2}{C_i x_i^m - \lambda} \right) d\lambda = u;$$

le système admet pour cône singulier

$$\sum_i \frac{x_i^{2-m}}{C_i} = 0.$$

Enfin, si dans les formules relatives aux cônes dans l'espace à $n + 2$ dimensions, on remplace x_1, x_2, \dots, x_{n+2} par y_1, y_2, \dots, y_{n+2} coordonnées sphériques dans l'espace à n dimensions, satisfaisant à la relation

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n+2}^2 = 0,$$

on a des systèmes orthogonaux en coordonnées sphériques.

Si $2d + e = 0$, on ne peut supposer f nul, alors

$$X_i = dx_i, \quad Y_i = \frac{f}{d} lx_i + C_i, \quad \omega = e^{-\frac{2d\lambda}{f}},$$

e représentant dans ω la base des logarithmes népériens. Le système est formé des surfaces que l'on obtient en faisant varier u dans l'équation de l'enveloppe de la surface

$$\int_{\alpha}^{\lambda} e^{-\frac{2\lambda}{m}} \left[\left(\sum_i \frac{x_i^2}{mlx_i + C_i - \lambda} \right) - 1 \right] d\lambda = u,$$

où l'on a posé $m = \frac{f}{d}$. La limite inférieure de l'intégrale α doit être choisie de manière que $e^{-\frac{2\alpha}{m}}$ soit nul;

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -m e^{-\frac{2\lambda}{m}} \frac{x_i}{mlx_i + C_i - \lambda}.$$

11. Nous supposons $a = b = c = 0$, comme précédemment, mais de plus $d = 0$.

Les équations (1) du n° 9 deviennent

$$\begin{aligned} X' &= 0, & XY' &= -(eY + f), \\ N &= eY + f, & \omega' &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\omega = 1.$$

Si e est différent de 0, on peut supposer f nul. Alors les fonctions X_i sont des constantes, que nous désignerons par C_i ;

$$Y_i' = -\frac{e}{C_i} Y_i.$$

On a en premier lieu le système orthogonal formé par les surfaces que l'on ob-

tient en faisant varier u dans l'équation de l'enveloppe de la surface

$$\sum_i \left(C_i^2 \ell \frac{Y_i - \lambda}{Y_i} \right) + D\lambda = u;$$

en second lieu le système provenant de l'enveloppe de la surface

$$\sum_i C_i^2 \ell \frac{Y_i - \lambda}{Y_i} = u.$$

Les surfaces de ce second système sont des cylindres perpendiculaires à la famille de plans parallèles

$$\sum_i C_i x_i = u_n.$$

On peut supposer $\sum_i C_i^2 = 1$; remplaçons C_i par c_i et effectuons la substitution orthogonale

$$x_i = C_i \zeta + \sum_{j=1}^{j=n-1} c_{ij} \zeta_j,$$

où ζ est une indéterminée que l'on peut, sans nuire à la généralité, remplacer par 0. Le système orthogonal de cylindres donne un système orthogonal de surfaces dans l'espace à $n - 1$ dimensions $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$.

Lorsque e est nul, la fonction Y_i devient $-f \frac{x_i}{C_i}$, et les formules restent les mêmes.

12. Si a et b ne sont pas nuls simultanément, les surfaces des systèmes définis aux nos 7 et 8 s'obtiennent, sauf les surfaces singulières au nombre de trois au plus, en faisant varier u dans l'équation de l'enveloppe de la surface

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\lambda} \omega(\lambda) \left[\sum_i \left(\frac{X_i^2}{Y_i - \lambda} - Z_i \right) - D \right] d\lambda = u,$$

où u est regardé comme constant et λ le paramètre. La limite inférieure α doit être choisie de façon que

$$\frac{P(\alpha) \omega(\alpha)}{Y_i - \alpha}$$

soit nul, de sorte que $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ se réduit à

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = P(\lambda) \omega(\lambda) \frac{X_i}{Y_i - \lambda}.$$

Nous appellerons l'équation (1), l'équation génératrice du système.

Nous avons étudié le cas où a et b sont nuls tous deux; nous allons supposer a nul et b différent de 0, $b \neq 0$.

Les formules des nos 7 et 8 deviennent

$$\begin{aligned} X' &= -(b+c)Y - d, & Z' &= -bX, \\ XY' &= -[(b+2c)Y^2 + (2d+e)Y + f] = -P(Y), \\ \omega'(\lambda)P(\lambda) + 2\omega(\lambda)[(b+c)\lambda + d] &= 0. \end{aligned}$$

Si $b+c$ est différent de 0, Y peut s'exprimer en fonction de X' et l'on tombe sur les systèmes orthogonaux du n° 84 des *Leçons sur les systèmes orthogonaux* de M. Darboux.

Supposons donc $c = -b$. Les formules précédentes se simplifient; on peut supposer f nul sans nuire à la généralité et l'on a

$$\begin{aligned} X' &= -d, & Z' &= -bX, \\ XY' &= -[-bY^2 + (2d+e)Y] = -P(Y), \\ \omega'(\lambda)P(\lambda) + 2d\omega(\lambda) &= 0; \end{aligned}$$

d'où

$$X_i = -dx_i, \quad Z = bd \frac{x_i^2}{2},$$

si d n'est pas nul; et pour l'équation génératrice du système

$$\int_{\alpha}^{\lambda} \omega(\lambda) \left[\sum_i x_i^2 \left(\frac{1}{Y_i - \lambda} - \frac{b}{2d} \right) - D \right] d\lambda = u.$$

Y_i et $\omega(\lambda)$ ont les expressions

$$Y_i = \frac{-m d C_i x_i^m}{1 - b C_i x_i^m}, \quad \omega(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{b\lambda - md} \right)^{-\frac{2}{m}},$$

en posant $\frac{2d+e}{d} = m$, supposé différent de 0; et si $(2d+e)$ est nul

$$Y_i = \frac{d}{b|x_i + C_i|}, \quad \omega = e^{-\frac{2d}{b\lambda}};$$

dans l'expression de ω , e désigne la base des logarithmes népériens.

Les surfaces singulières, lorsque m est différent de 0, ont pour équation

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{x_i^{2-m}}{C_i} - b \frac{2-m}{2} \sum_i x_i^2 + m d D &= 0, \\ \sum_i C_i x_i^{2+m} - \frac{2+m}{2b} \sum_i x_i^2 - \frac{m d D}{b^2} &= 0. \end{aligned}$$

L'une d'elles est une sphère lorsque $m = \pm 1$. En transformant le système dans ce cas par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant sur la sphère, on obtient un système orthogonal contenant un plan comme surface individuelle et par suite on en déduira comme au n° 10 un système orthogonal dans un espace à $(n - 1)$ dimensions.

13. Nous avons supposé d différent de 0, a et $b + c$ étant nuls; lorsque d est nul aussi, on peut faire $\omega = 1$, les fonctions X_i sont des constantes que nous désignerons par C_i , et l'on a

$$Z_i = -bC_i x_i,$$

$$Z_i = -bC_i x_i, \quad C_i Y'_i = bY_i^2 - eY_i,$$

d'où

$$\frac{1}{e} l \frac{bY_i - e}{Y_i} = \frac{x_i}{C_i},$$

si e n'est pas nul, et

$$Y_i = \frac{C_i}{bx_i},$$

si e est nul. On a dans les deux cas pour équation génératrice du système orthogonal

$$\sum_i C_i^2 l \frac{Y_i - \lambda}{Y_i} - \left(b \sum_i C_i x_i + D \right) \lambda = u.$$

Il n'y a aucune surface singulière si e est nul, et deux si $e \neq 0$

$$\sum_i \frac{C_i^2}{Y_i} + b \sum_i C_i x_i + D = 0,$$

$$\sum_i \frac{C_i^2}{Y_i - \frac{e}{b}} + b \sum_i C_i x_i + D = 0.$$

14. La fonction $\omega(\lambda)$ est une puissance de λ lorsque

$$0 = m[a\lambda^3 + (b + 2e)\lambda^2 + (2d + e)\lambda + f] + 2[a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d]\lambda,$$

quel que soit λ ; d'où

$$(m + 2)a = 0, \quad (m + 2)b + 2(m + 1)c = 0,$$

$$2(m + 1)d + me = 0, \quad f = 0.$$

Si m n'est pas égal à -2 , a doit être nul et l'on retombe sur l'un des cas étudiés.

Pour $m = -2$, on a

$$c = f = 0, \quad d + e = 0.$$

Les équations (3) du n° 7 deviennent

$$\begin{aligned} X' &= -(aY^2 + bY + d), & XY' &= -(aY^2 + bY + d)Y = -P(Y), \\ XY'' &= -(2aY + b)YY', & Z' &= -(aY + b)X. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} C_i Y_i &= aY_i^2 + bY_i + d, & X_i &= -C_i Y_i, \\ Z_i &= C_i(aY_i^2 + bY_i) = C_i(-X_i' - d); \\ Z_i &= C_i(-X_i - dx_i) = C_i^2 Y_i - C_i dx_i; \end{aligned}$$

et pour l'équation génératrice du système

$$(1) \quad \int_{\alpha}^{\lambda} \frac{1}{\lambda^2} \left[\sum_i \left(\frac{C_i^2 Y_i^2}{Y_i - \lambda} - C_i^2 Y_i + C_i dx_i \right) - D \right] d\lambda = u,$$

et l'on a

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{a\lambda^2 + b\lambda + d}{\lambda} \frac{C_i Y_i}{Y_i - \lambda},$$

en prenant pour limite inférieure α de l'intégrale une racine de l'équation

$$a\alpha^2 + b\alpha + d = 0.$$

En effectuant les calculs, l'équation (1) devient

$$\sum_i C_i^2 l \frac{\lambda(Y_i - \alpha)}{\alpha(Y_i - \lambda)} - \left(d \sum_i C_i x_i - D \right) \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha} \right) = u.$$

Il y a trois surfaces singulières; parmi elles un plan, celle qui correspond à la racine 0 de $P(\lambda) = 0$

$$d \sum_i C_i x_i = D.$$

Effectuons la substitution orthogonale

$$x_i = c_i \zeta + \sum_{j=1}^{j=n-1} c_{ij} \zeta_j \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

si les quantités c_i satisfont aux proportions

$$\frac{c_1}{C_1} = \frac{c_2}{C_2} = \dots = \frac{c_n}{C_n},$$

ce qui suppose $\sum C_i^2 \neq 0$, et si l'on détermine ζ par l'équation

$$d\zeta \sum C_i c_i = D,$$

la dérivée de u par rapport à ζ , $\frac{\partial u}{\partial \zeta}$, est nulle; on a donc, comme au n° 10, un système orthogonal dans l'espace à $n - 1$ dimensions $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$.

15. Le système orthogonal précédent est le seul pour lequel une surface singulière soit plane, lorsque a est différent de 0. Désignons, comme au n° 8, par U la fonction $\frac{X^2}{Y - \alpha} - Z$, α étant une racine de l'équation

$$P(\alpha) = a\alpha^3 + (b + 2c)\alpha^2 + (2d + e)\alpha + f = 0.$$

La surface singulière correspondant à α a pour équation $\sum_i U_i = D$. Elle sera plane si

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{(a\alpha^2 + 2c\alpha + e)X_i}{Y_i - \alpha}$$

se réduit à une constante quel que soit l'indice i . Remarquons qu'on peut supposer $\alpha = 0$ et par suite $f = 0$. On a donc, eu égard aux équations (3) du n° 7,

$$X = KY, \quad X' = -[aY^2 + (b + c)Y + d],$$

$$XY' = -[aY^2 + (b + 2c)Y + 2d + e]Y;$$

il en résulte deux valeurs pour Y'

$$KY' = -[aY^2 + (b + c)Y + d] = -[aY^2 + (b + 2c)Y + 2d + e];$$

K est une constante; d'où

$$c = 0, \quad d + e = 0, \quad f = 0.$$

ce sont précisément les conditions pour que $\omega(\lambda)$ soit égale à λ^{-2} .

16. Cherchons dans quel cas une surface singulière est une sphère. Alors en transformant le système par rayons vecteurs réciproques, le pôle étant sur la sphère, on obtiendra un système dans lequel une surface singulière est un plan; d'où comme au n° 10 un système orthogonal dans un espace à $n - 1$ dimensions.

λ_0 étant la racine de $P(\lambda) = 0$, à laquelle la surface singulière correspond, il faudra qu'on ait, pour que cette surface soit une sphère,

$$\frac{X_i}{Y_i - \lambda_0} = Kx_i + K_i,$$

K et K_i étant des constantes. Substituant dans les équations, provenant des for-

mules (3) du n° 7

$$\mathbf{X}' = -[a\mathbf{Y}^2 + (b+c)\mathbf{Y} + d],$$

$$\mathbf{XY}' = -[a\mathbf{Y}^3 + (b+2c)\mathbf{Y}^2 + (2d+e)(\mathbf{Y}+f)] = -\mathbf{P}(\mathbf{Y}),$$

il vient

$$(\mathbf{K}x_i + \mathbf{K}_i)\mathbf{Y}'_i + \mathbf{K}(\mathbf{Y}_i - \lambda_0) = -[a\mathbf{Y}_i^2 + (b+c)\mathbf{Y}_i + d],$$

$$(\mathbf{K}x_i + \mathbf{K}_i)(\mathbf{Y}_i - \lambda_0)\mathbf{Y}'_i = -\mathbf{P}(\mathbf{Y}_i);$$

d'où

$$\frac{\mathbf{P}(\mathbf{Y}_i)}{\mathbf{Y}_i - \lambda_0} - [a\mathbf{Y}_i^2 + (b+c)\mathbf{Y}_i + d] = \mathbf{K}(\mathbf{Y}_i - \lambda_0).$$

Remplaçant le quotient de $\mathbf{P}(\mathbf{Y}_i)$ par $\mathbf{Y}_i - \lambda_0$ par sa valeur

$$a\mathbf{Y}_i^2 + (a\lambda_0 + b + 2c)\mathbf{Y}_i + a\lambda_0^2 + (b + 2c)\lambda_0 + 2d + e,$$

et réduisant, on a

$$(a\lambda_0 + c)\mathbf{Y}_i + a\lambda_0^2 + (b + 2c)\lambda_0 + d + e = \mathbf{K}(\mathbf{Y} - \lambda_0);$$

ce qui entraîne les deux égalités

$$\mathbf{K} = a\lambda_0 + c, \quad 2a\lambda_0 + (b + 3c)\lambda_0 + d + e = 0.$$

On vérifie qu'elles sont satisfaites dans le cas du système du n° 12, lorsqu'une surface singulière est une sphère, la quantité que nous y avons désignée par m égale à $+1$ ou à -1 .

On peut supposer λ_0 nul; alors $f = 0$, et la condition devient $d + e = 0$. Réciproquement si f est nul, et si, en même temps, $d + e = 0$, à la racine nulle de $\mathbf{P}(\lambda) = 0$ correspond comme surface singulière une sphère.

Il vient

$$\frac{\mathbf{Y}''}{\mathbf{Y}'} = \frac{2a\mathbf{Y} + (b+3c)}{a\mathbf{Y}^2 + (b+2c)\mathbf{Y} + d} \mathbf{Y}',$$

d'où

$$\mathbf{C}_i \mathbf{Y}'_i = [a\mathbf{Y}_i^2 + (b+2c)\mathbf{Y}_i + d] \left(\frac{\mathbf{Y}_i - \lambda_0}{\mathbf{Y}_i - \lambda_1} \right)^{\frac{c}{a(\lambda_0 - \lambda_1)}},$$

λ_0 et λ_1 étant les deux racines de

$$a\lambda^2 + (b+2c)\lambda + d = 0;$$

puis

$$\frac{cx_i + \mathbf{K}_i}{\mathbf{C}_i} = - \left(\frac{\mathbf{Y}_i - \lambda_0}{\mathbf{Y}_i - \lambda_1} \right)^{-\frac{c}{a(\lambda_0 - \lambda_1)}},$$

\mathbf{K}_i étant une nouvelle constante qu'on peut supposer nulle d'ailleurs lorsque \mathbf{C}_i

est différent de 0. Il en résulte

$$(cx_i + K_i)Y_i' = -[aY_i^2 + (b + 2c)Y_i + d],$$

et enfin

$$X_i = \frac{-[aY_i^2 + (b + 2c)Y_i + d]Y_i}{Y_i^2} = (cx_i + K_i)Y_i.$$

Supposant K_i nul, les formules (3) du n° 7 donnent

$$\begin{aligned} Z' &= -(aY + b)X = cx(X' + cY + d) = c(xX)' + cdx, \\ Z &= c^2x^2Y + cd\frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

On a pour fonction génératrice du système

$$u = \int_{\alpha}^{\lambda} \omega(\lambda) \left[\sum x_i^2 \left(\frac{Y_i^2}{Y_i - \lambda} - Y_i - \frac{d}{2c} \right) - D \right] d\lambda,$$

$\omega(\lambda)$ est donné par la formule

$$\omega(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda - \lambda_1} \right)^{\frac{2c}{a(\lambda_0 - \lambda_1)}},$$

α , la limite inférieure, doit être prise égale à l'une des racines λ_0, λ_1 , de

$$a\lambda^2 + (b + 2c)\lambda + d = 0.$$

La sphère, surface singulière du système, a pour équation

$$d \sum_i x_i^2 + 2cD = 0.$$

17. En définitive, à un système de valeurs données aux constantes a, b, c, d, e, f , correspond une classe de systèmes orthogonaux dans l'espace à n dimensions; on les obtient en particulier les n constantes introduites par l'intégration de l'équation du second ordre définissant les fonctions Y_i ,

$$\frac{Y_i'}{Y_i} = \frac{aY_i^2 + (b + 3c)Y_i + d + e}{aY_i^2 + (b + 2c)Y_i^2 + (2d + e)Y_i + f} Y_i;$$

quant à la constante D , en lui attribuant diverses valeurs, on obtient des systèmes homothétiques. Toutefois il faut remarquer qu'une classe de systèmes reste la même quand on change λ en $m\lambda + n$, m et n étant des constantes, ce qui permet de réduire de deux unités le nombre des constantes a, b, c, d, e, f , dans chaque cas.