
SUR

LES POINTS CRITIQUES TRANSCENDANTS,

PAR M. GEORGES RÉMOUNDOS,

A Athènes.



1. Je me propose d'exposer quelques conséquences intéressantes des résultats développés dans ma Thèse ⁽¹⁾ et mes autres travaux sur l'extension aux fonctions multiformes du théorème de M. Picard et de ses généralisations. Pour fixer les idées, considérons la fonction multiforme $u = \varphi(z)$ définie par une équation de la forme

$$(1) \quad F(z, u) = \sigma_0(u) + \sigma_1(u) A_1(z) + \sigma_2(u) A_2(z) + \dots + \sigma_\nu(u) A_\nu(z) = 0,$$

les $\sigma_i(u)$ désignant des fonctions entières de u et les $A_i(z)$ des fonctions entières de z ; u_0 étant une valeur de u , j'ai démontré que la densité des racines de l'équation

$$(1') \quad u_0 = \varphi(z)$$

est, en général, d'ordre égal au plus grand ρ des ordres des fonctions $A_1(z)$, $A_2(z)$, ..., $A_\nu(z)$, que j'appelle *ordre de la fonction multiforme* $u = \varphi(z)$. Si cette densité est d'ordre $\rho' < \rho$, la valeur u_0 est dite *exceptionnelle*; j'ai démontré aussi que $\nu + 1$ valeurs exceptionnelles quelconques $u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu$ doivent satisfaire à la relation suivante

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \sigma_0(u_0) & \sigma_0(u_1) & \sigma_0(u_2) & \dots & \sigma_0(u_\nu) \\ \sigma_1(u_0) & \sigma_1(u_1) & \sigma_1(u_2) & \dots & \sigma_1(u_\nu) \\ \sigma_2(u_0) & \sigma_2(u_1) & \sigma_2(u_2) & \dots & \sigma_2(u_\nu) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_\nu(u_0) & \sigma_\nu(u_1) & \sigma_\nu(u_2) & \dots & \sigma_\nu(u_\nu) \end{vmatrix} = \Sigma(u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu) = 0.$$

⁽¹⁾ *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendentes* (Thèse de Doctorat de l'Université de Paris; Paris, Gauthier-Villars, janvier 1906). Ce Mémoire a paru aussi dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1906.

Je ne compte pas ici les valeurs exceptionnelles, appelées (E) dans ma Thèse, qui doivent annuler tous les coefficients $\sigma_1(u), \sigma_2(u), \dots, \sigma_\nu(u)$, si les fonctions $A_i(z)$ sont supposées linéairement distinctes d'ordre ρ ; s'il n'en est pas ainsi, entre ν valeurs exceptionnelles (E) u_1, u_2, \dots, u_ν , il doit y avoir la relation suivante

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \sigma_1(u_1) & \sigma_1(u_2) & \dots & \sigma_1(u_\nu) \\ \sigma_2(u_1) & \sigma_2(u_2) & \dots & \sigma_2(u_\nu) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sigma_\nu(u_1) & \sigma_\nu(u_2) & \dots & \sigma_\nu(u_\nu) \end{vmatrix} = \Theta(u_1, u_2, \dots, u_\nu) = 0.$$

On arrive à la relation (2) par la méthode d'élimination, que j'ai développée, en détail, dans ma Thèse; en ce qui concerne la relation (3), on y arrive en tenant compte de la nature des valeurs (E): Pour ces valeurs de u , $F(z, u)$ est d'ordre inférieur à ρ par rapport à z ; si donc, on a

$$F(z, u_1) = f_1(z), \quad F(z, u_2) = f_2(z), \quad \dots, \quad F(z, u_\nu) = f_\nu(z),$$

les $f_i(z)$ désignant des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ , on en déduit immédiatement la relation (3), puisque, autrement, la résolution de ces équations par rapport à $A_1(z), A_2(z), \dots, A_\nu(z)$ serait possible et ces fonctions seraient toutes d'ordre inférieur à ρ , ce qui est contradictoire à notre hypothèse.

Si nous considérons $\nu + 1$ valeurs $u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu$ qui n'appartiennent pas toutes à l'ensemble (E), notre méthode d'élimination nous conduit à la conclusion que l'un, au moins, des déterminants du Tableau

$$(4) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} \sigma_1(u_0) & \sigma_1(u_1) & \sigma_1(u_2) & \dots & \sigma_1(u_\nu) \\ \sigma_2(u_0) & \sigma_2(u_1) & \sigma_2(u_2) & \dots & \sigma_2(u_\nu) \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \sigma_\nu(u_0) & \sigma_\nu(u_1) & \sigma_\nu(u_2) & \dots & \sigma_\nu(u_\nu) \end{array} \right\|$$

sera nul. En effet, l'élimination nous conduirait à une identité d'exponentielles de M. Borel dont les coefficients seront égaux à ces déterminants et dans laquelle il y aura toujours un, au moins, terme exponentiel d'ordre égal à ρ .

Il n'y a qu'un cas, dans lequel nous ne pouvons pas affirmer qu'une des relations précitées sera satisfaite: c'est celui où, parmi les valeurs $u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu$, il y a des équivalentes en même temps que des valeurs appartenant à l'ensemble (E). Dans ce cas ⁽¹⁾, en effet, dans l'identité de M. Borel il n'y aura

(1) D'une façon plus précise, ce cas se caractérise par le fait suivant: chacune des valeurs $u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu$ est ou bien un élément de l'ensemble (E) ou bien équivalente à une autre.

aucun terme irréductible et l'on arrivera à des relations que l'on ne saurait déterminer d'avance.

Deux valeurs u_0 et u'_0 sont dites *équivalentes* si le rapport $F(z, u_0) : F(z, u'_0)$ est d'ordre inférieur à ρ . Une valeur u_1 appartient à l'ensemble (E) si $F(z, u_1)$ est une fonction d'ordre inférieur à ρ (voir ma Thèse).

Dans ma Thèse (p. 20) cette théorie a été développée d'une façon plus simple grâce à l'hypothèse que ces fonctions $A_i(z)$ soient toutes d'ordre ρ et *linéairement distinctes*; j'entends par là qu'il n'y a entre elles aucune relation linéaire de la forme

$$(5) \quad a_1(z) A_1(z) + a_2(z) A_2(z) + \dots + a_v(z) A_v(z) + a(z) = 0,$$

les $a_i(z)$ désignant des fonctions entières d'ordre inférieur à ρ . Il est clair que, théoriquement, nous pouvons toujours faire cette hypothèse, mais, à la pratique, il n'est pas toujours facile de reconnaître ces relations (5), qui peuvent exister, pour faire la réduction nécessaire. Ainsi, les considérations que je viens d'exposer complètent les résultats exposés dans ma Thèse sur ce sujet, puisqu'elles ne supposent pas du tout la connaissance de ces relations (5) qui nous conduiraient à la forme irréductible de l'équation (1).

2. Comme j'ai indiqué dans ma Thèse, une valeur u_0 exceptionnelle, telle que l'équation (1') n'admette qu'un nombre fini de racines, est un point critique transcendant de la fonction inverse $z = \psi(u)$ définie par l'équation (1). Mais il n'est pas difficile de démontrer qu'il en est de même de toute valeur exceptionnelle u_1 de u : Supposons, en effet, que la densité ρ' des racines de l'équation

$$(6) \quad u_1 = \varphi(z)$$

soit inférieure à ρ . L'ensemble des valeurs exceptionnelles de u étant dénombrable avec un seul point limite à l'infini (d'après un théorème général, établi dans ma Thèse), il est clair qu'il y a une valeur $u_1 + \Delta u_1$ telle que la densité des racines de l'équation

$$(7) \quad u_1 + \Delta u_1 = \varphi(z)$$

soit d'ordre ρ , le $|\Delta u_1|$ étant arbitrairement petit. Appelons C_r le cercle de rayon r décrit de l'origine comme centre et désignons le nombre des racines de module inférieur à r de l'équation (6) par n_r et de l'équation (7) par N_r ; nous savons que, d'après la définition de l'ordre de la densité, le rapport $N_r : n_r$ tend vers l'infini avec r ainsi que la différence $N_r - n_r$. Il en résulte que, si nous faisons tendre vers zéro le $|\Delta u_1|$, les zéros de la fonction $\varphi(z) - u_1 - \Delta u_1$, qui sont situés à l'intérieur du cercle C_r , ne tendront pas tous à des points situés aussi à l'intérieur du même

cercle; il y en aura en nombre $N_r - n_r$ ⁽¹⁾ qui tendront vers des points situés à l'extérieur du cercle C_r ou bien sur la circonférence et cela aussi grand que soit r . La différence $N_r - n_r$ tendant vers l'infini avec r , nous en concluons que, dans tout le plan, il y aura une infinité de racines de l'équation (7) qui tendront vers des points situés à l'extérieur de tous les cercles C_r , r étant aussi grand que l'on voudra, c'est-à-dire vers l'*infini*.

Ce résultat peut s'exprimer comme il suit :

Parmi les déterminations de la fonction $z = \psi(u)$ correspondant à la valeur $u_1 + \Delta u_1$ de u , il y aura une infinité qui tendront vers l'infini, lorsque le $|\Delta u_1|$ tendra vers zéro. En d'autres termes, le point u_1 sera un point critique transcendant de la fonction $z = \Psi(u)$.

Il est à peine nécessaire de remarquer que nous pouvons joindre les points u_1 et $u_1 + \Delta u_1$ par une ligne n'ayant aucun autre point exceptionnel en dehors du point u_1 .

3. Ces considérations suggèrent une *classification* des points critiques transendants d'une fonction multiforme $z = \psi(u)$, définie par une équation de la forme (1), suivant la densité des déterminations finies de cette fonction en ces points critiques. Si ρ' est l'ordre de la densité des déterminations, qui restent distinctes de l'infini en un point $u = u_0$, nous dirons que ce point est d'*ordre critique* $\rho - \rho'$. Si $\rho' = \rho$, le point critique sera d'ordre *zéro* et peut être algébrique ou bien transcendant; si $\rho' \neq \rho$ le point sera toujours *critique transcendant*, d'après le théorème plus haut établi, et son ordre peut varier depuis zéro jusqu'à ρ . Ainsi une fonction multiforme $z = \psi(u)$ d'ordre ρ , définie par une équation de la forme (1), ne saurait présenter des points critiques d'ordre supérieur à ρ . Conformément à notre définition, les points réguliers de $z = \psi(u)$ se présentent comme ayant un ordre nul. Dans le cas où $F(z, u)$ n'est qu'un polynôme en u , la fonction $u = \varphi(z)$ ne présente évidemment que des points critiques algébriques.

La classification des points critiques, que nous venons d'établir et dont l'intérêt est visible, nous permet d'énoncer le théorème suivant, qui est l'inverse du théorème établi dans le numéro précédent, à savoir :

Tout point critique d'ordre différent de zéro (transcendant) de la fonction $z = \psi(u)$ est une valeur exceptionnelle de l'inverse $u = \varphi(z)$ et, par conséquent, jouit des propriétés intéressantes que nous avons exposées dans la Thèse et dans les paragraphes précédents de ce travail.

⁽¹⁾ Au moins.

Nous avons des points critiques transcendants équivalents ou bien formant l'ensemble (E) par suite de la correspondance, qui existe entre ces points et les valeurs exceptionnelles de la fonction inverse.

Si nous mettons à côté les points critiques (E), dont la recherche présente d'ailleurs des commodités particulières, tous les autres jouissent de la propriété suivante, pourvu que leur ordre ne soit pas nul, à savoir :

Entre $\nu + 1$ points critiques $u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu$ il y a toujours la relation suivante (1)

$$\Sigma(u_0, u_1, u_2, \dots, u_\nu) = 0 \quad [\text{voir la formule (2)}].$$

L'utilité de ce théorème à la recherche des points critiques transcendants des fonctions multiformes, définies par une équation de la forme (1), est bien visible; tous les résultats de la théorie des valeurs exceptionnelles se traduisent dans la théorie des points critiques par des propositions analogues. Je tiens à signaler ici le théorème suivant, conséquence immédiate d'un théorème général démontré dans ma Thèse (p. 43), à savoir :

L'ensemble des points critiques d'ordre différent de zéro d'une fonction multiforme, définie par une équation de la forme (1), est dénombrable avec un point limite à l'infini (2).

En effet, si l'on se donne un nombre fini de ces points critiques, tous les autres satisfont à l'équation

$$\Sigma(u_1, u_2, \dots, u_\nu, U) = 0,$$

où les u_1, u_2, \dots, u_ν désignent ν points critiques donnés.

Les points critiques de l'ensemble (E) satisferont séparément à la même équation, dans laquelle les u_1, u_2, \dots, u_ν désignent des points critiques appartenant aussi à l'ensemble (E).

On ferait un rapprochement intéressant de ces résultats avec les considérations développées tout récemment par M. Boutroux dans son important Mémoire *Fonctions multiformes à une infinité de branches* (*Annales de l'École Normale supérieure*, octobre 1905).

(1) En particulier, si $F(z, u)$ est un polynôme en u du degré n , nous avons la conclusion intéressante que le nombre des points critiques d'ordre différent de zéro de la fonction $z = \Psi(u)$ ne saurait jamais dépasser 2ν .

(2) Ce théorème s'étend aussi aux points critiques *transcendants* d'ordre zéro; j'ai démontré, en effet, dans ma Thèse que, si u_0 est un tel point, les déterminations qui y coïncident deviennent nécessairement infinies; or, il est aisé de voir que l'ensemble des infinis de la fonction $z = \Psi(u)$ ne saurait avoir des points limites à distance finie (*voir* ma Thèse, p. 43).

4. Les points critiques d'ordre zéro ne donnant pas nécessairement des valeurs exceptionnelles pour la fonction $u = \varphi(z)$, leur exclusion s'impose naturellement; la coïncidence d'une infinité de déterminations n'entraîne pas, en effet, toujours l'abaissement de l'ordre de la densité des branches, qui restent distinctes de l'infini. Si l'on veut préciser d'une façon intéressante les résultats exposés dans ce travail, on n'a qu'à utiliser la définition plus précise de l'ordre de grandeur et de l'ordre de densité donnée par M. Lindelöf, que nous avons déjà employée dans des travaux antérieurs [voir : *Sur le cas d'exception de M. Picard et les fonctions multiformes* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, fasc. III, 1905)]; mais il y aura toujours une classe (très particulière d'ailleurs) de points critiques, que nous devons exclure dans les énoncés des théorèmes plus haut établis.

Ce rapprochement entre la théorie des points critiques et la notion du cas d'exception mérite d'attirer l'attention des analystes, puisqu'elle ramène la recherche des points critiques transcendants à des considérations, qui ont fait l'objet de nombreux travaux et qui sont basées sur un théorème de la plus grande importance et fécondité, je veux dire le théorème de M. Borel, qui m'a servi d'instrument précieux dans l'étude des zéros des fonctions multiformes (*voir*, par exemple, ma Thèse).

Le lecteur pourrait approfondir ce théorème de M. Borel en lisant le beau travail publié comme Thèse de M. A. Kraft (*Inaugural-Dissertation, Göttingen*, 1903 : *Ueber ganze transcendente Functionen von unendlicher Ordnung*), où l'on trouve les principes de sa démonstration développés en toute rigueur.

Je termine par la remarque que cette théorie peut s'étendre à des classes de fonctions multiformes plus générales et même se généraliser d'une façon convenable pour servir particulièrement à l'étude des points critiques transcendants des fonctions multiformes d'ordre *infini*, définies par des équations analogues à (1). Je ne me suis borné à cette forme spéciale que pour fixer les idées et je me propose de revenir à ce sujet intéressant.

