

E. JOUGUET

## Notes sur la théorie de l'élasticité

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3<sup>e</sup> série*, tome 12 (1920), p. 47-92

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1920\\_3\\_12\\_\\_47\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1920_3_12__47_0)

© Université Paul Sabatier, 1920, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annales/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

---

# NOTES SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

PAR E. JOUGUET

---

## AVANT-PROPOS

Nous avons réuni dans le présent travail deux Notes relatives à des points particuliers de la théorie de l'Élasticité.

La première étudie les ondes de choc dans les solides élastiques. Si l'on se borne à considérer des déformations infiniment petites et par conséquent des chocs très petits, la propagation des ondes de choc ne diffère pas de celle des ondes d'accélération. Aussi les travaux des fondateurs de la théorie de l'Élasticité, et notamment de Poisson, sur les petits mouvements s'appliquent-ils aux ondes de choc comme aux ondes d'ordre supérieur. Il n'en est plus de même si l'on envisage des corps affectés de déformations finies et des chocs notables. Les méthodes d'Hugoniot pour l'étude des ondes ont été appliquées aux solides élastiques affectés de déformations finies par Hadamard et Duhem<sup>(1)</sup>. Mais ces deux savants n'ont considéré que les ondes d'accélération et ont laissé de côté les ondes de choc. C'est cette lacune que nous voudrions essayer de combler. Nous donnons les équations fondamentales des ondes de choc et nous tirons du principe de Carnot-Clausius quelques conséquences sur les ondes susceptibles de se propager.

La seconde Note est relative aux déformations infiniment petites, et rentre par conséquent dans la théorie habituelle de l'Élasticité. Mais, dans cette théorie habituelle, on considère généralement des déformations infiniment petites aux environs d'un état naturel à tensions nulles. Poincaré a montré comment on pouvait étudier les déformations infiniment petites aux environs d'un état où les tensions sont quel-

---

<sup>(1)</sup> Hadamard. *Leçons sur la propagation des ondes*, chez Hermann, Paris, 1903. — Duhem, *Recherches sur l'Élasticité* (Annales de l'École Normale supérieure. 1904-1905-1906).

conques. Notre seconde Note a pour objet le développement des indications de Poincaré pour étudier les coefficients thermodynamiques des corps placés dans un état qui n'est pas un état naturel<sup>(1)</sup>.

Nous aurons à utiliser les principales formules de la théorie de l'Élasticité des corps affectés de déformations finies. Elles nous serviront même pour notre seconde Note, car nous en déduirons les formules relatives aux déformations infiniment petites. Nous pourrions nous borner, pour les faire connaître, à renvoyer au célèbre Mémoire de MM. Eugène et François Cosserat<sup>(2)</sup>. Il nous paraît préférable de les résumer rapidement dans une brève introduction, de manière à définir les notations que nous emploierons et à faciliter la lecture des Notes qui suivront.

---

(1) Le résumé du présent travail a paru dans les Notes ci-après publiées aux *Comptes-Rendus des séances de l'Académie des Sciences* : *Sur les ondes de choc dans les corps solides* (C. R., 30 août 1920). *Sur la célérité des ondes dans les solides élastiques* (C. R., 13 septembre 1920). *Sur la variation d'entropie dans les ondes de choc des solides élastiques* (C. R., 26 octobre 1920). *Application du principe de Carnot-Clausius aux ondes de choc des solides élastiques* (C. R., 8 novembre 1920). *Sur le cas de Poincaré dans la théorie de l'élasticité* (C. R., 7 février 1920).

(2) E. et F. Cosserat. *Sur la théorie de l'Élasticité*, 1<sup>er</sup> Mémoire (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1<sup>re</sup> série, T. X, 1896).

---

## INTRODUCTION

### RAPPEL DES FORMULES FONDAMENTALES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

**Préliminaires.** — Considérons un milieu matériel continu, solide élastique ou fluide. Nous supposons que ce milieu peut être rapporté à un état initial où il est homogène. Désignons par  $a, b, c$  les coordonnées d'un point matériel dans l'état initial et par  $r$  la densité (uniforme) dans cet état.

Dans une déformation quelconque, le point matériel  $a, b, c$  vient occuper la position  $x = a + \xi$ ,  $y = b + \eta$ ,  $z = c + \zeta$ ; la densité devient  $\rho$ ; la température absolue est alors  $\Theta$ . Désignons par  $a_1, b_1, c_1$ ,  $a_2, b_2, c_2$ ,  $a_3, b_3, c_3$  les dérivées partielles de  $x, y, z$  par rapport à  $a, b, c$ . Soient

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial a} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial a} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) - \frac{1}{2}, \\ \varepsilon_2 &= \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial b} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - \frac{1}{2}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial c} \right)^2 + \left( \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - \frac{1}{2}, \\ \gamma_1 &= \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \xi}{\partial b} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \eta}{\partial b} \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \frac{\partial \zeta}{\partial c} = b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3, \\ \gamma_2 &= \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial c} \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial c} \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \frac{\partial \zeta}{\partial a} = c_1 a_1 + c_2 a_2 + c_3 a_3, \\ \gamma_3 &= \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \xi}{\partial a} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a} \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \frac{\partial \zeta}{\partial b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned} \right.$$

les six fonctions associées à la déformation. Nous supposons le potentiel interne du milieu de la forme

$$(2) \quad \int \Phi(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Theta) r \, da \, db \, dc = \int W(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \Theta) \, da \, db \, dc.$$

C'est l'hypothèse admise par M. Cosserat. Elle revient à négliger les actions mutuelles des divers éléments. On pourrait, avec Duhem, en tenir compte. Nous ne le ferons pas, dans un but de simplicité.

Soient  $E = -\frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}$  l'entropie et  $U = \Phi - \Theta \frac{\partial\Phi}{\partial\Theta}$  l'énergie interne de l'unité de masse du fluide.  $U$  peut être considéré comme une fonction de  $\varepsilon_i, \gamma_i, E$ . L'énergie interne de la masse totale sera de la forme

$$(3) \quad \int U(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, E) r \, da \, db \, dc.$$

On passe de l'état initial à l'état actuel par la transformation

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t).$$

Rappelons quelques propriétés géométriques de cette transformation.

Tout d'abord, si on pose

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix},$$

on a

$$\rho \Delta = r.$$

Soit d'autre part une surface matérielle  $S$  dans l'état initial et  $\Sigma$  ce qu'elle devient dans l'état actuel. Les éléments correspondants sont  $ds$  et  $d\sigma$ . Menons les normales à ces éléments et orientons-les de même, par l'ordre dans lequel elles rencontrent telle ou telle portion du milieu. Soient  $l, m, n$  les cosinus directeurs de la normale à  $S$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$ . Posons

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = l \frac{\partial \Delta}{\partial (a_1, a_2, a_3)} + m \frac{\partial \Delta}{\partial (b_1, b_2, b_3)} + n \frac{\partial \Delta}{\partial (c_1, c_2, c_3)}.$$

On démontre que

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha d\sigma = \mathfrak{L} ds, & \beta d\sigma = \mathfrak{M} ds, & \gamma d\sigma = \mathfrak{N} ds, \\ \frac{\alpha}{\mathfrak{L}} = \frac{\beta}{\mathfrak{M}} = \frac{\gamma}{\mathfrak{N}} = \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}}. \end{cases}$$

Ces formules sont vraies en particulier si  $S$  et  $\Sigma$  sont les surfaces limitant le milieu. Nous conviendrons de prendre dans ce cas les normales *extérieures*.

Nous supposons que, sur le milieu considéré, s'exercent deux sortes de forces :

1° des forces  $(\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})r \cdot da \cdot db \cdot dc$  appliquées aux éléments de masse. Nous désignerons d'ailleurs l'élément de volume  $da \cdot db \cdot dc$  par  $de$  et l'élément de volume  $dx \cdot dy \cdot dz$  par  $d\tau$ . Ces forces sont donc  $(\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})r \cdot de$  ou bien  $(\bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z})\rho d\tau$ ,

2° des forces, appliquées à chaque élément  $d\sigma$  de la surface  $\Sigma$  limitant le corps, qui seront de la forme  $(\bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{P}_z)d\sigma$  ou  $(\bar{P}_x + \bar{P}_y + \bar{P}_z)ds$ .

Considérons un déplacement virtuel  $\delta x, \delta y, \delta z$ . Soient  $\delta\bar{C}$  le travail virtuel des forces  $X, Y, Z$ ;  $\delta P$  le travail virtuel des forces  $P_x, P_y, P_z$ ;  $\bar{j}_x + \bar{j}_y + \bar{j}_z$  l'accélération d'une molécule et  $\delta j$  le travail virtuel de cette accélération;  $\delta_\Theta \Phi$  la variation virtuelle de  $\Phi$  prise en laissant  $\Theta$  constant;  $\delta_E U$  la variation virtuelle de  $U$  prise en laissant l'entropie  $E$  constante. Les équations du mouvement s'obtiendront en écrivant que

$$(5) \quad \mathbf{S} (\delta_E U - \delta\bar{C} + \delta j) r \cdot de - \sum \delta P ds = 0$$

ou en développant

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \delta_E U r \cdot de - \mathbf{S} r [(X - j_x)\delta x + (Y - j_y)\delta y + (Z - j_z)\delta z] \cdot de \\ - \sum (P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z) ds = 0. \end{aligned}$$

Le signe  $\mathbf{S}$  représente une intégrale de volume, le signe  $\sum$  une intégrale de surface.

Dans cette équation, d'ailleurs, on peut remplacer  $\delta_E U$  par  $\delta_\Theta \Phi$ . Nous allons terminer les calculs en supposant qu'on utilise la fonction  $U$  : il ne faut pas oublier qu'on pourrait se servir aussi bien de la fonction  $\Phi$ , à condition de prendre, pour variable,  $\Theta$  au lieu de  $E$ .

**Équations du mouvement rapportées aux variables de Lagrange.** — Dans une première manière d'appliquer l'équation (5), nous nous placerons dans le champ  $a, b, c$ . Posons

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} (A, B, C)_x &= r \frac{\partial U}{\partial (a_1, b_1, c_1)} = r \frac{\partial \Phi}{\partial (a_1, b_1, c_1)}, \\ (A, B, C)_y &= r \frac{\partial U}{\partial (a_2, b_2, c_2)} = r \frac{\partial \Phi}{\partial (a_2, b_2, c_2)}, \\ (A, B, C)_z &= r \frac{\partial U}{\partial (a_3, b_3, c_3)} = r \frac{\partial \Phi}{\partial (a_3, b_3, c_3)}. \end{aligned} \right.$$

Il est facile de voir en effet que  $\frac{\partial U}{\partial a_i} = \frac{\partial \Phi}{\partial a_i}$ .

$\delta_\varepsilon U$  est une somme de termes de la forme  $B_z \delta \frac{\partial z}{\partial b}$  ou  $B_z \frac{\partial \delta z}{\partial b}$ . En calculant l'intégrale  $S \delta_\varepsilon U r de$  par parties, on obtiendra,  $l, m, n$  se rapportant à la normale extérieure :

$$- S \left[ \left( \frac{\partial A_x}{\partial a} + \frac{\partial B_x}{\partial b} + \frac{\partial C_x}{\partial c} \right) \delta x + \left( \frac{\partial A_y}{\partial a} + \frac{\partial B_y}{\partial b} + \frac{\partial C_y}{\partial c} \right) \delta y + \left( \frac{\partial A_z}{\partial a} + \frac{\partial B_z}{\partial b} + \frac{\partial C_z}{\partial c} \right) \delta z \right] de$$

$$+ \sum [(lA_x + mB_x + nC_x) \delta x + (lA_y + mB_y + nC_y) \delta y + (lA_z + mB_z + nC_z) \delta z] ds.$$

En tenant compte de cette expression pour écrire que (5) est vérifiée quels que soient  $\delta x, \delta y, \delta z$  on trouve

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial A_x}{\partial a} + \frac{\partial B_x}{\partial b} + \frac{\partial C_x}{\partial c} + rX = rj_x, \\ \frac{\partial A_y}{\partial a} + \frac{\partial B_y}{\partial b} + \frac{\partial C_y}{\partial c} + rY = rj_y, \\ \frac{\partial A_z}{\partial a} + \frac{\partial B_z}{\partial b} + \frac{\partial C_z}{\partial c} + rZ = rj_z; \end{cases}$$

$$(8) \quad \begin{cases} P_x = lA_x + mB_x + nC_x, \\ P_y = lA_y + mB_y + nC_y, \\ P_z = lA_z + mB_z + nC_z. \end{cases}$$

**Équations rapportées aux variables d'Euler.** — On peut au contraire traiter l'équation (5) en se plaçant dans le champ des variables  $x, y, z$ .

Remarquons d'abord que les formules (1) donnent :

$$(9) \quad \begin{cases} A_{x,y,z} = a_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} + b_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} + c_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}, \\ B_{x,y,z} = a_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} + b_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} + c_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \gamma_1}, \\ C_{x,y,z} = a_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} + b_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} + c_{1,2,3} r \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3}. \end{cases}$$

Puisque nous raisonnons maintenant dans le champ des variables d'Euler, il faut, dans les intégrales de (5), remplacer  $r de$  par  $\varrho d\tau$  ou  $\frac{r}{\Delta} d\tau$ . Prenons un terme quel-

conque de  $r \delta_{\epsilon} U$ , par exemple  $B_z \frac{\partial \delta z}{\partial b}$ . Nous l'écrivons

$$B_z \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial b} \right).$$

En faisant ces calculs, le coefficient de  $\frac{\partial \delta z}{\partial x}$  dans  $r \delta_{\epsilon} U$  devient

$$A_z \frac{\partial x}{\partial a} + B_z \frac{\partial x}{\partial b} + C_z \frac{\partial x}{\partial c}.$$

De même celui de  $\frac{\partial \delta x}{\partial z}$  devient

$$A_x \frac{\partial z}{\partial a} + B_x \frac{\partial z}{\partial b} + C_x \frac{\partial z}{\partial c},$$

et ces deux expressions sont égales en vertu de (9). Finalement donc, l'intégrale

$$\int \delta_{\epsilon} U \frac{r}{\Delta} d\tau$$

devient :

$$(10) \quad \int \left[ N_1 \frac{\partial \delta x}{\partial x} + N_2 \frac{\partial \delta y}{\partial y} + N_3 \frac{\partial \delta z}{\partial z} + T_4 \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + T_2 \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + T_3 \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] d\tau$$

en posant

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta N_{1,2,3} = A_{x,y,z} a_{1,2,3} + B_{x,y,z} b_{1,2,3} + C_{x,y,z} c_{1,2,3}, \\ \Delta T_{1,2,3} = A_{y,z,x} a_{3,1,2} + B_{y,z,x} b_{3,1,2} + C_{y,z,x} c_{3,1,2} = A_{z,x,y} a_{2,3,1} + B_{z,x,y} b_{2,3,1} + C_{z,x,y} c_{2,3,1}. \end{cases}$$

Les formules (9) donnent alors

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{1}{\rho} N_{1,2,3} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} (a_{1,2,3})^2 + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} (b_{1,2,3})^2 + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3} (c_{1,2,3})^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} b_{1,2,3} c_{1,2,3} + 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} c_{1,2,3} a_{1,2,3} + 2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} a_{1,2,3} b_{1,2,3}, \\ \frac{1}{\rho} T_{1,2,3} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_1} a_{2,3,1} a_{3,1,2} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_2} b_{2,3,1} b_{3,1,2} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_3} c_{2,3,1} c_{3,1,2} + \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} (b_{2,3,1} c_{3,1,2} + c_{2,3,1} b_{3,1,2}) \\ \quad + \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} (c_{2,3,1} a_{3,1,2} + a_{2,3,1} c_{3,1,2}) \\ \quad + \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} (a_{2,3,1} b_{3,1,2} + b_{2,3,1} a_{3,1,2}). \end{cases}$$

Nous remarquerons d'ailleurs que les formules (11) résolues par rapport aux A, B, C donnent les formules suivantes :

$$(13) \quad \begin{cases} (A, B, C)_x = N_1 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_1, b_1, c_1)} + T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_2, b_2, c_2)} + T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_3, b_3, c_3)}, \\ (A, B, C)_y = T_3 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_1, b_1, c_1)} + N_2 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_2, b_2, c_2)} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_3, b_3, c_3)}, \\ (A, B, C)_z = T_2 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_1, b_1, c_1)} + T_1 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_2, b_2, c_2)} + N_3 \frac{\partial \Delta}{\partial (a_3, b_3, c_3)}. \end{cases}$$

Les formules (11), (12), (13) constituent la définition des quantités  $N_i$  et  $T_i$  et expriment leurs relations avec les A et les B ainsi qu'avec les dérivées  $\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_i}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial \gamma_i}$ . Revenons maintenant à la condition (5) que nous voulons exprimer dans le champ des variables d'Euler en nous servant de la forme (10) donnée à  $\int_S \delta_{\varepsilon} U \rho d\tau$ . Cette condition s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int \left[ N_1 \frac{\partial \delta x}{\partial x} + N_2 \frac{\partial \delta y}{\partial y} + N_3 \frac{\partial \delta z}{\partial z} + T_1 \left( \frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y} \right) + T_2 \left( \frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z} \right) + T_3 \left( \frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x} \right) \right] d\tau \\ & - \int \left[ (X - j_x) \delta x + (Y - j_y) \delta y + (Z - j_z) \delta z \right] \rho d\tau - \int (\Pi_x \delta x + \Pi_y \delta y + \Pi_z \delta z) d\sigma, \end{aligned}$$

Une intégration par parties conduit aux équations suivantes :

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \rho X = \rho j_x, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \rho Y = \rho j_y, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \rho Z = \rho j_z; \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} \Pi_x = N_1 \alpha + T_3 \beta + T_2 \gamma, \\ \Pi_y = T_3 \alpha + N_2 \beta + T_1 \gamma, \\ \Pi_z = T_2 \alpha + T_1 \beta + N_3 \gamma. \end{cases}$$

Les quantités  $N_i$ ,  $T_i$  sont les tensions. Les quantités  $N_i$  sont positives quand il y a tension, négatives quand il y a pression.

## PREMIÈRE NOTE

### LES ONDES DE CHOC DANS LES SOLIDES ÉLASTIQUES

**Définitions.** — Supposons que, à l'instant  $t$ , le milieu soit partagé en deux parties par une surface de discontinuité  $\Sigma$  dont la transformée dans l'état initial est  $S$ . Les deux parties seront distinguées par les désignations  $p$  et  $q$  que nous mettrons en indices aux lettres représentant des grandeurs relatives à ces parties. A la traversée de  $S$ , les fonctions  $x, y, z$  de  $a, b, c$  sont supposées continues. Mais la discontinuité apparaît dans les dérivées partielles du premier ordre.  $S$  est alors une onde du premier ordre pour les fonctions  $x, y, z$ . En particulier, les vitesses des molécules sont discontinues à la traversée de  $S$  et de  $\Sigma$ . Les composantes de cette vitesse passent brusquement des valeurs  $u_p, v_p, w_p$  aux valeurs  $u_q, v_q, w_q$ . On a une onde de choc.

Nous admettrons que l'onde de choc se propage de la région  $q$  dans la région  $p$ . C'est dire qu'à l'instant  $t + dt$ , la surface  $S$  est venue en  $S'$  et la surface  $\Sigma$  en  $\Sigma'$ . La distance de  $S$  à  $S'$  mesurée sur la normale menée de  $q$  vers  $p$  est  $dp$ . Celle de  $\Sigma$  à  $\Sigma'$  mesurée sur la normale est  $d\sigma$  (V. fig. 1 et 2). La célérité de l'onde  $S$  dans le champ de variables de Lagrange est donc  $\frac{dp}{dt}$ ; celle de l'onde  $\Sigma$  dans le champ des variables d'Euler est  $\frac{d\sigma}{dt}$ .  $l, m, n$  seront les cosinus directeurs de la normale  $dp$ ;  $\alpha, \beta, \gamma$  ceux de la normale  $d\sigma$ . Considérons les quantités

$$(16) \quad \begin{cases} \frac{d\varphi_p}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} - (\alpha u_p + \beta v_p + \gamma w_p), \\ \frac{d\varphi_q}{dt} = \frac{d\sigma}{dt} - (\alpha u_q + \beta v_q + \gamma w_q); \end{cases}$$

ce sont les célérités de l'onde  $\Sigma$  par rapport aux états actuels  $p$  et  $q$  pris comme états initiaux.

**Équations cinématiques. Équation de continuité.** — Les propriétés purement cinématiques démontrées pour les ondes de choc des fluides s'appliquent *de plano* ici. Rappelons celles qui nous seront utiles (\*).

---

(\*) V. notamment notre Mémoire *Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 6<sup>e</sup> série, Tome I, 1905).

1° Les quantités  $\mathfrak{L}$ ,  $\mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N}$  relatives à la surface S sont sans discontinuité sur S. Cela résulte immédiatement des formules (4) appliquées à la surface de discontinuité S, et cela peut d'ailleurs se vérifier directement.

2° On a :

$$(17) \quad \varepsilon_p \frac{dz_p}{dt} = \varepsilon_q \frac{dz_q}{dt} = r \frac{dp}{dt} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2}};$$

3° L'équation de continuité peut s'écrire :

$$(18) \quad r \frac{dp}{dt} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{\varepsilon_q - \varepsilon_p} [\mathfrak{L}(u_q - u_p) + \mathfrak{M}(v_q - v_p) + \mathfrak{N}(w_q - w_p)].$$

**Équations dynamiques.** — *Emploi du principe de d'Alembert* (1). — Pour trouver maintenant les propriétés dynamiques des ondes de choc, nous allons appliquer le principe de d'Alembert de la façon suivante.

A l'instant  $t$ , l'onde de choc est en S. A l'instant  $t + \Delta t$  elle est en S'; jusqu'à nouvel ordre,  $\Delta t$  est une quantité finie. Considérons trois parties dans la masse totale du corps. La première partie sera la partie  $p$  située, par rapport à S', à l'aval de l'onde; la seconde partie sera la partie  $q$  située, par rapport à S, à l'amont de l'onde; la troisième sera la région  $o$  comprise entre S et S' et parcourue par l'onde de choc pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  (V. fig. 1 et 2).

A chaque instant, nous devons écrire, pour chacune des parties  $p$ ,  $q$ ,  $o$ , l'équation (5). Pour la partie  $o$ , toutefois, il s'y produit des phénomènes irréversibles. Si l'on considère — ce qui est, à notre avis, la seule manière de comprendre les choses — que l'onde de choc est en réalité une quasi-onde d'épaisseur très petite, la viscosité peut y jouer un rôle; il faut ajouter, dans l'équation générale de la Thermodynamique, le travail virtuel de la viscosité. Pour éliminer toute difficulté de ce côté, nous écrirons, à la place de  $\partial_e U$ , les termes  $\partial U + \partial Q$ ,  $\partial U$  étant la variation totale de l'énergie interne et  $\partial Q$  la quantité de chaleur reçue dans une transformation virtuelle. Notre équation (5) deviendra ainsi, en distinguant les champs  $p$ ,  $q$ ,  $o$ ,

(1) Cette méthode, pour trouver les équations des ondes de choc, est celle dont nous nous sommes servis pour trouver les équations des ondes de choc dans les fluides : *Sur la propagation des discontinuités dans les fluides* (C. R. Ac. Sc., T. 132, 18 mars 1901). Elle nous paraît posséder les avantages que M. Zemlén Gyözö a recherchés par l'emploi du principe d'Hamilton : *Kriterien für die physikalische Bedeutung der un stetigen Lösungen der hydrodynamischen Bewegungsgleichungen* (Mathematische Annalen, LXI Band, 3 Heft, 1905). Elle permet aussi de trouver facilement la relation supplémentaire.

ainsi que les parties de la surface terminale relatives à ces divers champs :

$$\begin{aligned} \sum_p (\delta_E U - \delta \mathcal{C} + \delta j) r de + \sum_q (\delta_E U - \delta \mathcal{C} + \delta j) r de + \sum_o (\delta U + \delta Q - \delta \mathcal{C} + \delta j) r de \\ - \sum_p \delta P ds - \sum_q \delta P ds - \sum_o \delta P ds = 0. \end{aligned}$$

Multiplions par  $dt$  et intégrons de  $t$  à  $t + \Delta t$ .

$$\begin{aligned} (19) \quad & \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_p (\delta_E U - \delta \mathcal{C} + \delta j) r de - \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_p \delta P ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_q (\delta_E U - \delta \mathcal{C} + \delta j) r de - \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_q \delta P ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_o (\delta U + \delta Q - \delta \mathcal{C} + \delta j) r de - \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_o \delta P ds = 0. \end{aligned}$$

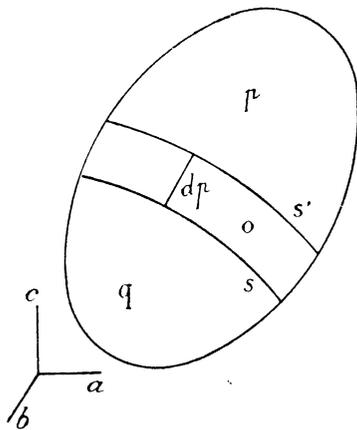


FIG. 1.

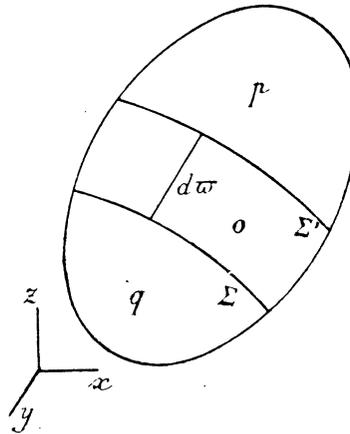


FIG. 2.

Les intégrales  $\sum$  et  $\sum$  qui figurent dans les deux premières lignes de cette équation, et qui se rapportent aux parties  $p$  et  $q$ , peuvent être traitées comme on l'a fait dans l'introduction. On obtient ainsi, sous le signe  $\int$ , deux groupes d'intégrales multiples. Les intégrales du premier groupe sont identiquement nulles, quels que soient  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ , parce que sont vérifiées les équations du mouvement des parties  $p$  et  $q$ , savoir :

- 1° Les équations indéfinies (7);
- 2° Les équations aux limites (8) relatives aux portions de la surface limitant le corps qui correspondent aux parties  $p$  et  $q$ .

Le second groupe d'intégrales multiples — toujours sous le signe  $\int$  — comprend des intégrales prises le long de S et S', surfaces qui, concurremment avec la surface limite du corps, bornent les parties p et q. Ces termes doivent être ajoutés à la troisième ligne de l'équation (19), qui devient ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_S [(lA_{xq} + mB_{xq} + nC_{xq}) \delta x + (lA_{yq} + mB_{yq} + nC_{yq}) \delta y + (lA_{zq} + mB_{zq} + nC_{zq}) \delta z] ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{S'} [(l'A_{xp} + m'B_{xp} + n'C_{xp}) \delta x + (l'A_{yp} + m'B_{yp} + n'C_{yp}) \delta y + (l'A_{zp} + m'B_{zp} + n'C_{zp}) \delta z] ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{\circ} (\delta U + \delta Q - \delta \bar{v} + \delta j) r de - \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{\circ} \delta P ds = 0; \end{aligned}$$

$l, m, n$  sont les cosinus directeurs de la normale à S *extérieure* à la région q;

$l', m', n'$  sont les cosinus directeurs de la normale à S' *extérieure* à la région p.

Nous poserons :

$$(20) \quad \begin{cases} (F, G, H) = lA_{x,y,z} + mB_{x,y,z} + nC_{x,y,z}, \\ (F', G', H') = l'A_{x,y,z} + m'B_{x,y,z} + n'C_{x,y,z}, \end{cases}$$

de sorte que notre équation s'écrit :

$$(21) \quad \begin{aligned} & \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_S (F_q \delta x + G_q \delta y + H_q \delta z) ds + \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{S'} (F_p' \delta x + G_p' \delta y + H_p' \delta z) ds \\ & + \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{\circ} (\delta U + \delta Q - \delta \bar{v} + \delta j) r de - \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_{\circ} \delta P ds = 0. \end{aligned}$$

De l'équation (21), on peut tirer toutes les équations dynamiques des ondes de choc.

*Équations de la quantité de mouvement.* — Nous ferons, pour cela,  $\Delta t$  infiniment petit. Dans ces conditions, les surfaces S et S' sont très voisines;  $l', m', n'$  sont sensiblement égaux à  $-l, -m, -n$ ;  $F_p', G_p', H_p'$  sont sensiblement égaux à  $-F_p, -G_p, -H_p$ . Le premier terme de (21) s'écrit donc :

$$(22) \quad \Delta t \sum_S [(F_q - F_p) \delta x + (G_q - G_p) \delta y + (H_q - H_p) \delta z] ds$$

et il est de l'ordre de  $\Delta t \delta x$ .

Le terme  $\int_t^{t+\Delta t} dt \sum \delta P ds$ , toujours dans l'hypothèse de  $\Delta t$  infiniment petit, est de l'ordre de  $\Delta t \Delta p \delta x$ , donc négligeable.

Il en est de même de  $\int_t^{t+\Delta t} dt \sum (\delta U - \delta \bar{U}) r de$ .

Nous supposons qu'il en est aussi de même de  $\int_t^{t+\Delta t} dt \sum \delta Q r de$ . La chaleur virtuelle  $\delta Q$  comprend deux parties : la partie réversible, qui est de l'ordre de la modification virtuelle de l'état du corps, remplit évidemment la condition énoncée; la partie irréversible, qui dépend des vitesses de transformation, pourrait devenir infiniment grande par rapport à la première, puisque ces vitesses sont infinies. Mais si cette circonstance se produisait, ce serait un signe que la propagation de l'onde de choc est impossible. En effet, la chaleur *réelle*  $dQ$  deviendrait alors infiniment grande par rapport à la masse de la matière qui en serait le siège; ce serait une absurdité physique que nous considérerons comme une preuve suffisante de l'impossibilité de l'onde de choc dans ce cas.

Reste donc le terme  $\int_t^{t+\Delta t} dt \sum \delta j r de$ . Nous l'écrivons, en intervertissant les intégrations :

$$\sum r de \int_t^{t+\Delta t} (j_x \delta x + j_y \delta y + j_z \delta z) dt.$$

Puisque  $\Delta t$  est infiniment petit, on peut faire sortir les  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  du signe  $\int$  et écrire :

$$\sum r de \left[ \delta x \int j_x dt + \delta y \int j_y dt + \delta z \int j_z dt \right],$$

ce qui donne enfin, en remplaçant  $r de$  par  $ds \Delta p$  :

$$(23) \quad \sum r [(u_q - u_p) \delta x + (v_q - v_p) \delta y + (w_q - w_p) \delta z] \Delta p ds.$$

La somme de (22) et de (23) doit être nulle, quels que soient  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ . On a donc les relations suivantes, que nous appellerons *équations de la quantité de mouvement* pour l'onde de choc.

$$(24) \quad r \frac{dp}{dt} = \frac{F_p - F_q}{u_q - u_p} = \frac{G_p - G_q}{v_q - v_p} = \frac{H_p - H_q}{w_q - w_p}.$$

*Relation supplémentaire.* — Pour compléter les équations (18) (de *continuité*) et (24) (de la *quantité de mouvement*), il faut écrire maintenant la *relation supplémentaire*.

Si les mouvements étaient isothermes, la relation supplémentaire se réduirait à  $\Theta_q = \Theta_p$ . Mais c'est là une hypothèse inadmissible, en raison de la rapidité de la propagation de l'onde. Il convient de supposer le mouvement adiabatique, c'est-à-dire, d'une façon précise, d'admettre que les éléments  $r ds \Delta p$  qui constituent la masse  $\sigma$  subissent, quand ils sont traversés de part en part par l'onde, une transformation qui n'échange aucune chaleur avec l'extérieur.

Pour écrire la relation supplémentaire qui découle de cette hypothèse, nous remplacerons, dans (21), les déplacements virtuels  $\delta$  par les déplacements réels.

Nous supposons toujours  $\Delta t$  infiniment petit. Dans le premier terme de (21), on devra donc prendre

$$\delta x = u_q dt, \quad \delta y = v_q dt, \quad \delta z = w_q dt,$$

et dans le second

$$\delta x = u_p dt, \quad \delta y = v_p dt, \quad \delta z = w_p dt;$$

ces diverses valeurs pouvant être considérées comme constantes dans l'intervalle  $\Delta t$ . La première ligne de (21) donne donc :

$$(25) \quad \Delta t dt \sum_s [(F_q u_q + G_q v_q + H_q w_q) - (F_p u_p + G_p v_p + H_p w_p)] ds.$$

$$\text{Le terme } \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_o \delta U r de \quad \text{devient} \quad \int_t^{t+\Delta t} dt \sum_o \frac{dU}{dt} dt r de$$

ou, en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$(26) \quad dt \sum_s r \Delta p ds (U_q - U_p).$$

Le terme en  $\delta Q$  ne donne rien, puisque, par hypothèse, la chaleur *réelle* est nulle. D'autre part, les termes en  $\delta \mathcal{C}$  et  $\delta P$  donnent des termes de l'ordre de  $\Delta p \Delta t dt$ , donc négligeables par rapport aux précédents.

Enfin  $\int_t^{t+\Delta t} dt \int_S \delta j r de$  donne, en se rappelant que le travail *réel* des forces d'inertie est égal et de signe contraire à la variation de force vive,

$$(27) \quad \frac{dt}{2} \sum_S r \Delta p ds [V_q^2 - V_p^2].$$

La somme des termes (25), (26), (27) doit être nulle, et elle doit l'être *quelle que soit la portion que l'on considère de la surface S*. En effet, l'équation (21) ne s'applique pas seulement à la totalité de la masse  $\sigma$ . Elle s'applique à toute portion de cette masse correspondant à une portion quelconque des surfaces S et S', pourvu qu'on modifie en conséquence le champ des intégrales  $\sum_{S'}$ ,  $\sum_S$ ,  $\sum_\sigma$ . On a donc :

$$(28) \quad r \frac{dp}{dt} \left[ U_q - U_p + \frac{V_q^2 - V_p^2}{2} \right] = (F_p u_p + G_p v_p + H_p w_p) - (F_q u_q + G_q v_q + H_q w_q).$$

C'est la relation supplémentaire cherchée.

**Variantes.** — Les équations (18), (24), (28) constituent les équations des ondes de choc. Écrivons-les ici de nouveau, en leur donnant même un numérotage nouveau et spécial, de manière à les grouper en un système unique.

$$(I) \quad r \frac{dp}{dt} = \frac{\rho_q \rho_p}{\rho_q - \rho_p} [\mathcal{L}(u_q - u_p) + \mathcal{M}(v_q - v_p) + \mathcal{N}(w_q - w_p)]$$

(équation de continuité),

$$(II) \quad r \frac{dp}{dt} = \frac{F_p - F_q}{u_q - u_p} = \frac{G_p - G_q}{v_q - v_p} = \frac{H_p - H_q}{w_q - w_p}$$

(équations de la quantité de mouvement),

$$(III) \quad r \frac{dp}{dt} \left[ U_q - U_p + \frac{V_q^2 - V_p^2}{2} \right] = (F_p u_p + G_p v_p + H_p w_p) - (F_q u_q + G_q v_q + H_q w_q)$$

(relation supplémentaire).

La dernière peut être transformée de manière à en éliminer les vitesses.  
Le terme

$$r \frac{dp}{dt} \frac{V_q^2 - V_p^2}{2}$$

s'écrit

$$r \frac{dp}{dt} \frac{(u_q - u_p)(u_q + u_p) + (v_q - v_p)(v_q + v_p) + (w_q - w_p)(w_q + w_p)}{2},$$

ce qui, par (II), s'écrit

$$\frac{1}{2}(F_p - F_q)(u_q + u_p) + \frac{1}{2}(G_p - G_q)(v_q + v_p) + \frac{1}{2}(H_p - H_q)(w_q + w_p).$$

Donc (III) peut s'écrire

$$r \frac{dp}{dt} (U_q - U_p) = \frac{1}{2} [(F_p + F_q)(u_p - u_q) + (G_p + G_q)(v_p - v_q) + (H_p + H_q)(w_p - w_q)],$$

ou encore, grâce à (II) :

$$(IV) \quad 2r^2 \left( \frac{dp}{dt} \right)^2 (U_q - U_p) = F_q^2 + G_q^2 + H_q^2 - F_p^2 - G_p^2 - H_p^2.$$

On peut aussi éliminer la célérité  $\frac{dp}{dt}$  grâce à (I) et à (II), et on obtient :

$$(V) \quad 2 \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{\varepsilon_q - \varepsilon_p} [(F_p - F_q) + \frac{1}{2}(G_p - G_q) + \frac{1}{2}(H_p - H_q)] [U_q - U_p] \\ = F_q^2 + G_q^2 + H_q^2 - F_p^2 - G_p^2 - H_p^2.$$

La relation (V) constitue la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot pour un milieu quelconque sans viscosité (solide élastique ou fluide).

**Équations dans les variables d'Euler.** — Les équations (I), (II), (III), (IV), (V), dont les deux dernières ne sont pas distinctes des premières, régissent la propagation des ondes de choc dans le champ des coordonnées initiales (variables de Lagrange). Il est facile maintenant d'écrire les équations relatives au champ des variables d'Euler.

Les équations (4) et (17) transforment l'équation de continuité (I) en

$$(I') \quad \varepsilon_p \frac{d\varepsilon_p}{dt} = \varepsilon_q \frac{d\varepsilon_q}{dt} = \frac{\varepsilon_p \varepsilon_q}{\varepsilon_q - \varepsilon_p} [\varepsilon(u_q - u_p) + \frac{1}{2}(v_q - v_p)^2 + \frac{1}{2}(w_q - w_p)^2].$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{F}} &= \alpha N_1 + \beta T_3 + \gamma T_2, \\ \bar{\mathcal{G}} &= \alpha T_3 + \beta N_2 + \gamma T_1, \\ \bar{\mathcal{H}} &= \alpha T_2 + \beta T_1 + \gamma N_3,\end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma$  étant, comme on l'a déjà dit, les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$  dirigée de  $q$  vers  $p$ . Il y aura lieu de distinguer  $\bar{\mathcal{F}}_q, \bar{\mathcal{G}}_q, \bar{\mathcal{H}}_q$  et  $\bar{\mathcal{F}}_p, \bar{\mathcal{G}}_p, \bar{\mathcal{H}}_p$ , suivant que l'on donnera aux  $N_i, T_i$  les valeurs correspondant aux parties  $q$  ou  $p$ .

Par les équations (15),  $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{H}}$  sont les composantes de la pression (ou tension) s'exerçant sur l'élément  $d\sigma$ , comme, par les équations (8),  $F, G, H$  sont les composantes de la même pression rapportée à l'élément  $ds$ . Par conséquent

$$F ds = \bar{\mathcal{F}} d\sigma, \quad G ds = \bar{\mathcal{G}} d\sigma, \quad H ds = \bar{\mathcal{H}} d\sigma,$$

d'où, par (4),

$$F = \sqrt{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \bar{\mathcal{F}}, \quad G = \sqrt{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \bar{\mathcal{G}}, \quad H = \sqrt{\mathcal{L}^2 + \mathcal{M}^2 + \mathcal{N}^2} \bar{\mathcal{H}}.$$

Les équations de la quantité de mouvement (II), la relation supplémentaire (III) et les relations (IV) et (V) se transforment alors en

$$(II') \quad \varphi_p \frac{d\varphi_p}{dt} = \varphi_q \frac{d\varphi_q}{dt} = \frac{\bar{\mathcal{F}}_p - \bar{\mathcal{F}}_q}{u_q - u_p} = \frac{\bar{\mathcal{G}}_p - \bar{\mathcal{G}}_q}{v_q - v_p} = \frac{\bar{\mathcal{H}}_p - \bar{\mathcal{H}}_q}{w_q - w_p},$$

$$(III') \quad \varphi_p \frac{d\varphi_p}{dt} \left[ U_q - U_p + \frac{V_q^2 - V_p^2}{2} \right] = (\bar{\mathcal{F}}_p u_p + \bar{\mathcal{G}}_p v_p + \bar{\mathcal{H}}_p w_p) - (\bar{\mathcal{F}}_q u_q + \bar{\mathcal{G}}_q v_q + \bar{\mathcal{H}}_q w_q),$$

$$(IV') \quad 2\varphi_p^2 \left( \frac{d\varphi_p}{dt} \right)^2 (U_q - U_p) = \bar{\mathcal{F}}_q^2 + \bar{\mathcal{G}}_q^2 + \bar{\mathcal{H}}_q^2 - \bar{\mathcal{F}}_p^2 - \bar{\mathcal{G}}_p^2 - \bar{\mathcal{H}}_p^2,$$

$$(V') \quad \frac{2\varphi_p \varphi_q}{\varphi_q - \varphi_p} [\alpha(\bar{\mathcal{F}}_p - \bar{\mathcal{F}}_q) + \beta(\bar{\mathcal{G}}_p - \bar{\mathcal{G}}_q) + \gamma(\bar{\mathcal{H}}_p - \bar{\mathcal{H}}_q)] [U_q - U_p] \\ = \bar{\mathcal{F}}_q^2 + \bar{\mathcal{G}}_q^2 + \bar{\mathcal{H}}_q^2 - \bar{\mathcal{F}}_p^2 - \bar{\mathcal{G}}_p^2 - \bar{\mathcal{H}}_p^2.$$

**Remarque.** — P. Duhem a étudié la propagation des ondes de choc dans les fluides visqueux et a démontré les résultats suivants. Si la viscosité suit les lois classiques, aucune onde de choc ne peut se propager dans de tels fluides. Si au contraire la viscosité suit des lois telles qu'une propagation d'onde de choc soit possible, cette propagation se fait conformément à des formules tout à fait analogues à celles qui précèdent.

Une telle analogie ne doit pas surprendre. En réalité, les lois des ondes de choc que nous avons obtenues dans ce qui précède par une voie empruntée au calcul des variations, peuvent s'obtenir directement en appliquant à un élément de masse

- 1° le théorème de la quantité de mouvement;
- 2° le principe de la conservation de l'énergie.

Dans le calcul ainsi conduit, il ne faut pas oublier que les pressions s'exerçant sur un élément de surface sont généralement obliques. Mais que cette obliquité soit due à la viscosité ou à l'élasticité, elle intervient de même, et finalement les équations sont les mêmes dans les deux cas. Le seul point qui soit changé c'est que les composantes obliques des F, G, H se relient dans un cas à la fonction de dissipation, dans le second au potentiel interne.

**Vecteur de M. Hadamard.** — Pour étudier les ondes de choc dont nous venons de trouver les équations, représentons la discontinuité, avec M. Hadamard, par un vecteur  $\bar{f} + \bar{g} + \bar{h}$  défini comme suit :

Le long de la surface S, on a :  $x_q - x_p = 0$ . Donc

$$\frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial a} da + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial b} db + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial c} dc = 0$$

pour tout chemin  $da, db, dc$  situé sur la surface, c'est-à-dire vérifiant

$$l da + m db + n dc = 0.$$

La même chose doit se dire de  $y_q - y_p$  et de  $z_q - z_p$ . On peut donc poser, en se rappelant que les dérivées de  $x, y, z$  par rapport à  $a, b, c$  sont désignées par  $a_1 b_1 c_1, a_2 b_2 c_2, a_3 b_3 c_3,$

$$(29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{1q} - a_{1p}}{l} = \frac{b_{1q} - b_{1p}}{m} = \frac{c_{1q} - c_{1p}}{n} = f, \\ \frac{a_{2q} - a_{2p}}{l} = \frac{b_{2q} - b_{2p}}{m} = \frac{c_{2q} - c_{2p}}{n} = g, \\ \frac{a_{3q} - a_{3p}}{l} = \frac{b_{3q} - b_{3p}}{m} = \frac{c_{3q} - c_{3p}}{n} = h. \end{array} \right.$$

La quantité  $x_q - x_p$ , qui est nulle au temps  $t$  sur la surface S, reste nulle au temps  $t + dt$  sur la surface S' située à une distance normale  $dp$ . Donc

$$\frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial t} dt + \left[ \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial a} l + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial b} m + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial c} n \right] dp = 0.$$

Et une équation analogue est exacte pour  $y_q - y_p$  et  $z_q - z_p$ . D'où, par (29),

$$(30) \quad \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial t} = -f \frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial(y_q - y_p)}{\partial t} = -g \frac{dp}{dt}, \quad \frac{\partial(z_q - z_p)}{\partial t} = -h \frac{dp}{dt}.$$

Il importe de remarquer que le vecteur  $f, g, h$  est indépendant du choix des coordonnées. Faisons en effet un changement d'axes rectangulaires défini par le tableau

	$x'$	$y'$	$z'$
$x$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
$y$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$
$z$	$\alpha''$	$\beta''$	$\gamma''$

( $\alpha, \beta, \gamma$  ne représentent plus ici les cosinus directeurs de la normale à  $\Sigma$ . Pour le présent paragraphe et uniquement pour lui, ces lettres ont une toute autre signification et désignent les cosinus directeurs de  $x', y', z'$  par rapport à  $x$ ).

Dans le nouveau système d'axes, la surface  $S$  a pour normale  $l', m', n'$ . On définira un vecteur  $f', g', h'$  par

$$(31) \quad \frac{a'_{(1,2,3)q} - a'_{(1,2,3)p}}{l'} = \frac{b'_{(1,2,3)q} - b'_{(1,2,3)p}}{m'} = \frac{c'_{(1,2,3)q} - c'_{(1,2,3)p}}{n'} = (f', g', h').$$

Il faut montrer que le vecteur  $f', g', h'$  est le même que le vecteur  $f, g, h$ . Il suffit, pour cela, de faire voir, par exemple, que

$$f' = \alpha f + \alpha' g + \alpha'' h.$$

Mais (31) donne, en développant :

$$(32) \quad \begin{aligned} l' f' &= \frac{\partial(x'_q - x'_p)}{\partial a'} = \frac{\partial(x'_q - x'_p)}{\partial(x_q - x_p)} \left[ \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a'} + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a'} + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial a'} \right] \\ &\quad + \frac{\partial(x'_q - x'_p)}{\partial(y_q - y_p)} \left[ \frac{\partial(y_q - y_p)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a'} + \frac{\partial(y_q - y_p)}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a'} + \frac{\partial(y_q - y_p)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial a'} \right] \\ &\quad + \frac{\partial(x'_q - x'_p)}{\partial(z_q - z_p)} \left[ \frac{\partial(z_q - z_p)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial a'} + \frac{\partial(z_q - z_p)}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial a'} + \frac{\partial(z_q - z_p)}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial a'} \right] \\ &= \alpha \left[ \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial a} \alpha + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial b} \alpha' + \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial c} \alpha'' \right] + \alpha' \left[ \frac{\partial(y_q - y_p)}{\partial a} \alpha + \dots \right] + \alpha'' \left[ \frac{\partial(z_q - z_p)}{\partial a} \alpha + \dots \right]. \end{aligned}$$

Mais (29) donne

$$f = \frac{\frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial a}}{l} = \frac{\frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial b}}{m} = \frac{\frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial c}}{n} = \frac{\alpha \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial a} + \alpha' \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial b} + \alpha'' \frac{\partial(x_q - x_p)}{\partial c}}{\alpha l + \alpha' m + \alpha'' n} = \frac{\text{coefficient de } \alpha \text{ dans (32)}}{l}.$$

Donc : coefficient de  $\alpha$  dans (32) =  $l'f$ .

De même coefficient de  $\alpha'$  dans (32) =  $l'g$ ,

coefficient de  $\alpha''$  dans (32) =  $l'h$ .

Donc  $l'f' = l'(\alpha f + \alpha' g + \alpha'' h)$ .

C'est ce qu'il fallait démontrer.

**Discontinuité thermique.** — Le vecteur  $f, g, h$  marque la discontinuité mécanique de l'onde de choc. Pour achever de caractériser cette onde, il faut considérer la discontinuité thermique, marquée par l'accroissement d'entropie  $k = E_q - E_p$  qui se produit au passage de l'onde. C'est une quantité qui, par définition même, est indépendante des axes.

**Courbe représentative des ondes de choc.** — L'invariance de  $k$  et du vecteur  $f, g, h$  va nous permettre de prendre des axes particuliers. Nous choisirons l'origine des coordonnées sur la surface  $S$  et l'axe des  $x$  normal à cette surface. Nous étudierons la discontinuité à l'origine : il faudra donc faire  $l = 1, m = 0, n = 0$ , et par suite

$$(33) \quad a_{(1,2,3)q} = a_{(1,2,3)p} + (f, g, h); \quad b_{(1,2,3)q} = b_{(1,2,3)p}; \quad c_{(1,2,3)q} = c_{(1,2,3)p}.$$

$$(34) \quad (F, G, H) = \Lambda_{x,y,z} = r \frac{\partial U}{\partial a_{1,2,3}}.$$

Portons ces valeurs dans les équations des ondes de choc que nous prendrons sous la forme (I), (II), (IV). Remarquons d'ailleurs que

$$u = \frac{\partial x}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial y}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t}$$

et servons-nous de (30) pour transformer (I) et (II).

Dans cette opération, l'équation (I) donnera simplement l'expression de  $\frac{1}{\rho_q} - \frac{1}{\rho_p}$  en fonction du vecteur  $f, g, h$ . Il est inutile de s'y arrêter. Quant à (II) et à (IV), elles deviennent

$$(II'') \quad \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 (f, g, h) = \left(\frac{\partial U}{\partial a_{1,2,3}}\right)_q - \left(\frac{\partial U}{\partial a_{1,2,3}}\right)_p.$$

$$(IV'') \quad 2 \left(\frac{dp}{dt}\right)^2 (U_q - U_p) = \left(\frac{\partial U}{\partial a_1}\right)_q^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial a_2}\right)_q^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial a_3}\right)_q^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial a_1}\right)_p^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial a_2}\right)_p^2 - \left(\frac{\partial U}{\partial a_3}\right)_p^2.$$

L'état initial  $p$  étant donné,  $a_{1p}, a_{2p}, a_{3p}$  sont donnés. Il en est de même des  $b_{ip}$ , des  $c_{ip}$  et de  $E_p$ . Tous les états  $q$  qui peuvent se propager dans l'état  $p$  par l'onde de choc que nous supposons, c'est-à-dire par une onde de choc normale à  $Ox$  en  $O$ , seront caractérisés par des valeurs différentes de  $f, g, h, k$ . Si, dans (II'') et (IV'') on remplace les  $a_{iq}, b_{ip}, c_{ip}$  par leurs valeurs (33) et  $E_q$  par  $E_p + k$ , on a quatre relations entre les cinq quantités  $f, g, h, k$  et  $\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$ . Une seule de ces quantités est donc arbitraire. Si on considère le point  $R$ , extrémité du vecteur  $\overline{OR} = \overline{f} + \overline{g} + \overline{h}$ , ce point décrit une courbe.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

*Étant donné, au point  $O$ , en premier lieu un état du milieu, en second lieu une direction de propagation d'onde, toute onde de choc qui peut se propager dans ledit état suivant ladite direction peut se représenter par un vecteur  $OR$ . L'extrémité des vecteurs représentant toutes les ondes de choc possibles décrit une courbe  $\mathcal{C}$ .*

La courbe  $\mathcal{C}$  passe évidemment par l'origine, car les équations (II''), (IV'') sont vérifiées par  $f = g = h = k = 0$ . Nous allons étudier cette courbe au voisinage de  $O$ . En d'autres termes, nous allons étudier les ondes de choc qui ne produisent qu'une variation très petite de vitesse ou de densité. Elles ont évidemment pour limite (c'est d'ailleurs un point sur lequel nous reviendrons) les ondes d'accélération que peut propager le milieu. Nous allons chercher comment elles tendent vers cette limite.

**Variation d'entropie.** — Soit donc une discontinuité représentée par un point  $R$  de la courbe  $\mathcal{C}$  voisin de  $O$ . Choisissons comme infiniment petit principal la longueur  $OR = \sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$ . L'accroissement d'entropie  $k$  est infiniment petit avec  $f, g, h$ . Cherchons quel est son ordre d'infinitude.

Servons-nous pour cela de l'équation suivante qui résulte de la combinaison de (II'') et de (IV'') :

$$(35) \quad U_q - U_p = \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial a_1}\right)_q + \left(\frac{\partial U}{\partial a_1}\right)_p \right] f + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial a_2}\right)_q + \left(\frac{\partial U}{\partial a_2}\right)_p \right] g + \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{\partial U}{\partial a_3}\right)_q + \left(\frac{\partial U}{\partial a_3}\right)_p \right] h.$$

Convenons d'ailleurs d'adopter la notation suivante. Soit une fonction  $\psi$  quelconque de  $a_1, a_2, a_3, E$ . Donnons à ces variables des accroissements infiniment petits  $f, g, h, k$ . La différentielle d'ordre  $n$  de  $\psi$  comprend des termes en  $f, g, h$ , puis des termes où  $k$  est en facteur. La partie de cette différentielle qui subsiste quand on fait  $k = 0$  sera désignée par  $\Delta^n \psi$ . En somme, on pose

$$\Delta^n \psi = \left( \frac{\partial \psi}{\partial a_1} f + \frac{\partial \psi}{\partial a_2} g + \frac{\partial \psi}{\partial a_3} h \right)^{(n)}.$$

Avec cette notation, écrivons (35) en nous arrêtant au premier ordre. Et supprimons, pour simplifier l'écriture, l'indice  $p$ . On a :

$$\Delta U + \frac{\partial U}{\partial E} k = f \frac{\partial U}{\partial a_1} + g \frac{\partial U}{\partial a_2} + h \frac{\partial U}{\partial a_3} = \Delta U.$$

Comme  $\frac{\partial U}{\partial E}$  vaut  $\Theta$ , quantité différente de zéro, on a forcément  $k = 0$ . Cela montre que  $k$  est certainement d'ordre supérieur au premier.

Écrivons alors (35) en négligeant les ordres d'infinitude supérieurs au deuxième.

$$\begin{aligned} \Delta U + \frac{1}{2} \Delta^2 U + \frac{\partial U}{\partial E} k &= \left( f \frac{\partial U}{\partial a_1} + g \frac{\partial U}{\partial a_2} + h \frac{\partial U}{\partial a_3} \right) + \frac{1}{2} \left( f \Delta \frac{\partial U}{\partial a_1} + g \Delta \frac{\partial U}{\partial a_2} + h \Delta \frac{\partial U}{\partial a_3} \right) \\ &= \Delta U + \frac{1}{2} \Delta^2 U. \end{aligned}$$

D'où encore  $k = 0$ . L'accroissement d'entropie  $k$  est donc d'ordre supérieur au second.

Écrivons alors (35) en négligeant les ordres d'infinitude supérieurs au troisième.

$$\begin{aligned} \Delta U + \frac{1}{2} \Delta^2 U + \frac{1}{6} \Delta^3 U + \frac{\partial U}{\partial E} k &= \left( f \frac{\partial U}{\partial a_1} + g \frac{\partial U}{\partial a_2} + h \frac{\partial U}{\partial a_3} \right) + \frac{1}{2} \left( f \Delta \frac{\partial U}{\partial a_1} + g \Delta \frac{\partial U}{\partial a_2} + h \Delta \frac{\partial U}{\partial a_3} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( f \Delta^2 \frac{\partial U}{\partial a_1} + g \Delta^2 \frac{\partial U}{\partial a_2} + h \Delta^2 \frac{\partial U}{\partial a_3} \right) = \Delta U + \frac{1}{2} \Delta^2 U + \frac{1}{4} \Delta^3 U. \end{aligned}$$

Donc

$$(36) \quad \frac{\partial U}{\partial E} k = \frac{1}{12} \Delta^3 U.$$

*L'accroissement d'entropie produit par le passage d'une onde de choc infiniment petite est donc du troisième ordre en général.*

Ce résultat est important pour éliminer une objection que l'on pourrait faire à l'affirmation produite plus haut, que l'onde de choc tend vers une onde d'accélération quand la discontinuité est très petite. Pour étudier une onde d'accélération on peut en effet supposer, au passage de cette onde, une variation très petite de vitesse et de densité. Mais en même temps il faut, pour respecter la relation supplémentaire, supposer une variation, non pas seulement très petite, mais rigoureusement nulle d'entropie, puisque le phénomène est supposé adiabatique réversible. Pour que l'onde de choc faible tende bien vers une onde d'accélération, il faut donc que la variation d'entropie soit infiniment petite d'ordre supérieur à 1 par rapport à  $\sqrt{f^2 + g^2 + h^2}$ . On pouvait s'attendre à ce qu'il en fût bien ainsi, mais il n'est pas sans intérêt de l'avoir vérifié.

En somme, la loi adiabatique dynamique d'Hugoniot tend bien à se confondre avec la loi adiabatique ordinaire lorsque l'onde de choc produit une discontinuité très petite.

**Tangentes à la courbe  $\mathcal{C}$  à l'origine.** — Il résulte de tout ce qui précède que, si nous écrivons les équations (II'') et (IV'') de la courbe  $\mathcal{C}$  en ne conservant que les termes du premier degré, nous obtiendrons les équations de la ou des tangentes à  $\mathcal{C}$ , et en même temps les lois de la propagation des ondes d'accélération. L'équation (IV'') ne donnera évidemment rien de plus que la condition  $k = 0$ . Les équations (II'') deviendront, en écrivant, pour simplifier,  $D^2$  à la place de  $\left(\frac{dp}{dt}\right)^2$  :

$$(37) \quad D^2(f, g, h) = \frac{\partial^2 U}{\partial a_{(1,2,3)} \partial a_1} f + \frac{\partial^2 U}{\partial a_{(1,2,3)} \partial a_2} g + \frac{\partial^2 U}{\partial a_{(1,2,3)} \partial a_3} h.$$

Si l'on considère  $f, g, h$  comme des coordonnées, le problème qui consiste à interpréter ces trois équations est identique au problème de la détermination des axes de la surface du second degré

$$(38) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial a_1^2} f^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial a_2^2} g^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial a_3^2} h^2 + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_2 \partial a_3} gh + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_3 \partial a_1} hf + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial a_1 \partial a_2} fg = 1.$$

Nous admettrons que cette surface est un ellipsoïde; nous rappellerons dans la seconde note du présent Mémoire comment MM. Hadamard et Duhem ont démontré ce résultat.

Pour que les  $f, g, h$  donnés par (37) ne soient pas tous nuls, il faut que  $D^2$  soit donné par l'équation du troisième degré en  $D^2$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial a_1^2} - D^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial a_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_1 \partial a_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_2 \partial a_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_2^2} - D^2 & \frac{\partial^2 U}{\partial a_2 \partial a_3} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial a_3 \partial a_1} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_3 \partial a_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial a_3^2} - D^2 \end{vmatrix} = 0,$$

c'est-à-dire qu'il faut que  $D$  soit égal à l'inverse d'un demi-axe de l'ellipsoïde (38). Ce sont là les valeurs des célérités des ondes d'accélération. Pour ces valeurs de  $D$ , (37) représentent les axes de l'ellipsoïde et, par suite, la courbe  $\mathcal{C}$  a un point triple à l'origine avec, pour tangentes, les axes de l'ellipsoïde (38). En résumé donc :

1° Nous retrouvons le théorème énonçant que les vecteurs représentant les ondes d'accélération sont dirigés suivant les axes d'un certain ellipsoïde de polarisation, théorème démontré par M. Hadamard pour les mouvements isothermes et étendu par Duhem aux mouvements adiabatiques.

2° Nous constatons que la courbe  $\mathcal{C}$  a un point triple à l'origine et que ses tangentes en ce point sont les axes de l'ellipsoïde de polarisation adiabatique.

**Cas des milieux vitreux.** — *La courbe  $\mathcal{C}$  pour les milieux vitreux.* — Je n'ai rien de plus à dire sur les propriétés de la courbe  $\mathcal{C}$  dans le cas général d'un milieu quelconque. Je pousserai l'étude plus loin dans le cas particulier d'un milieu vitreux, c'est-à-dire d'un milieu que l'on peut rapporter à un état initial homogène et *isotrope*. Pour un tel milieu, l'énergie interne  $U$  ne dépend des  $\varepsilon_i, \gamma_i$  que par l'intermédiaire des fonctions

$$(39) \quad \begin{cases} J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3, \\ J_2 = 4(\varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2), \\ J_3 = 4\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 - \varepsilon_1 \gamma_1^2 - \varepsilon_2 \gamma_2^2 - \varepsilon_3 \gamma_3^2 + \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3. \end{cases}$$

Je supposerai ici que l'état  $p$  dans lequel j'envisage la propagation des ondes est précisément l'état initial *homogène et isotrope*, et je vais étudier la courbe  $\mathcal{C}$  dans ce cas.

Dans l'état  $p$ , on a donc :

$$a_{1p} = 1, \quad b_{1p} = 0, \quad c_{1p} = 0, \quad a_{2p} = 0, \quad b_{2p} = 1, \quad c_{2p} = 0, \quad a_{3p} = 0, \quad b_{3p} = 0, \quad c_{3p} = 1.$$

Les  $\varepsilon_i, \gamma_i$  ainsi que  $J_1, J_2, J_3$  sont nuls dans cet état.

L'axe des  $x$  étant toujours perpendiculaire à  $S$ , on a, par (33) :

$$a_{1q} = 1 + f, \quad b_{1q} = 0, \quad c_{1q} = 0, \quad a_{2q} = g, \quad b_{2q} = 1, \quad c_{2q} = 0, \quad a_{3q} = h, \quad b_{3q} = 0, \quad c_{3q} = 1,$$

et par suite :

$$(40) \quad \begin{cases} \varepsilon_{1q} = f + \frac{1}{2}(f^2 + g^2 + h^2), & \gamma_{1q} = 0, & J_{1q} = f + \frac{1}{2}(f^2 + g^2 + h^2), \\ \varepsilon_{2q} = 0, & \gamma_{2q} = h, & J_{2q} = -(g^2 + h^2), \\ \varepsilon_{3q} = 0, & \gamma_{3q} = g, & J_{3q} = 0. \end{cases}$$

Les équations (II<sup>n</sup>) et (IV<sup>n</sup>) de la courbe  $\mathcal{C}$  sont donc :

$$(41) \quad \begin{cases} D^2 f = \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_q (1 + f) - \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_p, \\ D^2 g = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_q - 2 \left( \frac{\partial U}{\partial J_2} \right)_q \right] g, \\ D^2 h = \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_q - 2 \left( \frac{\partial U}{\partial J_2} \right)_q \right] h; \end{cases}$$

$$(42) \quad D^2(U_q - U_p) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_q^2 (1 + f)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} - 2 \frac{\partial U}{\partial J_2} \right)_q^2 (g^2 + h^2) - \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_p^2 \right].$$

Ces équations ne contiennent évidemment que  $f$ ,  $g^2 + h^2$  et  $k$ . Elles sont vérifiées de deux façons. On peut, en premier lieu, avoir  $g = 0$ ,  $h = 0$ ; la première et la quatrième équation définissent alors  $D^2$  et  $k$  en fonction de  $f$ . En second lieu, si  $g$  et  $h$  ne sont pas nuls ensemble, la seconde et la troisième équation donnent seulement

$$D^2 = \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_q - 2 \left( \frac{\partial U}{\partial J_2} \right)_q,$$

relation qui, avec la première et la quatrième équation, déterminent  $D^2$ ,  $k$  et  $g^2 + h^2$  en fonction de  $f$ . Par conséquent, la courbe  $\mathcal{C}$  dégénère ici en une figure composée

1° de l'axe des  $x$ ;

2° d'une surface de révolution autour de  $Ox$ .

*Développement du potentiel.* — Nous allons étudier maintenant les ondes de choc qui ne sont pas trop fortes, c'est-à-dire celles qui sont représentées par un point  $R$  voisin de  $O$ .

Si R est sur l'axe des  $x$ , l'onde tend vers l'onde longitudinale d'accélération. Si R est sur la surface de révolution qui constitue ici la seconde partie de  $\mathcal{C}$ , l'onde tend vers les ondes transversales d'accélération. Comment se fait cette tendance, et ces ondes de choc sont-elles plus ou moins rapides que les ondes d'accélération dont elles se rapprochent indéfiniment ?

L'application du principe de Carnot-Clausius va nous permettre de donner une réponse à cette question. Nous exprimerons, conformément à ce principe, que la variation d'entropie produite par le phénomène adiabatique irréversible qu'est le passage de l'onde doit être positive.

Les déformations étant supposées très petites, l'énergie interne U peut se développer par rapport aux puissances ascendantes des  $J_i$ . Remplaçant les J par leurs valeurs en  $\varepsilon_i, \gamma_i$ , on trouve, en s'arrêtant au second degré :

$$rU = -2\nu'(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \mu' \left[ \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \right] + \frac{\lambda'}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2.$$

$\lambda', \mu', \nu'$  sont des fonctions de E. Nous avons mis  $\lambda', \mu', \nu'$  à la place des notations  $\lambda, \mu, \nu$  de Cosserat et de Poincaré (*Théorie de l'Électricité*) parce que nous envisageons ici le développement de U; les coefficients  $\lambda, \mu, \nu$  de Cosserat et de Poincaré seraient les coefficients correspondants du potentiel interne  $\Phi$ .

Mais ce développement jusqu'au second ordre n'est pas suffisant ici. Il faut aller jusqu'au quatrième ordre. Nous nous contenterons de le faire dans le cas particulier où l'axe Ox est perpendiculaire à S et où l'état  $p$  coïncide avec l'état initial. Nous en avons le droit, car nous ne prenons ultérieurement aucune dérivée par rapport à des quantités qui sont nulles dans ce cas particulier. Notre développement est alors, en vertu des formules (40) :

$$(43) \quad rU = -2\nu'f + \left( \frac{\lambda'}{2} + \mu' - \nu' \right) f^2 + \left( \frac{\mu'}{2} - \nu' \right) (g^2 + h^2) + \chi f^3 + \psi f(g^2 + h^2) + \sigma f^4 + \tau f^2(g^2 + h^2) + \omega (g^2 + h^2)^2.$$

Les équations (41) de la courbe  $\mathcal{C}$  sont alors, pour les points voisins de l'origine, et en s'arrêtant, pour le moment, au second ordre,

$$(44) \quad \begin{cases} rD^2 f = (\lambda' + 2\mu' - 2\nu')f + 3\chi f^2 + \psi(g^2 + h^2), \\ rD^2 g = (\mu' - 2\nu')g + 2\psi fg, \\ rD^2 h = (\mu' - 2\nu')h + 2\psi fh. \end{cases}$$

Si on écrit ces équations en y supprimant les termes du second ordre, on a des équations simplifiées linéaires et homogènes en  $f, g, h$ . Si on recherche, conformément à ce qui a été dit plus haut, les valeurs de  $D^2$  pour lesquelles ces équations

simplifiées comportent des solutions non toutes nulles pour  $f, g, h$ , on trouve facilement

$$D_l^2 = \frac{\lambda' + 2\mu' - 2\nu'}{r}, \quad D_t^2 = \frac{\mu' - 2\nu'}{r};$$

$D_l$  est la célérité des ondes longitudinales d'accélération,  $D_t$  celle des ondes transversales.

*Ondes de choc voisines des ondes longitudinales.* — Prenons maintenant une onde de choc voisine d'une onde longitudinale d'accélération. Son point représentatif R est situé au voisinage de O sur la partie de  $\mathcal{C}$  constituée par l'axe Ox. Le paramètre  $D^2$  y a la valeur  $D_l^2 + \varepsilon$ , et la première équation (44) donne, au deuxième ordre près :

$$(45) \quad r\varepsilon = 3\gamma f.$$

Mais exprimons maintenant que la variation d'entropie est positive. Nous avons, par (36),

$$(46) \quad \frac{\partial U}{\partial E} k = \frac{1}{12} \Delta^3 U = \text{par (43)} \frac{1}{2} \frac{\gamma}{r} f^3 = \text{par (45)} \frac{1}{54} \frac{r^2}{\gamma^2} \varepsilon^3.$$

Or  $\frac{\partial U}{\partial E}$  est positif, car c'est la température absolue  $\Theta$ . Il faut que  $k$  soit positif. Donc :

1°  $\varepsilon$  est positif, et par suite l'onde de choc va plus vite que l'onde longitudinale d'accélération.

2°  $\varepsilon$  étant positif, il faut que  $f$  et  $\gamma$  soient de même signe. Remarquons d'ailleurs que la densité  $\rho$  dans l'état  $q$  est égale à  $\frac{r}{1+f}$ . Par conséquent, les seules ondes de choc compatibles avec le principe de Carnot sont celles où la variation de densité est de signe contraire à  $\gamma$ .

Ces résultats comprennent comme cas particuliers ceux que nous avons démontrés autrefois pour les gaz.

Pour un gaz, en effet, l'énergie interne U est fonction de la densité  $\rho$  et de E. Mais on sait que le déterminant  $\Delta$  est égal à  $(1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3)^{1/2}$ . Donc  $\rho = \frac{r}{(1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3)^{1/2}}$ . Si on suppose  $J_1, J_2, J_3$  petits et si on développe U par rapport aux puissances ascendantes de ces quantités, on vérifie que le coefficient  $\gamma$ , tel qu'il est défini par (43), n'est autre chose que  $-\frac{1}{6} \frac{\partial \left( \rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)}{\partial \rho}$ ,  $p$  étant la pression  $\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho}$ . Les ondes

de choc compatibles avec le principe de Carnot sont donc ici celles où la variation

de densité est de même signe que  $\frac{\partial \left( \rho^2 \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)}{\partial \rho}$ . C'est bien le résultat que nous avons démontré dans notre Mémoire *Sur la propagation des réactions chimiques dans les gaz*.

*Ondes de choc voisines des ondes transversales.* — Considérons maintenant une onde de choc représentée par un point R situé, au voisinage de O, sur la partie de C constituée par la surface de révolution autour de Ox. La valeur de D<sup>2</sup> est D<sub>t</sub><sup>2</sup> + ε. Les équations (44) donnent

$$(47) \quad f = \frac{r\varepsilon}{2\psi} = -\frac{\psi}{\lambda' + \mu'}(g^2 + h^2),$$

$f$  est donc, comme on le savait d'ailleurs, du second ordre.

D'autre part,  $\Delta^3 U$  est égal, par (43), à  $6f(\gamma f^2 + \psi g^2 + \psi h^2)$ . Il est donc du quatrième ordre. Il suit de là que le calcul qui a donné la formule  $\frac{\partial U}{\partial E} k = \frac{1}{12} \Delta^3 U$  n'est plus valable ici. Il faut reprendre la question en ne négligeant que le cinquième ordre. Un raisonnement tout à fait analogue à celui qui a donné cette formule (36) permet alors de montrer que

$$\frac{\partial U}{\partial E} k = \frac{1}{12} \Delta^3 U + \frac{1}{24} \Delta^4 U,$$

ce qui, par (43), donne

$$r \frac{\partial U}{\partial E} k = \frac{1}{2} (\gamma f^2 + \psi f g^2 + \psi f h^2) + \sigma f^4 + \tau f^2 (g^2 + h^2) + \omega (g^2 + h^2)^2$$

ou, en vertu de (47),

$$(48) \quad r \frac{\partial U}{\partial E} k = \frac{r^2 \varepsilon^2 (\lambda' + \mu')^2}{4\psi^2} \left( \omega - \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{\lambda' + \mu'} \right).$$

Il faut que  $k$  soit positif. Par conséquent (47) et (48) donnent les résultats suivants :

L'onde de choc envisagée n'est compatible avec le principe de Carnot-Clausius que si

$$\omega > \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{\lambda' + \mu'}.$$

Le sens de la variation de densité produite par l'onde dépend du signe de  $f$ , puisque  $\rho = \frac{\rho'}{1+f}$ . On voit, par (47), que la variation de densité a le signe de  $\frac{\psi}{\lambda'+\mu'}$ .

Enfin le signe de  $\varepsilon$  dépend de celui de  $\lambda' + \mu'$ . Mais, dans tous les corps connus, la célérité des ondes longitudinales d'accélération étant supérieure à celle des ondes transversales,  $\lambda' + \mu'$  est positif.  $\varepsilon$  est donc négatif, et la célérité de l'onde de choc est *plus lente* que celle des ondes transversales d'accélération.

Nous avons proposé autrefois d'admettre à titre de postulat que, dans un milieu quelconque, une onde de choc est toujours plus rapide que les ondes d'accélération dans le milieu qui la précède. Si ce postulat était admis ici, il faudrait conclure que les ondes de choc que nous venons d'examiner, même compatibles avec le principe de Carnot-Clausius, sont impossibles. Mais, ainsi que nous l'avons expliqué ultérieurement, nous pensons aujourd'hui que le postulat en question n'est pas exact. Nous estimons que la condition, pour l'onde de choc, d'être plus rapide que les ondes d'accélération dans le milieu avant, est très importante au point de vue de l'altération de cette onde, mais n'est pas nécessaire pour son existence (\*).

---

(\*) Voir sur ce sujet notre *Mécanique des Explosifs*, chez Doin, Paris, 1917.

## DEUXIÈME NOTE

### LES COEFFICIENTS THERMODYNAMIQUES DES CORPS ÉLASTIQUES DANS LE CAS DE POINCARÉ

**Le cas de Poincaré.** — Considérons, comme dans la Note précédente, un corps quelconque, solide ou fluide, qui peut être rapporté à un état initial *homogène* et dont le potentiel interne et l'énergie interne sont

$$\int r \Phi(\varepsilon_i, \gamma_i, \Theta) de \quad \text{et} \quad \int r U(\varepsilon_i, \gamma_i, E) de.$$

Mais n'envisageons ici que les états très voisins de cet état initial. Les quantités  $\varepsilon_i$  et  $\gamma_i$  sont alors très petites. Développons  $\Phi$  et  $U$  par rapport aux puissances croissantes de  $\varepsilon_i, \gamma_i$  en nous arrêtant au second ordre. Il vient

$$(49) \quad \begin{cases} \Phi(\varepsilon_i, \gamma_i, \Theta) = \varphi_1(\varepsilon_i, \gamma_i) + \varphi_2(\varepsilon_i, \gamma_i), \\ U(\varepsilon_i, \gamma_i, E) = \varphi_1'(\varepsilon_i, \gamma_i) + \varphi_2'(\varepsilon_i, \gamma_i); \end{cases}$$

$\varphi_1$  et  $\varphi_1'$  sont des fonctions linéaires et homogènes en  $\varepsilon_i, \gamma_i$  dont les coefficients sont fonctions de  $\Theta$  pour  $\varphi_1$ , de  $E$  pour  $\varphi_1'$ .  $\varphi_2$  et  $\varphi_2'$  sont des formes quadratiques en  $\varepsilon_i, \gamma_i$  dont les coefficients sont de même fonctions de  $\Theta$  ou de  $E$ . (Bien entendu,  $\varphi_1'$  et  $\varphi_2'$  ne sont pas les dérivées de  $\varphi_1$  et de  $\varphi_2$ .)

La forme (49) du potentiel ou de l'énergie internes est propre à examiner les petites déformations aux environs de l'état initial, c'est-à-dire, en somme, à faire la théorie classique de l'élasticité, laquelle se borne à considérer les déformations infiniment petites. Elle peut servir notamment à étudier les coefficients thermodynamiques des corps — chaleurs spécifiques, coefficients d'élasticité et de dilatation, etc. — lesquels, pour un état donné, correspondent à des échauffements, extensions, compressions, etc., infiniment petits à partir de cet état.

L'étude des coefficients thermodynamiques des corps élastiques a été faite d'une manière très complète par Voigt (\*). Si nous nous proposons d'en reprendre ici

---

(\*) Voigt, *Wiedemanns Annalen*, Bd 36, S 743, 1889. — Voigt, *Thermodynamik*, Bd 1 (Götschenche Verlagshandlung, Leipzig, 1903).

quelques points, c'est que les hypothèses dont part Voigt nous paraissent laisser la place à une généralisation qui, à notre connaissance, n'a pas été donnée par les successeurs de ce savant. En effet, Voigt et ses successeurs font toujours l'hypothèse que les tensions sont sinon nulles, du moins très petites dans l'état initial. Cet état initial est donc pour eux soit un *état naturel* (tensions nulles), soit ce qu'on pourrait appeler un *état quasi naturel* (tensions petites).

C'est Poincaré qui a montré comment il fallait faire la théorie des déformations élastiques infiniment petites lorsque les tensions de l'état initial sont quelconques<sup>(1)</sup>. Mais il s'est contenté de montrer quel est le développement du potentiel dans ce cas, — résultat qui, il est vrai, contient en puissance toute la question, — sans faire beaucoup d'applications de ce développement. Nous nous proposons d'utiliser les principes posés par lui pour étudier les coefficients thermodynamiques des corps. Nous dirons qu'un corps dont l'état initial a des tensions quelconques se trouve dans le cas de Poincaré.

**Le potentiel dans le cas de Poincaré.** — Montrons en quoi diffère le potentiel suivant qu'on considère des états naturels et quasi naturels ou des états quelconques.

Les déformations étant infiniment petites, les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  sont très petits et leurs parties principales sont :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{ll} e_1 = \frac{\partial \xi}{\partial a}, & g_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial \gamma_1}{\partial c}, \\ e_2 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial b}, & g_2 = \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial a}, \\ e_3 = \frac{\partial \zeta}{\partial c}, & g_3 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial b}. \end{array} \right.$$

Pouvons-nous remplacer les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  par les  $e_i$ ,  $g_i$  dans les expressions (49)? Parlons d'ailleurs simplement de  $\Phi$  : ce que nous en dirons serait à répéter pour  $U$ . Nous pouvons faire le remplacement dans la forme  $\varphi_2$ , puisque nous convenons de négliger les infiniment petits d'ordre supérieur au deuxième. Mais nous ne le pouvons pas dans  $\varphi_1$ , sous peine de négliger des termes de l'ordre de  $\varphi_3$ .

Les dérivées partielles de  $\xi$ ,  $\gamma_1$ ,  $\zeta$  entrent donc dans le potentiel autrement que par  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ . Si nous posons

$$(51) \quad \omega_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial b} - \frac{\partial \gamma_1}{\partial c}, \quad \omega_2 = \frac{\partial \xi}{\partial c} - \frac{\partial \zeta}{\partial a}, \quad \omega_3 = \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} - \frac{\partial \xi}{\partial b};$$

le potentiel dépend, en général, de  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ .

(<sup>1</sup>) Poincaré, *Leçons sur la Théorie mathématique de la lumière*, chez Carré, Paris, 1889. *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, chez Carré, Paris, 1902.

Mais il y a un cas où le remplacement de  $\varepsilon_i, \gamma_i$  par  $e_i, g_i$  est permis même dans la forme linéaire  $\varphi_i$ . C'est lorsque  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_i}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma_i}$  (qui sont des constantes) sont ou nuls ou très petits — et nous devons entendre par *très petits* : de l'ordre de  $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \xi}{\partial b}, \dots$  — Alors, en effet, le produit par les termes du deuxième degré de  $\varepsilon_i, \gamma_i$  est du troisième ordre et négligeable au degré d'approximation convenu.

Or, il résulte des équations (12) que  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varepsilon_i}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \gamma_i}$  sont la valeur de  $\frac{N_i}{\rho}, \frac{T_i}{\rho}$  dans l'état initial. (Rappelons que dans les formules de l'Introduction on peut remplacer  $U$  par  $\Phi$ ). Le cas considéré est donc celui où les tensions de l'état initial sont ou bien nulles (état naturel), ou bien petites (état quasi naturel). Et nous voyons avec précision ce qu'il faut entendre par *tensions petites* : ce sont des tensions comparables à celles que va provoquer une déformation infiniment petite  $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \xi}{\partial b}, \dots$ , à partir de l'état initial considéré.

Ainsi donc, toutes les théories où le potentiel ne dépend des dérivées  $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \xi}{\partial b}, \dots$ , que par l'intermédiaire des dilatations  $e_i$  et des glissements  $g_i$ , toutes ces théories, dis-je, supposent par là même que les états initiaux sont naturels ou quasi naturels. C'est le cas des travaux de Voigt et de ceux de M. Roy <sup>(1)</sup>, et ces auteurs disent d'ailleurs formellement qu'ils se placent au voisinage d'un état naturel. C'est aussi celui des travaux de Duhem <sup>(2)</sup>; mais ce savant n'énonce pas explicitement cette restriction. Il semble probable qu'il a été guidé inconsciemment par l'idée que les tensions dans l'état initial sont au plus de l'ordre de celles que mettent en jeu les déformations infiniment petites à étudier. Il n'est pas douteux que, pour les solides élastiques, cette condition est généralement remplie. Cependant, on peut concevoir qu'elle ne le soit pas si le solide est initialement comprimé d'une façon tout à fait anormale. En tout cas, elle est inexacte pour les gaz.

Nous envisagerons ici des états initiaux absolument quelconques. Le principal intérêt de la généralisation que nous allons exposer ainsi sera de rendre applicables aux fluides, même gazeux, les formules générales de l'Élasticité. En somme, quand on fait la théorie de l'Élasticité pour des déformations infiniment petites en se plaçant dans le cas de Poincaré, on fait du même coup la théorie des déformations infiniment petites d'un milieu quelconque.

**Cas des corps isotropes.** — *Le potentiel.* — Éclairons ces généralités par la considération des corps isotropes.  $\Phi$  est alors fonction des quantités  $J_1, J_2, J_3$  don-

<sup>(1)</sup> L. Roy, *Recherches sur les propriétés thermomécaniques des corps solides* (Thèse), chez Gauthier-Villars, Paris, 1910.

<sup>(2)</sup> Duhem, *loc. cit.* et *Traité d'Énergétique*, T. I, chez Gauthier-Villars, Paris, 1911.

nées par (3g). Son développement arrêté aux termes du second degré est :

$$(52) \quad r\Phi = -2\nu J_1 - \frac{\mu}{2} J_2 + \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) J_1^2 \\ = -2\nu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \mu \left[ \frac{1}{2}(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \right] + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2.$$

Ce potentiel peut s'écrire :

$$r\Phi = -2\nu(e_1 + e_2 + e_3) + \mu \left[ \frac{1}{2}(g_1^2 + g_2^2 + g_3^2) + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 \right] + \frac{\lambda}{2}(e_1 + e_2 + e_3)^2 \\ - \nu \left[ \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial b}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial c}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial c}\right)^2 \right].$$

Le dernier terme ne disparaît que si  $\nu$  est nul ou au moins de l'ordre de  $\frac{\partial \xi}{\partial a}, \frac{\partial \xi}{\partial b}, \dots$

Or, les formules (12) donnent la signification de  $\nu$ . Elles montrent que, dans l'état initial,  $N_1 = N_2 = N_3 = -2\nu$ ,  $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ .

L'état initial est donc soumis à une pression normale et uniforme  $2\nu$ .

*Équations des mouvements isothermes.* — Telle est la forme du potentiel des corps isotropes donnée par Poincaré. Elle permet d'obtenir, avec le même auteur, les équations des petits mouvements.

En effet, commençons par poser

$$\theta = \frac{\partial \xi}{\partial a} + \frac{\partial \eta}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c}.$$

Les définitions (6) et (12) des A, B, C et des  $N_i, T_i$  donnent, avec l'expression (52) du potentiel et en négligeant le deuxième ordre :

$$(53) \quad \left. \begin{aligned} A_x &= -2\nu + 2(\mu - \nu) \frac{\partial \xi}{\partial a} + \lambda\theta, & B_x &= -2\nu \frac{\partial \xi}{\partial b} + \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a} \right), & C_x &= -2\nu \frac{\partial \xi}{\partial c} + \mu \left( \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial a} \right), \\ A_y &= -2\nu \frac{\partial \eta}{\partial a} + \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial b} \right), & B_y &= -2\nu + 2(\mu - \nu) \frac{\partial \eta}{\partial b} + \lambda\theta, & C_y &= -2\nu \frac{\partial \eta}{\partial c} + \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right), \\ A_z &= -2\nu \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \mu \left( \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial c} \right), & B_z &= -2\nu \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \mu \left( \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial c} \right), & C_z &= -2\nu + 2(\mu - \nu) \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \lambda\theta, \\ N_1 &= -2\nu + 2(\mu - \nu) \frac{\partial \xi}{\partial a} + (\lambda + 2\nu)\theta, & T_1 &= (\mu - \nu) \left( \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial \zeta}{\partial b} \right), \\ N_2 &= -2\nu + 2(\mu - \nu) \frac{\partial \eta}{\partial b} + (\lambda + 2\nu)\theta, & T_2 &= (\mu - \nu) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \xi}{\partial c} \right), \\ N_3 &= -2\nu + 2(\mu - \nu) \frac{\partial \zeta}{\partial c} + (\lambda + 2\nu)\theta, & T_3 &= (\mu - \nu) \left( \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial \eta}{\partial a} \right). \end{aligned} \right\}$$

$\lambda, \mu, \nu$  sont des fonctions de  $\Theta$ . Si on suppose les mouvements isothermes et la température uniforme dans l'état initial, cette uniformité se maintiendra toujours. Les équations des petits mouvements deviennent alors, par (7) :

$$(54) \quad \begin{cases} (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial a} + (\mu - 2\nu) \Delta \xi + rX = rj_x, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial b} + (\mu - 2\nu) \Delta \eta + rY = rj_y, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial c} + (\mu - 2\nu) \Delta \zeta + rZ = rj_z. \end{cases}$$

On remarquera que, dans les équations du mouvement, les coefficients  $\lambda, \mu, \nu$  n'entrent que par les combinaisons  $\lambda + 2\nu$  et  $\mu - 2\nu$ . De même, dans les expressions des  $N_i$  et des  $T_i$ ,  $\lambda$  et  $\mu$  n'entrent que par l'intermédiaire de  $\lambda + 2\nu$  et  $\mu - 2\nu$ .

*L'énergie interne et les mouvements adiabatiques.* — Nous avons développé le potentiel interne. On pourrait développer aussi l'énergie interne, et on aurait :

$$(55) \quad rU = -2\nu' J_1 - \frac{\mu'}{2} J_2 + \left( \frac{\lambda'}{2} + \mu' \right) J_1^2 \\ = -2\nu' (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + \mu' \left[ \frac{1}{2} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2) + \varepsilon_4^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 \right] + \frac{\lambda'}{2} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2;$$

$\lambda', \mu', \nu'$  sont des coefficients *fonctions de E*. On peut écrire des formules analogues à (53) avec  $\lambda', \mu', \nu'$  à la place de  $\lambda, \mu, \nu$ . Les équations des petits mouvements *adiabatiques* ( $E = \text{constante}$ ) autour d'un état homogène sont les équations (54) où  $\lambda, \mu, \nu$  sont remplacés par  $\lambda', \mu', \nu'$ .

*Coefficients isothermes et adiabatiques.* — Cherchons maintenant quelles relations existent entre  $\lambda, \mu, \nu$  et  $\lambda', \mu', \nu'$ .

La définition même de ces coefficients nous montre que

$$\begin{aligned} -2\nu &= r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial J_1} \right)_{J_{1,2,3}=0}, & -2\nu' &= r \left( \frac{\partial U}{\partial J_1} \right)_{J_{1,2,3}=0}, \\ -\frac{\mu}{2} &= r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \right)_{J_{1,2,3}=0}, & -\frac{\mu'}{2} &= r \left( \frac{\partial U}{\partial J_2} \right)_{J_{1,2,3}=0}, \\ \frac{\lambda}{2} + \mu &= \frac{r}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J_1^2} \right)_{J_{1,2,3}=0}, & \frac{\lambda'}{2} + \mu' &= \frac{r}{2} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial J_1^2} \right)_{J_{1,2,3}=0}. \end{aligned}$$

Mais la fonction  $U(J_1, J_2, J_3, E)$  est identique à  $\Phi(J_1, J_2, J_3, \Theta) - \Theta \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}$  quand on y remplace  $E$  par  $-\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}$ . Et par conséquent

$$(56) \quad \frac{\partial U}{\partial E} = \Theta, \quad \frac{\partial U}{\partial J_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial J_1}, \quad \frac{\partial U}{\partial J_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial J_2}.$$

Et ensuite

$$\frac{\partial^2 U}{\partial J_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial J_1 \partial E} \frac{\partial E}{\partial J_1} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J_1^2}.$$

Mais

$$\frac{\partial E}{\partial J_1} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial J_1 \partial \Theta} = -\frac{\partial^2 U}{\partial J_1 \partial E} \frac{\partial E}{\partial \Theta} = -\frac{\partial^2 U}{\partial J_1 \partial E} \frac{c}{\Theta},$$

en désignant par  $c$  la chaleur spécifique à *déformation nulle*. Si nous portons dans l'équation précédente nous avons :

$$(57) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial J_1^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J_1^2} + \frac{\Theta}{c} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial J_1 \partial \Theta} \right)^2.$$

Les relations (56) et (57) sont vraies *toujours*. Appliquons-les en particulier à l'état initial et à tous les états dérivant de l'état initial par simple augmentation de température sans déformation. Pour tous ces états,  $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ , et par suite on a :

$$(58) \quad v' = v, \quad \mu' = \mu, \quad \lambda' = \lambda + \frac{4\Theta}{rc} \left( \frac{dv}{d\Theta} \right)^2.$$

Telles sont les relations existant entre  $\lambda', \mu', v'$  et  $\lambda, \mu, v$ . Il doit être bien entendu que les  $\lambda', \mu', v'$  et les  $\lambda, \mu, v$  ainsi comparés sont ceux qui correspondent à l'état initial pris à la même température. Considérons un état où  $J_1, J_2, J_3$  ne sont pas nuls et où la température est  $\Theta$  et l'entropie  $E$ . Si nous cherchons à calculer le potentiel et l'énergie internes dans cet état par les développements (52) et (55), il ne faudra pas mettre, dans ces expressions, des  $\lambda$  et des  $\lambda'$  se correspondant par les formules (58), parce que, si on fait  $J_1 = J_2 = J_3 = 0$ , l'état initial ne peut pas avoir à la fois la température  $\Theta$  et l'entropie  $E$ . Un état déformé comme l'état initial et ayant  $E$  pour entropie n'a pas la température  $\Theta$ .

*Module de Young, coefficient de compressibilité, etc.* — Les équations des petits mouvements d'un corps isotrope dans le cas de Poincaré ne diffèrent des équations des petits mouvements au voisinage d'un état naturel que par la substitution de  $\lambda + 2\nu$  et de  $\mu - 2\nu$  à  $\lambda$  et à  $\mu$ . On peut donc traiter tous les problèmes classiques dans le cas de Poincaré comme dans le cas de l'état naturel. Par exemple, l'étude de l'extension d'un prisme conduira au module de Young, qui sera ici évidemment  $(\mu - 2\nu) \frac{3\lambda + 2\mu + 2\nu}{\lambda + \mu}$  puisqu'il est  $\mu \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$  pour un état naturel. Celle de la compression uniforme conduira au coefficient de compressibilité qui, au lieu de  $\frac{3}{3\lambda + 2\mu}$ , sera  $\frac{3}{3\lambda + 2\mu + 2\nu}$ .

Bien entendu, si les phénomènes étudiés sont adiabatiques, il faut mettre  $\lambda', \mu', \nu'$  à la place de  $\lambda, \mu, \nu$ .

On vérifiera facilement, par la méthode qui sera employée plus loin pour la célérité des ondes, que le coefficient de compressibilité  $\frac{3}{3\lambda + 2\mu + 2\nu}$  comprend comme cas particulier, grâce à la présence du terme  $2\nu$ , le coefficient de compressibilité des gaz.

**Vitesse du son. — Réalité des célérités.** — La célérité des ondes d'accélération (vitesse du son) constitue un coefficient thermodynamique important. Voyons ce que nous en savons.

Nous avons rappelé, dans notre première Note, la règle de M. Hadamard (étendue par Duhem aux mouvements adiabatiques) pour calculer cette célérité — ou plutôt ces célérités, car elles sont en général au nombre de trois. Elles sont données par leur carré. Sont-elles toutes réelles, ou, en d'autres termes, la surface du second degré (38) est-elle un ellipsoïde? C'est une question qui se rattache à celle de la stabilité de l'équilibre, et voici les résultats démontrés à ce sujet.

M. Hadamard a montré que si l'on suppose positive la différentielle seconde du potentiel (pour les mouvements adiabatiques, il faut remplacer le potentiel par l'énergie interne), les trois célérités sont en effet réelles. P. Duhem a fait voir que les célérités sont réelles si on suppose que le milieu obéit à la loi du déplacement isothermique de l'équilibre. Les raisonnements de ces auteurs ne supposent pas les tensions nulles dans l'état considéré.

Si donc on prend, pour définir la stabilité, la loi du déplacement isothermique de l'équilibre, il est démontré que la stabilité de l'équilibre entraîne la réalité des célérités. Mais si on définit la stabilité d'une manière analogue à celle de Lagrange et de Lejeune-Dirichlet, pour affirmer que la stabilité entraîne la réalité des célérités, il reste à prouver que la stabilité entraîne la condition que la différentielle seconde du potentiel soit positive.

Le chapitre II de la troisième partie des *Recherches sur l'Élasticité* de Duhem

contient une étude des conditions nécessaires de la stabilité des corps élastiques définie à la manière de Lejeune-Dirichlet. Mais les résultats de cette étude doivent être partiellement révisés quand on veut les appliquer au cas de Poincaré. Nous avons déjà dit en effet que Duhem avait toujours raisonné comme si les tensions dans l'état initial étaient petites. Nous n'entrerons pas dans la discussion générale qu'il y aurait à faire à ce sujet. Nous dirons seulement qu'un résultat peut être conservé. C'est celui qui est démontré aux paragraphes IV et VII du chapitre précité et qui s'énonce : « Dans un milieu *isotrope* indéfini, si l'équilibre est stable, les célérités des ondes transversales et longitudinales sont réelles. » Les raisonnements développés par Duhem dans ces paragraphes s'appliquent en effet même si on se trouve dans le cas de Poincaré; il suffit d'y remplacer (notations de Duhem)  $\Lambda$  et  $\mathbf{M}$  par  $\Lambda + \Pi_0$  et  $\mathbf{M} - \Pi_0$ . Ces raisonnements d'ailleurs ne démontrent pas le résultat énoncé d'une manière entièrement rigoureuse, comme Duhem lui-même l'a signalé, en raison de l'emploi de ce que cet auteur appelle le postulat des petits mouvements. Peut-être aussi pourrait-on souhaiter une discussion plus poussée concernant certaines intégrales dont le champ devient infini. Mais la démonstration, sans être peut-être entièrement parfaite, présente déjà un caractère très satisfaisant. En tout cas, la correction qu'il y a lieu de lui apporter pour tenir compte du fait qu'on se trouve dans le cas de Poincaré ne change rien à son degré de rigueur.

*Cas des corps isotropes.* — Laissons de côté maintenant la question de la réalité des célérités, et arrêtons-nous un instant sur les modifications que les tensions initiales finies apportent dans les formules habituelles relatives aux corps isotropes.

Nous avons donné, dans la Note précédente, les expressions des célérités relatives aux corps isotropes. Elles peuvent d'ailleurs se déduire des équations (54). Ce sont :

	Mouvements isothermes.	Mouvements adiabatiques.
Ondes longitudinales.	$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu - 2\nu}{r}}$	$\sqrt{\frac{\lambda' + 2\mu' - 2\nu'}{r}} = \sqrt{\frac{\lambda + \frac{4\Theta}{rc} \left(\frac{d\nu}{d\Theta}\right)^2 + 2\mu - 2\nu}{r}}$
Ondes transversales.	$\sqrt{\frac{\mu - 2\nu}{r}}$	$\sqrt{\frac{\mu' - 2\nu'}{r}} = \sqrt{\frac{\mu - 2\nu}{r}}$

Ce sont bien là, à la différence des notations près, celles que Poincaré donne, en ce qui concerne les mouvements isothermes, dans le premier chapitre de sa *Théorie*

de la Lumière. Elles diffèrent des formules de la plupart des autres auteurs — et notamment de celles de Duhem qui, à notre connaissance, a le premier donné explicitement les expressions pour les mouvements adiabatiques — par la présence de  $-2\nu$  au dénominateur.

Bien entendu, ces formules ne contiennent  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ , comme les équations du mouvement elles-mêmes, que par les combinaisons  $\lambda + 2\nu$  et  $\mu - 2\nu$ . Les célérités se calculent, à partir des coefficients des équations du mouvement, comme chez les auteurs qui n'envisagent pas le cas de Poincaré. La différence apparaît quand on les calcule à partir des coefficients du potentiel.

Pour montrer l'importance du terme  $-2\nu$  nous allons faire voir que, grâce à sa présence, les formules des célérités contiennent comme cas particulier, ainsi que cela est nécessaire, l'expression de la vitesse du son dans les gaz.

Pour un gaz, l'énergie interne est une fonction de la densité  $\rho$  et de l'entropie E. Mais

$$\rho = \frac{r}{\Delta} = \frac{r}{(1 + 2J_1 + J_2 + 2J_3)^{1/2}} = \frac{r}{(1 + \alpha)^{1/2}}$$

en posant  $\alpha = 2J_1 + J_2 + 2J_3$ . La quantité  $\alpha$  est infiniment petite comme les déformations que l'on considère.

On a donc

$$U(\rho, E) = \psi(\alpha, E).$$

Développons jusqu'au deuxième ordre

$$U(\rho, E) = \psi(0, E) + \psi'_\alpha(0, E)\alpha + \frac{1}{2}\psi''_{\alpha^2}(0, E)\alpha^2 = \psi + 2\psi'_\alpha J_1 + \psi''_\alpha J_2 + 2\psi''_{\alpha^2} J_1^2.$$

D'ailleurs, le calcul donne sans difficulté

$$\psi'_\alpha = -\frac{r}{2} \frac{\partial U}{\partial r}, \quad \psi''_{\alpha^2} = \frac{3r}{4} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{r^2}{4} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}.$$

Comparons alors ce développement de U au développement (55); il vient

$$\lambda' = r^2 \frac{\partial U}{\partial r} + r^3 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad \mu' = 2\nu' = r^2 \frac{\partial U}{\partial r}.$$

On a donc zéro pour la vitesse des ondes transversales, et pour celle des ondes longitudinales

$$\sqrt{2r \frac{\partial U}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}} = \sqrt{\frac{\partial \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right)}{\partial r}} = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial r}}, \quad p \text{ étant la pression.}$$

C'est exactement la formule de Laplace.

**Loi de réciprocité.** — On peut obtenir de nombreuses formules relatives aux coefficients thermodynamiques des corps en appliquant le théorème très général de statique que l'on appelle quelquefois *Loi de réciprocité* de lord Rayleigh. A notre connaissance, l'application de la *Loi de réciprocité* de lord Rayleigh n'a pas été faite jusqu'ici dans la forme ci-après aux corps élastiques. Nous allons montrer, en insistant sur les différences, ce qu'elle donne et dans le cas d'un état naturel et dans le cas de Poincaré.

Les formules (12), où l'on peut remplacer  $U$  par  $\Phi$ , donnent, pour  $\varepsilon_i, \gamma_i$  infiniment petits et en négligeant le second ordre :

$$(59) \quad \begin{cases} \frac{N_1}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1} \frac{\partial \zeta}{\partial a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \zeta}{\partial b} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c}, \\ \frac{T_1}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1} \left( \frac{\partial \gamma_1}{\partial b} + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_2} \frac{\partial \gamma_1}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_3} \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_2} \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_3} \frac{\partial \zeta}{\partial c}. \end{cases}$$

Si les tensions étaient petites dans l'état initial, ces formules se réduiraient à

$$(60) \quad \begin{cases} \frac{N_1}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_1}, \\ \frac{T_1}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_1}. \end{cases}$$

Désignons par l'indice  $o$  une valeur correspondant à  $\varepsilon_i = \gamma_i = o$ , et posons

$$\begin{aligned} P_{i0} &= r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_i} \right)_o, & U_{i0} &= r \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \gamma_i} \right)_o, \\ rU &= P_{10} \varepsilon_1^2 + P_{20} \varepsilon_2^2 + P_{30} \varepsilon_3^2 + \frac{P_{20} + P_{30}}{4} \gamma_1^2 + \frac{P_{30} + P_{40}}{4} \gamma_2^2 + \frac{P_{10} + P_{20}}{4} \gamma_3^2 + U_{10} \gamma_1 (\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ &+ U_{20} \gamma_2 (\varepsilon_3 + \varepsilon_1) + U_{30} \gamma_3 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \frac{1}{2} U_{10} \gamma_2 \gamma_3 + \frac{1}{2} U_{20} \gamma_3 \gamma_1 + \frac{1}{2} U_{30} \gamma_1 \gamma_2. \end{aligned}$$

On remarquera que les  $P_{i0}$  et  $U_{i0}$  sont des fonctions de  $\Theta$ .

D'autre part, toujours au second ordre près, on peut remplacer dans (59) les  $\varepsilon_i, \gamma_i$  par les  $e_i, g_i$ . Si on se sert d'autre part de la définition (51) de  $\omega_i$ , les équations (59) s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{N_1}{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial e_1} + \frac{1}{r} (2P_{10} e_1 + U_{20} g_2 + U_{30} g_3 + U_{20} \omega_2 - U_{30} \omega_3), \\ \frac{T_1}{\rho} &= \frac{\partial \Phi}{\partial g_1} + \frac{1}{r} \left[ U_{10} (e_2 + e_3) + \frac{P_{20} + P_{30}}{2} g_1 + \frac{U_{20}}{2} g_3 + \frac{U_{30}}{2} g_2 + \frac{P_{20} - P_{30}}{2} \omega_1 - \frac{U_{30}}{2} \omega_2 + \frac{U_{20}}{2} \omega_3 \right]. \end{aligned}$$

La notation  $\frac{\partial \Phi}{\partial e_i}, \frac{\partial \Phi}{\partial g_i}$  représente la dérivée de  $\Phi$  par rapport à  $\varepsilon_i$  ou  $\gamma_i$ , dans laquelle on a fait  $\varepsilon_i$  et  $\gamma_i$  égaux à  $e_i, g_i$ .

Convenons de ne considérer que des déformations infiniment petites *qui soient des déformations pures*. Les  $\omega$  sont alors nuls et les expressions précédentes se réduisent à

$$(61) \quad \begin{cases} \frac{N_i}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial e_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial e_i}, \\ \frac{T_i}{\rho} = \frac{\partial \Phi}{\partial g_i} + \frac{\partial \Psi}{\partial g_i}; \end{cases}$$

$\frac{\partial \Phi}{\partial e_i}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial e_i}$ ,  $\frac{\partial \Phi}{\partial g_i}$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial g_i}$  représentent les dérivées de  $\Phi$  et de  $\Psi$  par rapport à  $e_i$ ,  $g_i$ , dans lesquelles on remplace  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  par  $e_i$ ,  $g_i$ . Quant à  $\rho$ , il vaut, au degré d'approximation convenu,  $r(1 - e_1 - e_2 - e_3)$ .

Partons maintenant d'un état initial homogène où les  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  sont nuls. A partir de là considérons deux transformations homogènes infiniment petites; nous les désignerons par  $de_i$ ,  $dg_i$ ,  $d\Theta$  et  $\delta e_i$ ,  $\delta g_i$ ,  $\delta\Theta$  pour rappeler qu'elles sont infiniment petites. Mais supposons qu'elles sont *pures*. Nous pouvons dès lors leur appliquer les équations (61), auxquelles nous ajouterons

$$-E + \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = \frac{\partial \Phi}{\partial \Theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}.$$

On tire évidemment de là la relation

$$\begin{aligned} \sum d\left(\frac{N_i}{\rho}\right) \delta e_i + \sum d\left(\frac{T_i}{\rho}\right) \delta g_i + d\Theta \cdot \delta\left(E - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}\right) &= \sum \delta\left(\frac{N_i}{\rho}\right) de_i \\ &+ \sum \delta\left(\frac{T_i}{\rho}\right) dg_i + \delta\Theta d\left(E - \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta}\right). \end{aligned}$$

Mais  $\Psi$  étant une forme quadratique en  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  et les valeurs de  $\varepsilon_i$ ,  $\gamma_i$  étant nulles dans l'état initial, on a forcément  $\delta \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = d \frac{\partial \Psi}{\partial \Theta} = 0$ . Donc

$$(62) \quad \sum d\left(\frac{N_i}{\rho}\right) \delta e_i + \sum d\left(\frac{T_i}{\rho}\right) \delta g_i + d\Theta \cdot \delta E = \sum \delta\left(\frac{N_i}{\rho}\right) de_i + \sum \delta\left(\frac{T_i}{\rho}\right) dg_i + \delta\Theta \cdot dE.$$

C'est là l'expression de la *Loi de réciprocité* pour le cas de Poincaré.

*Cas d'un état naturel.* — Si l'état initial est un état à tensions nulles, on peut employer (60) au lieu de (61). On peut partir alors d'un état quelconque voisin de l'état initial, où  $e_i$  et  $g_i$  ne sont pas forcément nuls, et considérer des variations  $de_i$ ,  $dg_i$ ,  $d\Theta$  ou  $\delta e_i$ ,  $\delta g_i$ ,  $\delta\Theta$  à partir de cet état. Il n'est plus d'ailleurs nécessaire

ici de supposer que les déformations  $d$  et  $\delta$  soient pures. On obtient pour des déformations quelconques

$$(63) \quad \sum dN_i \delta e_i + \sum dT_i \delta g_i + r \cdot d\Theta \delta E = \sum \delta N_i de_i + \sum \delta T_i dg_i + r \delta \Theta \cdot dE.$$

*Théorème de Betti.* — Cette dernière équation comprend comme cas particulier le théorème de réciprocité de Betti, dont on retrouvera l'énoncé en raisonnant comme suit.

Opérons isothermiquement en restant dans le champ des déformations élastiques infiniment petites. Partons d'un état initial où les  $e_i$ ,  $g_i$  et les  $N_i$ ,  $T_i$  sont nuls. Appliquons des forces  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $Z_a$ . Elles amènent le corps dans un état  $\varepsilon_a$  en produisant une déformation qui est supposée infiniment petite et que nous pouvons désigner par  $de_i$ ,  $dg_i$ , et en provoquant des tensions que nous pourrions désigner par  $dN_i$ ,  $dT_i$ . Appliquons au contraire des forces  $X_\delta$ ,  $Y_\delta$ ,  $Z_\delta$ . Elles amènent le corps dans un état  $\varepsilon_\delta$  en produisant une déformation infiniment petite  $\delta e_i$ ,  $\delta g_i$  et provoquant des tensions  $\delta N_i$ ,  $\delta T_i$ .

Faisons travailler  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $Z_a$  dans la déformation  $\delta$ . Ce travail peut évidemment être calculé en supposant que la transformation  $\delta$  se produit à partir de l'état  $\varepsilon_a$ ; en effet,  $\varepsilon_a$  est infiniment voisin de l'état initial, et faire partir la transformation  $\delta$  de l'état initial ou de l'état  $\varepsilon_a$  n'introduit qu'une différence négligeable dans le travail en vertu du principe de la superposition des petits mouvements. Or, dans l'état  $\varepsilon_a$ , il y a équilibre sous l'action des forces  $X_a$ ,  $Y_a$ ,  $Z_a$ . Donc, en vertu du principe du travail virtuel, le travail de ces forces dans le déplacement  $\delta$  sera égal à la variation du potentiel interne, c'est-à-dire, par (10), à  $\sum dN_i \delta e_i + \sum dT_i \delta g_i$ .

De même le travail de  $X_\delta$ ,  $Y_\delta$ ,  $Z_\delta$ , dans le déplacement  $d$ , est  $\sum \delta N_i de_i + \sum \delta T_i dg_i$ . Ces deux travaux sont donc égaux en vertu de (63), où on fait  $d\Theta = \delta\Theta = 0$ . C'est là le théorème de Betti.

*Remarque.* — L'équation (62) est plus compliquée que l'équation (63), à la fois par la nécessité de ne l'appliquer qu'à des déformations pures à partir d'un état où  $e_i = g_i = 0$ , et par la présence du facteur variable  $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'}(1 + e_1 + e_2 + e_3)$ . Toutefois, même dans le cas de Poincaré, la variabilité de  $\rho$  n'introduit aucun terme, et la forme (63) peut remplacer (62) si, dans l'état initial, le corps est soumis à une pression normale et uniforme.

Les termes provenant de la variabilité de  $\rho$  dans (62) sont en effet

$$\frac{d\rho}{\rho^2}(N_1 \delta e_1 + \dots) - \frac{\delta\rho}{\rho^2}(N_1 de_1 + \dots)$$

ou

$$\frac{1}{\rho}(\delta e_1 + \delta e_2 + \delta e_3)(N_1 de_1 + \dots) - \frac{1}{\rho'}(de_1 + de_2 + de_3)(N_1 \delta e_1 + \dots).$$

Cette expression est nulle si

$$N_1 = N_2 = N_3, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

ce qui exprime bien que les tensions dans l'état initial se réduisent à une pression normale et uniforme.

Dans ce cas donc, l'équation (62) peut être remplacée par (63). Toutefois, il reste illégitime d'appliquer l'une ou l'autre de ces équations à des déformations autres que des déformations pures s'effectuant à partir de l'état où  $e_i = g_i = 0$ . Cette nécessité, pour le cas de Poincaré, de ne considérer que des déformations pures s'effectuant à partir de l'état initial est, dans l'application de la loi de réciprocité, une différence essentielle avec le cas d'un état naturel.

**Chaleurs spécifiques.** — *Premières formules de Voigt.* — Nous allons utiliser la loi de réciprocité (62) pour étendre au cas de Poincaré diverses formules relatives aux chaleurs spécifiques qui sont dues à Voigt.

Considérons, pour transformation  $\delta$ , une élévation de température  $\delta\Theta$  à tensions  $N_i, T_i$  constantes. Les équations (61) [où nous rappelons que  $\rho$  vaut  $r(1 - e_1 - e_2 - e_3)$ ], montrent en effet qu'il existe bien une déformation pure où la température s'élève sans que  $N_i$  et  $T_i$  varient. Et nous poserons

$$\delta e_i = \alpha_i \delta\Theta, \quad \delta g_i = \beta_i \delta\Theta, \quad \delta E = \frac{C}{\Theta} \delta\Theta.$$

Les  $\alpha$  et les  $\beta$  sont les coefficients de dilatation et  $C$  la chaleur spécifique sous actions constantes.

Pour transformation  $d$ , prenons au contraire une élévation de température  $d\Theta$  à déformation nulle ( $de_i = dg_i = 0$ ). C'est encore là une déformation pure, et nous poserons

$$dN_i = -A_i d\Theta, \quad dT_i = -B_i d\Theta, \quad dE = \frac{c}{\Theta} d\Theta.$$

Les  $A_i, B_i$  sont les coefficients d'augmentation de tension et  $c$  est la chaleur spécifique sous déformation nulle.

Considérons ces deux déformations pures à partir de l'état initial où  $e_i = g_i = 0$ , et appliquons-leur la loi (62). Remarquons que  $de_i = dg_i = d\rho = 0$ . Il vient :

$$(64) \quad r \frac{C - c}{\Theta} = \sum A_i \alpha_i + \sum B_i \beta_i.$$

Considérons maintenant une modification isentropique  $\Delta e_i, \Delta g_i, \Delta\Theta$  ( $\Delta E = 0$ ).

produisant des variations  $\Delta N_i$ ,  $\Delta T_i$  dans les tensions. Envisageons de même une transformation isotherme  $De_i$ ,  $Dg_i$ ,  $DE$  ( $D\Theta = 0$ ) produisant les mêmes variations  $\Delta N_i$ ,  $\Delta T_i$  dans les tensions.

Appliquons la loi (62) en prenant pour transformation  $\delta$  la transformation isentropique  $\Delta$  et pour transformation  $d$  une élévation de température  $d\Theta$  à déformation nulle ( $de_i = dg_i = 0$ ). On obtient

$$(65) \quad -r \frac{c}{\Theta} \Delta\Theta = \sum A_i \Delta e_i + \sum B_i \Delta g_i.$$

Mais évidemment

$$\Delta e_i = De_i + \alpha_i \Delta\Theta, \quad \Delta g_i = Dg_i + \beta_i \Delta\Theta,$$

ce qui permet de transformer l'équation précédente, en utilisant (64), en

$$(66) \quad -r \frac{C}{\Theta} \Delta\Theta = \sum A_i De_i + \sum B_i Dg_i.$$

Et par conséquent

$$(67) \quad \frac{C}{c} = \frac{\sum A_i De_i + \sum B_i Dg_i}{\sum A_i \Delta e_i + \sum B_i \Delta g_i}.$$

Les formules (64), (65), (66), (67) sont dues à Voigt. Elles sont donc généralisées pour pouvoir s'appliquer au cas de Poincaré. Mais la généralisation suppose que les déformations  $e_i$ ,  $g_i$  sont calculées par rapport à l'état dont on considère les coefficients  $c$ ,  $C$ ,  $A$ ,  $B$ .

Pour les corps isotropes, il est facile de voir, par l'expression du potentiel, que les  $A_i$  sont égaux et les  $B_i$  nuls. D'autre part,  $De_1 + De_2 + De_3$  et  $\Delta e_1 + \Delta e_2 + \Delta e_3$  ne sont autre chose que le coefficient de compressibilité isotherme ou adiabatique, que nous connaissons d'après ce qui a été dit plus haut. La formule (67) est alors *identique* à la formule de Reech qu'elle comprend comme cas particulier et peut s'écrire

$$\frac{C}{c} = \frac{3\lambda' + 2\mu' + 2\nu'}{3\lambda + 2\mu + 2\nu} = \frac{3\lambda + 2\mu + 2\nu + \frac{12\Theta}{rc} \left(\frac{dv}{d\Theta}\right)^2}{3\lambda + 2\mu + 2\nu},$$

ce qui est encore équivalent à

$$r \frac{C - c}{\Theta} = 12 \frac{\left(\frac{dv}{d\Theta}\right)^2}{3\lambda + 2\mu + 2\nu}.$$

On pourra comparer ces formules avec des formules analogues de Duhem et on verra qu'elles en diffèrent par la présence du terme  $2\nu$ , provenant du fait que les tensions dans l'état initial ne sont pas petites.

*Secondes formules de Voigt.* — Nous démontrerons maintenant deux autres formules de Voigt qui, elles, ne sont pas toujours vraies quand on se place dans le cas de Poincaré.

Considérons une déformation  $\Delta e_i$ ,  $\Delta g_i$  et produisons-la *isentropiquement* ( $\Delta E = 0$ ). Elle est accompagnée d'une variation de température  $\Delta\Theta$  et entraîne les variations de tensions  $\Delta N_i$ ,  $\Delta T_i$ .

Considérons aussi la même déformation  $\Delta e_i$ ,  $\Delta g_i$ , mais produite *isothermiquement* ( $D\Theta = 0$ ) et entraînant alors les variations  $DE$ ,  $DN_i$ ,  $DT_i$ .

Dans l'équation (62), prenons pour transformation  $d$  la transformation isentropique et pour transformation  $\delta$  une élévation de température  $\delta\Theta$  à  $N_i$ ,  $T_i$  constant. L'équation (62) donne

$$r \frac{C}{\Theta} \delta\Theta \Delta\Theta = (N_1 \Delta e_1 + \dots + T_1 \Delta g_1 + \dots)(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \delta\Theta \\ - (N_1 \alpha_1 + \dots + T_1 \beta_1 + \dots)(\Delta e_1 + \Delta e_2 + \Delta e_3) \delta\Theta - (\alpha_1 \Delta N_1 + \dots + \beta_1 \Delta T_1 + \dots) \delta\Theta.$$

Si, dans l'état initial, les tensions se réduisent à une pression normale et uniforme, on a

$$N_1 = N_2 = N_3, \quad T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

et la formule se réduit à

$$(68) \quad -r \frac{C}{\Theta} \Delta\Theta = \sum \alpha_i \Delta N_i + \sum \beta_i \Delta T_i.$$

Mais on a évidemment

$$\Delta N_i = DN_i - A_i \Delta\Theta, \quad \Delta T_i = DT_i - B_i \Delta\Theta.$$

Dès lors (68) donne, en se servant de la formule (64),

$$(69) \quad -r \frac{C}{\Theta} \Delta\Theta = \sum \alpha_i DN_i + \sum \beta_i DT_i,$$

et par suite

$$(70) \quad \frac{C}{c} = \frac{\sum \alpha_i \Delta N_i + \sum \beta_i \Delta T_i}{\sum \alpha_i DN_i + \sum \beta_i DT_i}.$$

Les formules (68), (69), (70) sont encore dues à Voigt et la dernière est une généralisation de la formule de Reech. Le fait qu'elles supposent que les tensions dans l'état initial se réduisent à une pression normale et uniforme a été signalé par Duhem, mais il n'était pas inutile d'y revenir pour le cas où les tensions dans l'état naturel ne sont pas petites.

On aurait pu, bien entendu, obtenir les formules (68), (69) et (70) en partant de la loi (63). Mais il nous a paru préférable de montrer, en partant de (62), comment s'introduit la condition nécessaire que les tensions initiales se réduisent à une pression normale et uniforme.

**Applications diverses.** — On peut évidemment faire beaucoup d'autres applications de la loi de réciprocité. Nous nous contenterons d'indiquer les suivantes :

1° *Élévation de température dans une modification adiabatique.* — Les formules (65) et (68) résolvent ce problème. La première s'applique quelles que soient les tensions dans l'état initial, la seconde suppose que les tensions initiales se réduisent à une pression (ou une tension) normale et uniforme.

On peut illustrer la formule (68) en traitant la question suivante : Soit un cube de calcite dont un des côtés est parallèle à l'axe ternaire, dirigé suivant  $oz$ . Dans l'état initial, les tensions sont nulles et les faces du cube ne sont soumises à aucune force. On sait que le coefficient de dilatation  $\alpha_3$  est positif, et les coefficients  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  égaux et négatifs. Comprimons le cube adiabatiquement en appliquant sur ses faces des pressions  $\delta N_i$  normales ( $\delta T_i = 0$ ). Cette compression adiabatique ne produira aucune élévation de température si les  $\delta N$  vérifient la condition

$$\alpha_1(\delta N_1 + \delta N_2) + \alpha_3 \delta N_3 = 0.$$

2° *Chaleur reçue dans une modification isotherme.* — Soit une déformation pure isotherme  $de_i, dg_i, dE, dN_i, dT_i$  ( $d\Theta = 0$ ). Associons à elle une élévation de température à déformation nulle. La loi de réciprocité donne, *quelles que soient les tensions dans l'état initial,*

$$rdE = \sum A_i de_i + \sum B_i dg_i.$$

Associons au contraire à la déformation isotherme une élévation de température à  $N_i, T_i$  constants. On obtient, *mais uniquement lorsque les tensions initiales se réduisent à une pression normale et uniforme*

$$rdE = \sum \alpha_i dN_i + \sum \beta_i dT_i.$$

Ces formules montrent que le coefficient calorifique correspondant à  $e_i$  est  $\frac{\Theta}{r} A_i$ . Mais cela n'est vrai que si la déformation  $e_i, g_i$  est prise par rapport à l'état initial à partir duquel on considère la modification  $de_i, dg_i$  — puisque notre expression de la loi de réciprocité n'est exacte que dans ce cas. On peut d'ailleurs obtenir directement cette valeur des coefficients calorifiques en dérivant par rapport à  $e_i, g_i$ , l'entropie  $-\frac{\partial \Phi}{\partial \Theta}$ .

