Annales de la faculté des sciences de Toulouse

P. Vincensini

Sur certaines questions métriques liées aux congruences stratifiables

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 3e série, tome 26 (1934), p. 303-319

<http://www.numdam.org/item?id=AFST_1934_3_26__303_0>

SUR CERTAINES QUESTIONS MÉTRIQUES

LIÉES AUX CONGRUENCES STRATIFIABLES

PAR P. VINCENSINI

INTRODUCTION

Les congruences stratifiables, de nature essentiellement projective, ont surtout été étudiées au point de vue projectif.

L'étude des propriétés de ces congruences a donné lieu, surtout au cours de ces dernières années, à la découverte de nombreux et importants résultats géométriques.

Pour l'historique, et la bibliographie de la question, je renvoie à un Mémoire récent de M. Finikoff[1] dont les travaux occupent une grande place dans le développement de la théorie.

Le point de vue métrique a été quelque peu négligé; il est cependant possible de donner au problème de la recherche des couples de congruences stratifiables un sens métrique, et de montrer, par des exemples simples, comment certaines questions intéressantes de la théorie différentielle ordinaire des surfaces, peuvent être rattachées à la considération de types déterminés de congruences stratifiables.

Envisageons, dans l'espace euclidien ordinaire, l'ensemble constitué par un point P et la portion d'un plan π issu de P voisine de P. On a ce que L. Bianchi, dans ses études sur la déformation des surfaces (et plus particulièrement des quadriques) a appelé une *facette*; P est le centre de la facette, π son plan.

Une facette est déterminée par les trois coordonnées (x, y, z) de son centre, et par les cosinus directeurs (X, Y, Z) de la normale à son plan

$$X = \frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = \frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Z = \frac{-1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

---

(1) S. FINIKOFF. *Congruences stratifiables paraboliques* (Mathematische Zeitschrift, 36, 1933, p. 344).

Les différentes facettes de l'espace forment une multiplicité à cinq dimensions de coordonnées (x, y, z, p, q).

Considérons, dans la multiplicité précédente, une multiplicité subordonnée à trois dimensions; en général il ne sera pas possible d'ordonner les ∞^3 facettes de cette multiplicité suivant les ∞^3 éléments de contact d'une famille de ∞^1 surfaces S. Lorsque le problème est possible, nous dirons avec L. Bianchi que la multiplicité ∞^3 de facettes envisagée est *stratifiable*. La recherche des conditions de stratifiabilité conduit à l'intégration d'une équation aux différentielles totales à deux variables indépendantes (E); les conditions cherchées sont les conditions d'intégrabilité complète de (E).

Le problème de la détermination des couples de congruences stratifiables, peut être envisagé comme un procédé géométrique particulier d'obtention de multiplicités ∞^3 de facettes stratifiables.

A tout couple de congruences stratifiables correspond un cas d'intégration complète de (E), les ∞^1 surfaces S solutions de (E) étant les surfaces enveloppées par les ∞^1 plans, issus des différents rayons de l'une des congruences, ayant leur point caractéristique sur le rayon correspondant de l'autre.

A tout couple de congruences doublement stratifiables liées par une relation déterminée, correspondent deux solutions de (E), fournissant deux familles de ∞^1 surfaces, entre lesquelles le couple de congruences considéré établit une relation géométrique, projective ou métrique suivant la nature de la relation imposée aux congruences.

Dans deux Notes des *Rendiconti dei Lincei* (1), L. Bianchi a, le premier, envisagé des cas particuliers métriques. Dans la première Note, il a déterminé les couples de congruences stratifiables jouissant de la propriété suivante : deux rayons associés quelconques r et r' de l'un des couples envisagés sont orthogonaux, leur perpendiculaire commune passant par un point fixe de l'espace; le résultat est très remarquable : *le problème est équivalent à celui de la recherche des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution réel ou imaginaire.*

Dans la deuxième Note, les deux rayons associés r et r' sont toujours supposés orthogonaux, mais la condition relative à la perpendiculaire commune est remplacée par le fait que l'une des congruences est normale (la stratifiabilité ayant lieu pour la congruence non normale); le problème est alors identique à celui de la détermination des systèmes cycliques de Ribaucour attachés à une surface S_0.

Si l'on impose au couple de congruences envisagé dans cette Note la condition supplémentaire d'être *doublement stratifiable*, on trouve que S_0 *doit être à courbure*

---

(1) L. Bianchi. *Sopra una classe di coppie di congruenze rettilinee stratificabili* (Rend. Lincei (5) 33, sem. 2, 1924, p. 369-377).
Sulle coppie di congruenze rettilinee stratificabili (*Ibid.*, 32, sem. 2, p. 521-531).

totale constante, et l'on est ainsi conduit à une propriété *caractéristique* des surfaces à courbure totale constante.

Dans les exemples qui précèdent, on a pris comme point de départ des propriétés métriques de certaines surfaces associées à ces congruences. L'objet principal du Mémoire actuel, est de montrer comment, dans certains cas, de propriétés purement projectives des congruences stratifiables, on peut faire dériver des propriétés métriques.

La possibilité de transformer, par l'intermédiaire de congruences stratifiables, des propriétés projectives en propriétés métriques, n'a pas lieu de surprendre; il suffit, par exemple, de se rappeler que les congruences W, de caractère projectif, jouent dans la théorie des congruences stratifiables un rôle fondamental, et que, ces mêmes congruences W, sont intimement liées au problème *métrique* de la déformation infiniment petite des surfaces.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés à l'exposition d'un certain nombre de propriétés des congruences stratifiables; nous nous sommes surtout attaché à mettre en évidence le rôle d'unification que la notion de *réseaux associés* que nous avons introduite dans une Note récente des *Comptes rendus* [1], est susceptible de jouer dans la théorie.

Dans le troisième paragraphe, les résultats des deux premiers sont appliqués à l'étude de certaines suites de transformations de Ribaucour des surfaces (des réseaux).

Le cas où l'un des réseaux de la suite est un *réseau point*, étudié au paragraphe 4, est particulièrement intéressant au point de vue géométrique. Signalons, parmi les questions qui s'y rattachent, une démonstration toute naturelle du lien bien connu et si remarquable qui existe entre les deux importants problèmes de la recherche des systèmes cycliques normaux à une surface donnée et des surfaces ayant même représentation sphérique que la surface donnée; la détermination de réseaux, admettant des congruences harmoniques *normales* dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres; la détermination de certains quadruples de réseaux orthogonaux fournissant des cycles fermés de transformations de Ribaucour, ou de quadrilatères gauches dont les cotés engendrent des congruences cycliques.

---

(1) *C. R.*, t. 197, p. 1565, 1933.

I. — Propriétés des congruences stratifiables avec une congruence donnée.

Je rappelle ici quelques résultats, que j'ai établis dans un Mémoire récent [1], et qui sont à la base de la recherche actuelle.

Soit (K) une congruence rectiligne quelconque, (K′) l'une des congruences formant avec (K) un couple simplement stratifiable; les rayons de (K) et de (K′) se correspondent biunivoquement, et il existe ∞^1 plans issus du rayon courant de (K′) touchant leurs enveloppes respectives sur le rayon correspondant de (K). Envisageons, dans les différentes congruences (K′), les rayons correspondant à un rayon déterminé K de (K); nous obtenons un ensemble de droites présentant le même degré de généralité que la congruence (K′) [une fonction arbitraire de deux arguments u et v, et trois fonctions arbitraires de l'un des deux arguments u ou v].

Considérons toutes celles des droites K′ passant par un point quelconque de l'espace; ces droites cessent d'être concourantes dès que l'on fait décrire à K la congruence (K). En cherchant à grouper les congruences (K′) en familles telles que les rayons homologues [correspondant à un même rayon de (K)] d'une même famille soient constamment concourants, j'ai été conduit au résultat suivant.

Il est possible de grouper les congruences (K′) simplement stratifiables avec (K) en familles de ∞^2 congruences jouissant des propriétés suivantes :

Les rayons homologues des ∞^2 congruences de chaque famille concourent en un point $\omega(u, v)$ [u et v sont les paramètres fixant un rayon de (K)].

Ces rayons peuvent être ordonnés en familles de faisceaux plans de sommet ω, *les plans des faisceaux formant à leur tour un faisceau dont l'arête décrit l'une des congruences* (K′) *simplement stratifiable avec* (K) *de la famille envisagée.*

La connaissance d'une congruence (K′) simplement stratifiable avec (K), fournit, par l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre à une fonction inconnue φ, une infinité de familles de ∞^2 congruences simplement stratifiables avec (K) et jouissant des propriétés qui précèdent.

Définissons (K), supposée rapportée à ses développables $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, par les deux foyers (x) et (y) portés par le rayon générateur (u, v) [2].

Supposons connue une congruence (K′); soient (X) et (Y) les points où le rayon (u, v) de (K′) perce les plans focaux du rayon correspondant de (K); désignons par (π) l'un des plans issus de K′ touchant son enveloppe (Σ) en un point situé sur

[1] *Sur les congruences stratifiables* (Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1934).

[2] (x) désigne les quatre coordonnées homogènes du point (x_1, x_2, x_3, x_4).

K : (π) est déterminé par les trois points (X), (Y), $(Z) \equiv (x + \lambda y)$, où λ est une fonction connue de u et v, dépendant d'une constante arbitraire. En cherchant à déterminer sur K′ un point $\omega \equiv X - \varphi Y$ qui soit le sommet d'un faisceau [de plan (π)] constitué par des rayons homologues de ∞^1 congruences simplement stratifiables avec (K), on trouve que φ doit satisfaire à une certaine équation du deuxième ordre (E) [équation (19) du Mémoire cité] *ne dépendant pas de* λ. Chaque solution φ de cette équation définit une famille de ∞^1 congruences [dont (K′) fait partie]; les rayons homologues [correspondant à un même rayon de (K)] de ces ∞^1 congruences sont situés dans un même plan tangent (π) à (Σ), et, dans ce plan, concourent au point ω défini ci-dessus.

L'équation (E) ne dépendant pas du paramètre λ qui fixe le plan (π) autour de K′, chaque plan (π) correspondant à une valeur particulière de λ coupe ∞^1 congruences simplement stratifiables avec (K) suivant un faisceau de rayons homologues de sommet ω; ainsi se trouve réalisée la configuration de ∞^2 congruences signalée plus haut.

Un cas intéressant est celui où les développables de la congruence (K′), correspondent à celles de (K), et où les foyers de (K′) sont situés dans les plans focaux homologues de (K).

G. Fubini a montré [1] que (K) et (K′) sont alors en liaison de stratifiabilité, et qu'en outre, (K) est *conjuguée* aux ∞^1 surfaces (Σ) enveloppées par les plans issus des rayons de (K′) [les développables de (K) déterminent sur les différentes surfaces (Σ) des réseaux conjugués].

Les foyers de (K′) sont situés sur les tangentes de l'un quelconque de ces réseaux, de sorte que (K′) est *harmonique* à tous ces réseaux.

M. Fubini a montré que, réciproquement d'ailleurs, si le couple (K), (K′) est simplement stratifiable, et si (K) est conjuguée aux surfaces (Σ), (K′) est harmonique à ces mêmes surfaces. On dit que les deux congruences (K) et (K′) *forment un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique.*

On voit comment on peut obtenir de tels couples : on se donne un réseau arbitraire (Σ), et l'on construit deux congruences (K) et (K′), la première conjuguée et la deuxième harmonique au réseau. La détermination effective de (K) et (K′) dépend de l'intégration des deux équations de Laplace bien connues dans cette théorie.

Étudions, dans le cas particulier où (K) et (K′) forment un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique, les différentes familles de ∞^2 congruences stratifiables avec (K), obtenues à partir de (K′) par la construction indiquée plus haut.

Soit (Σ) l'une des surfaces enveloppées par les ∞^1 plans issus des rayons de

---

[1] G. Fubini. *Su alcune classi di congruenze di rette, e sulle trasformazioni delle superficie* R (Annali di Matematica pura ed applicata; serie IV, t. I, 1924, p. 241-257).

(K'); les développables $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ de (K) déterminent sur (Σ) un réseau conjugué; désignons par R le point où le rayon $K(u, v)$ coupe (Σ), par RU et RV les tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ du réseau (R) porté par (Σ). (X) et (Y) étant les points où K' coupe RU et RV, choisissons une solution φ de l'équation (E) dont il a été question ci-dessus, et envisageons le point $\omega \equiv X - \varphi Y$; ce point est le sommet d'un faisceau formé par des rayons homologues de ∞^1 congruences simplement stratifiables avec (K). Envisageons l'une (Θ) des congruences précédentes autre que (K'), et soit Θ son rayon situé dans le plan RUV. L'une des surfaces enveloppées par les plans issus des rayons de (Θ) *est évidemment* (Σ).

La congruence (Θ) est donc *simplement stratifiable avec la congruence* (K), *laquelle est conjuguée à l'une des* ∞^1 *surfaces enveloppées par les plans issus des rayons de* (Θ) [*donc à toutes les autres*]. Il résulte alors du théorème de G. Fubini énoncé plus haut, que (Θ) est *harmonique* au réseau $R(u, v)$.

Les congruences (Θ) forment donc toutes avec (K) un couple conjugué et harmonique.

En remplaçant (Σ) par l'une quelconque des ∞^1 surfaces enveloppées par les plans issus des rayons de (K'), on obtient l'une des configurations cherchées de ∞^2 congruences (Θ). On voit qu'ici, *toutes ces congruences forment avec* (K) *un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique.*

Le lieu du point ω où concourent les rayons homologues des ∞^2 congruences (Θ) dont il vient d'être question, est une certaine surface *sur laquelle les courbes* (u, v) *correspondant aux développables de* (K) *tracent un réseau conjugué.*

Cela résulte d'un théorème bien connu de Guichard suivant lequel le point de rencontre des rayons homologues de deux congruences harmoniques à un même réseau *décrit un réseau dont les courbes correspondent à celles du réseau initial.*

Les développables des ∞^2 congruences (Θ) correspondant toutes aux courbes du réseau ω, ces congruences sont toutes *conjuguées* au réseau.

Le réseau $R(u, v)$ porté par la surface (Σ), et le réseau $\omega(u, v)$, jouissent de la propriété suivante : il existe ∞^1 congruences (Θ) conjuguées à ω et harmoniques à R. Conformément à une dénomination adoptée dans la Note des *Comptes rendus* citée dans l'introduction, nous dirons que le réseau ω est *associé* à R. Dans le paragraphe suivant nous indiquons les propriétés essentielles des réseaux associés.

II. — Réseaux associés.

Soit $R(u, v)$ un point décrivant un réseau quelconque dont les courbes conjuguées sont u et v. Désignons par $x_i(u, v)$ les coordonnées du point R, par (E) l'équation ponctuelle de Laplace du réseau. Le rayon $C(u, v)$ d'une congruence quelconque harmonique à R coupe les deux tangentes RU et RV du réseau R aux points de coordonnées respectives

$$\left(x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial u}}\frac{\partial x_i}{\partial u}\right), \qquad \left(x_i - \frac{\theta}{\frac{\partial\theta}{\partial v}}\frac{\partial x_i}{\partial v}\right),$$

θ étant une solution quelconque de (E).

Considérons deux solutions distinctes θ_1 et θ_2 de (E); elles définissent un faisceau de solutions $\theta_1 + \lambda\theta_2 (\lambda = \text{const.})$.

On vérifie immédiatement qu'aux différentes valeurs de λ correspondent ∞^1 congruences C, harmoniques à R, *telles que les rayons homologues [situés dans un même plan tangent à* R*] concourent en un même point* ω, *les différents faisceaux de rayons homologues étant homographiques.*

ω décrit un réseau *associé* à R, qui est d'ailleurs le réseau *le plus général* associé à R.

Nous allons établir une propriété des réseaux associés à un réseau donné, qui nous sera utile plus loin.

R et ω étant deux réseaux associés, soit (K') l'une des ∞^1 congruences harmoniques à R et conjuguées à ω. Prenons un réseau quelconque R_1, autre que R, *harmonique* à (K') [les foyers de K' sont sur deux tangentes conjuguées de R_1]; la droite $K \equiv RR_1$ joignant les points homologues des deux réseaux R et R_1 décrit, comme il est bien connu, une congruence (K) conjuguée à chacun des deux réseaux; le couple (K), (K') est simplement stratifiable conjugué et *harmonique* (voir le paragraphe précédent), et les surfaces portant les réseaux R et R_1 sont deux des surfaces enveloppées par les ∞^1 plans issus des rayons de (K').

On a vu au paragraphe précédent que chacun de ces ∞^1 plans contient un faisceau de rayons homologues *de sommet* ω de congruences simplement stratifiables avec (K) [donc harmoniques à R_1] : ω *est donc associé à tous les réseaux harmoniques aux* ∞^1 *congruences* (K').

Nous verrons au paragraphe suivant le rôle important que joue ce dernier résultat dans l'étude de certaines suites de transformations de Ribaucour des surfaces; mais, avant d'aller plus loin, nous ajouterons quelques nouvelles remarques relatives aux réseaux associés.

Soient $R(u, v)$ et $R'(u, v)$ deux réseaux associés, RU, RV les deux tangentes du premier réseau [RU = première tangente, RV = deuxième tangente], R'U', R'V' les deux tangentes du deuxième réseau, (X) et (Y) le premier et le deuxième réseau focal de l'une des congruences harmoniques à R et conjuguées à R' : X est sur RU et Y sur RV.

Les deux plans focaux du rayon (XY) de la congruence envisagée sont XYU' et XYV'. Les ∞^1 plans XYU' relatifs aux ∞^1 congruences (XY) touchent leurs enveloppes en un point X situé sur RU; il en résulte que la congruence (R'U') est stratifiable avec (RU), de même (R'V') est stratifiable avec (RV). D'autre part, les réseaux (X) et (Y) sont respectivement conjugués aux congruences (RU) et (RV), ce qui prouve que les couples de congruences [RU, R'U'], [RV, R'V'] sont simplement stratifiables conjugués et harmoniques.

Quand deux réseaux se correspondent par lignes conjuguées de telle façon que les deux tangentes de l'un soient en liaison de stratifiabilité avec les tangentes homologues de l'autre, nous dirons qu'ils sont stratifiables; dans le cas actuel les deux réseaux forment un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique. Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Deux réseaux associés quelconques forment un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique.

La réciproque de cette proposition est vraie :

Si deux réseaux forment un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique, ils sont associés.

Soient en effet $R(u, v)$ et $R'(u, v)$ les deux réseaux; la première tangente R'U' de R' formant avec RU un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique, le point R' est dans le plan RUV [premier plan focal de la congruence RU]; cela suffit pour pouvoir affirmer que R' est associé à R, car, si X est le point de RU où l'un quelconque des plans issus de R'U' touche son enveloppe, les ∞^1 réseaux (X) sont conjugués à (RU) et leurs deuxièmes tangentes R'X sont harmoniques à R.

Le raisonnement précédent met en évidence la proposition suivante, établie autrement par G. Fubini dans son Mémoire précédemment cité :

Si deux congruences forment un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique, il en est de même de leurs $p^{\text{ièmes}}$ transformées de Laplace dans le sens d'une même variable.

Soient en effet RU et R′U′ les deux congruences, R et R′ étant supposés être les premiers réseaux focaux de chacune d'elles; désignons par RV et R′V′ les deuxièmes congruences focales des réseaux R et R′. Par hypothèse R′ est dans le plan RUV; le raisonnement fait dans l'établissement de la réciproque ci-dessus montre alors que le réseau (R′) est associé à (R), et que par suite, RV et R′V′, transformées de Laplace de RU et R′U′, forment un nouveau couple simplement stratifiable conjugué et harmonique.

Il est clair d'ailleurs que l'on a le résultat analogue suivant relatif à deux réseaux simplement stratifiables conjugués et harmoniques :

Si l'on effectue, à partir de deux réseaux formant un couple simplement stratifiable conjugué et harmonique, un même nombre de transformations de Laplace de même sens, on obtient deux nouveaux réseaux formant un couple analogue.

Réseaux doublement associés. — Si la relation entre deux réseaux associés est réciproque [chaque réseau est conjugué à ∞^1 congruences harmoniques à l'autre], on a un *couple de réseaux doublement associés.*

Eu égard à ces couples, on a les propositions suivantes, conséquences immédiates des propositions analogues relatives aux réseaux simplement associés, et qu'il suffit d'énoncer.

Les tangentes homologues de deux réseaux doublement associés forment deux couples de congruences doublement stratifiables conjugués et harmoniques.

En appelant couple doublement stratifiable conjugué et harmonique de réseaux, l'ensemble de deux réseaux dont les tangentes vérifient la condition précédente, on peut énoncer la réciproque :

Tout couple doublement stratifiable conjugué et harmonique de réseaux est un couple doublement associé.

Les réseaux focaux de même rang de tout couple de congruences doublement stratifiable conjugué et harmonique *sont des réseaux doublement associés, et l'on obtient ainsi tous les couples de réseaux doublement associés.* Ces réseaux sont des réseaux R de *Tzitzeïca-Demoulin.*

Un même nombre de transformations de Laplace de même sens transforment :

Un couple de congruences doublement stratifiables conjugué et harmonique en un couple analogue [G. Fubini].

Un couple de réseaux doublement stratifiable conjugué et harmonique en un couple analogue.

Réseaux conjugués persistants. — Aux propriétés projectives précédentes des réseaux associés, nous ajouterons la propriété métrique suivante, relative aux réseaux associés aux réseaux conjugués persistants dans une déformation continue de leur surface support.

Envisageons une congruence (G), formée de droites situées dans les plans tangents à une surface quelconque (S), harmonique à un réseau conjugué de (S) : il existe un réseau $R(u, v)$ de (S) tel que les foyers du rayon de (G) situé dans le plan tangent en R à (S) soient sur les tangentes du réseau.

Déformons (S) *arbitrairement*, les rayons de (G) étant supposés *invariablement liés* aux plans tangents correspondants de (S). (G) se déforme aussi, et Ribaucour a montré qu'au cours de la déformation (G) ne cesse d'être harmonique à un réseau conjugué de (S).

Si l'on suppose que (S) est douée d'un réseau conjugué persistant dans une déformation continue, et que ce réseau est précisément le résean $R(u, v)$ envisagé ci-dessus, on a le résultat important, établi par Ribaucour, et qui résulte aussi de formules générales que j'ai données dans un Mémoire antérieur [1] :

(G) *ne cesse d'être harmonique à* (R) *au cours de la déformation continue conservant* (R) [les foyers conservent des positions invariables sur les rayons qui les portent].

Soit dès lors $R(u, v)$ un réseau persistant dans une déformation continue; les différentes congruences harmoniques à (R), entraînées dans la déformation, *restent harmoniques à* (R); désignons par $R'(u, v)$ un réseau quelconque *associé* à (R); les ∞^1 congruences issues de R', harmoniques à (R) et conjuguées à (R'), restent harmoniques à (R) [et par suite conjuguées à (R')], de sorte qu'au cours de la déformation (R') *reste associé à* (R).

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

Si les points constituant les deux familles de courbes d'un réseau associé à un réseau persistant (R), sont supposés *fixes* dans les plans tangents correspondants à (R), *ils ne cessent d'être distribués sur les deux familles de courbes d'un réseau associé à* (R) *au cours de la déformation continue dont* (R) *est susceptible.*

---

(1) *Sur la déformation de certaines congruences rectilignes* (Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 1932).

III. — Faisceaux de transformations de Ribaucour.

Soit $R(u, v)$ un réseau *orthogonal*[1]; toutes les congruences (C) harmoniques à R sont *cycliques*; chacune d'elles définit une transformation continue de Ribaucour de la surface R (du réseau R), la transformation étant effectuée par les cercles du système cyclique associé à la congruence [le cercle associé à un rayon qnelconque a pour axe ce rayon et passe par le point R correspondant].

Considérons un réseau R′ *associé* à R, et les ∞^1 congruences cycliques (C) harmoniques à R et conjuguées à R′. Les rayons de ces ∞^1 congruences cycliques correspondant au point $R(u, v)$ de R, forment, dans le plan tangent (u, v) du réseau, un faisceau de sommet $R'(u, v)$. Les cercles (u, v) des ∞^1 systèmes cycliques attachés aux congruences (C) passent tous par le point R; en outre, leurs axes passant tous par R′, ils sont tous situés sur une même sphère Σ (de centre R′ et de rayon R′R) sur laquelle ils constituent un *faisceau de cercles tangents*.

A chaque réseau R′ associé au réseau orthogonal R correspond donc un faisceau de transformations continues de Ribaucour de la surface R, chaque transformation du faisceau étant effectuée par les cercles de l'un des systèmes cycliques attachés aux ∞^1 congruences (C) harmoniques à R et conjuguées à R′.

Comme nous l'avons fait observer au paragraphe II, les différents faisceaux de rayons homologues des ∞^1 congruences (C) sont homographiques; les plans (u, v) des cercles réalisant le faisceau des transformations de Ribaucour définies par ces ∞^1 congruences, issus de la normale à R au point (u, v), et perpendiculaires aux rayons correspondants des congruences en question, forment un faisceau restant homographique à lui-même lorsque u et v varient.

Il est clair que si l'on connaît deux des transformations du faisceau, le faisceau est déterminé : θ_1 et θ_2 étant les deux solutions de l'équation de Laplace (E) dont il a été question au début du paragraphe II, définissant les deux congruences cycliques qui déterminent les deux transformations considérées, la congruence définissant la transformation la plus générale du faisceau est déterminée par $\theta_1 + \lambda\theta_2$ [$\lambda =$ constante arbitraire].

Si l'on sait *a priori* qu'un réseau R′ est associé au réseau R, on peut déterminer les ∞^1 congruences conjuguées à R′ et harmoniques à R définissant l'un des faisceaux de transformations de Ribaucour de R : on connaît, en effet, dans chaque plan tangent (u, v) à R, le sommet R′ du faisceau formé par les rayons homologues des ∞^1 congruences; en exprimant que le rayon d'une congruence harmonique à R

[1] Nous représenterons par la même lettre R. le réseau, le point qui le décrit, et la surface qui le porte.

situé dans le plan (u, v) passe par R', on obtient une équation du premier ordre en θ, formant avec (E) un système compatible donnant θ avec une constante arbitraire.

Au point de vue géométrique, la connaissance de trois des ∞^1 systèmes cycliques réalisant le faisceau de transformations entraine la connaissance du faisceau complet.

Soient, en effet, Γ_1, Γ_2, Γ_3 les cercles générateurs des trois systèmes cycliques connus; Γ_1, Γ_2, Γ_3 sont tangents à la normale à R au point (u, v), et situés sur la sphère Σ de centre R' précédemment définie; d'après une remarque faite plus haut, le système cyclique réalisant la transformation la plus générale du faisceau, est décrit, par l'intersection de Σ, avec le plan π issu de la normale à R formant avec les plans de Γ_1, Γ_2, Γ_3 un rapport anharmonique constant.

R étant un réseau orthogonal quelconque, supposons connues deux (donc ∞^1) congruences cycliques (C) harmoniques à R définissant un réseau R' associé à R. Envisageons l'une quelconque des congruences (C), elle définit ∞^1 réseaux orthogonaux, transformés de Ribaucour de R, portés par les surfaces orthogonales aux cercles associés à la congruence. Nous obtenons ainsi une transformation à deux paramètres $T(\lambda, \alpha)$ du réseau R, les paramètres λ et α fixant, le premier la congruence (C), le deuxième le réseau transformé de R au moyen de (C). Les ∞^2 réseaux R_1, transformés de R par $T(\lambda, \alpha)$ sont évidemment tous *concourants* avec R [admettent avec R une congruence cyclique (C) harmonique commune].

Nous allons montrer maintenant, comment, d'une transformation $T(\lambda, \alpha)$, il est possible de déduire une transformation des réseaux orthogonaux dépendant *d'autant de constantes arbitraires que l'on veut.*

Considérons l'un quelconque R_1 des ∞^2 réseaux transformés de R par la transformation $T(\lambda, \alpha)$ définie plus haut; R_1 est harmonique à l'une (C) des ∞^1 congruences cycliques harmoniques à R et conjuguées à R'; il résulte donc d'une propriété établie au paragraphe II que R' est *associé* à R_1 et aux ∞^2 réseaux analogues transformés de R par $T(\lambda, \alpha)$.

Envisageons le réseau R_1; on connaît l'un de ses réseaux associés R' : on peut donc, comme on l'a fait observer plus haut, déterminer les ∞^1 congruences cycliques (C_1) harmoniques à R_1 et conjuguees à R'. Considérons l'une quelconque (C_1) de ces congruences, et transformons, au moyen de (C_1) par la méthode de Ribaucour, R_1 en un nouveau réseau orthogonal R_2. R_2 dépendra de quatre paramètres, à savoir : les paramètres λ et α dont dépend R_1, puis les deux paramètres analogues λ_1, α_1 introduits dans le passage de R_1 à R_2. R_2 est *concourant* avec R_1, tout comme R_1 avec R, *mais non avec le réseau de départ* R.

En poursuivant le procédé de transformation, on obtient une infinité de réseaux orthogonaux transformés de R, le réseau le plus général dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut. Sur les surfaces portant les différents réseaux, les lignes de courbure se correspondent, et correspondent toutes au réseau conjugué (u, v) de R'.

Deux points consécutifs quelconques de la suite $R, R_1, R_2, \ldots$, étant situés sur un cercle dont l'axe passe par R', le passage de R à $R_1, R_2, R_3, \ldots$, ne modifie pas la distance des points homologues $R, R_1, R_2, \ldots$, à R', de sorte que les points homologues des différents réseaux transformés, sont situés, quels que soient u et v, sur une sphère $\Sigma(u, v)$ normale à tous les éléments superficiels homologues (u, v) des surfaces qui portent les réseaux. Ainsi :

Sur toutes les surfaces transformées d'une surface quelconque R *par le procédé qui vient d'être décrit (elles dépendent d'un nombre arbitrairement grand de paramètres) les lignes de courbure se correspondent.*

Tout ensemble de points homologues sur les différentes surfaces transformées, est situé sur une sphère $\Sigma(u, v)$ *coupant orthogonalement toutes les surfaces.*

Aux lignes de courbure des différentes surfaces transformées correspond, sur la surface lieu du centre de la sphère Σ, *un réseau conjugué [le réseau* R'].

Le réseau R' étant un réseau *quelconque* associé à un réseau orthogonal, l'étude qui précède montre que tout réseau de cette espèce est associé à une infinité [dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres] de réseaux orthogonaux, constituant une famille (Θ) de réseaux. Les réseaux de la famille (Θ) peuvent être ordonnés suivant une infinité [dépendant aussi d'un nombre arbitrairement grand de paramètres] de *chaînes de Ribaucour* [les ∞^1 éléments d'une même chaîne se déduisant les uns des autres par une *transformation continue* de Ribaucour]. De chaque élément de Θ sont issues ∞^1 chaînes de Ribaucour, définies par les ∞^1 congruences cycliques conjuguées à R' et harmoniques à l'élément envisagé.

Si deux éléments ne sont pas situés sur une même chaîne, il n'est généralement pas possible de passer de l'un à l'autre par une transformation de Ribaucour.

Une étude plus approfondie de la configuration précédente, montre que, tout au moins pour les configurations obtenues en prenant pour réseau R de départ un *réseau point*, le passage est toujours possible (d'une infinité de façons) par deux transformations de Ribaucour successives.

Cette étude, qui fera l'objet du paragraphe suivant, mettra en outre en évidence des quadruples remarquables de réseaux tels que deux réseaux consécutifs quelconques soient en transformation de Ribaucour.

IV. — Ensembles de réseaux dérivés d'un réseau point.

Envisageons un réseau orthogonal quelconque R, l'un de ses *associés* R', et la configuration (Θ) étudiée au paragraphe précédent déduite du couple RR'.

Considérons un réseau O parallèle à R (au sens de Peterson); on sait que toute congruence harmonique à R admet ∞^1 congruences parallèles, harmoniques à O; prenons deux congruences harmoniques à O, et parallèles, respectivement, à deux des congruences harmoniques à R qui définissent le réseau R'. Le point de rencontre des rayons homologues de ces deux congruences *décrit un réseau r parallèle à* R' *et associé à* O.

A partir de O et r, construisons, comme on l'a expliqué au paragraphe III, la configuration analogue à (Θ); on voit aussitôt que les éléments qui interviennent dans la construction des deux configurations [réseaux et congruences cycliques] sont deux à deux parallèles, les réseaux se correspondant par lignes conjuguées et les congruences par développables. En particulier, on peut envisager la configuration (Θ) attachée à un réseau O *réduit à un point*. Un parallélisme redonne la configuration générale.

Considérons donc un réseau point O, de tangentes OU, OV, et soit $r(u, v)$ l'un de ses réseaux associés. Les surfaces portant les réseaux formant la configuration (Θ) sont toutes orthogonales à la sphère à deux paramètres $\Sigma(u, v)$ de centre r et de rayon rO. Cette sphère passe par le point fixe O, et les points où elle coupe orthogonalement les différentes surfaces Θ établissent entre ces surfaces une correspondance par lignes de courbure, les lignes de courbure correspondant aux développables (cônes) du réseau O [ou aux lignes conjuguées du réseau r].

Transformons par inversion la figure, en prenant pour pôle le point O. Les différentes surfaces (Θ) se transforment en surfaces Ω, constituant une famille à une infinité de paramètres, jouissant des propriétés suivantes :

Sur les surfaces transformées les lignes de courbure (u, v) se correspondent; les points homologues (u, v) des surfaces Ω sont situés dans un même plan $\pi(u, v)$ transformé de $\Sigma(u, v)$, lequel coupe orthogonalement toutes les surfaces Ω. Les normales (Δ) aux différentes surfaces aux points homologues constituent une famille de droites coplanaires, situées dans π, et engendrant, lorsque π varie, des congruences normales sur lesquelles les développables (u, v) se correspondent. Nous appellerons (A) la surface enveloppée par π.

Les différents éléments de l'ensemble (Θ) correspondant à l'une des transformations continues de Ribaucour [définie par l'une des congruences cycliques conjuguées à r et harmoniques à l'un quelconque des réseaux orthogonaux auxquels r est associé] forment ce que nous appelons une *chaîne de Ribaucour extraite de* (Θ);

l'un quelconque des éléments Θ, définit un faisceau de ∞^1 chaînes, les éléments de l'une des chaînes du faisceau étant orthogonaux à l'un des ∞^1 systèmes cycliques définis par les ∞^1 congruences cycliques conjuguées à r et harmoniques à O.

Les cercles homologues de ces ∞^1 systèmes cycliques forment sur la sphère Σ un faisceau de cercles tangents, transformé par l'inversion de pôle O en un faisceau de cercles tangents du plan π; ces cercles engendrent, lorsque π varie, ∞^1 systèmes cycliques formés de cercles situés dans les plans tangents à la surface (A) définie plus haut.

Nous dirons que chacun des ∞^1 systèmes cycliques attachés à (A) [ou plus simplement le cercle générateur du système cyclique situé dans π] est l'image de la chaîne correspondante d'éléments Θ. L'image d'un faisceau de chaînes est *un faisceau de cercles tangents*. Pour le faisceau de chaînes issues de l'élément point O, l'image est *un faisceau de droites parallèles*.

Envisageons, dans π, la droite Δ normale à la surface transformée par inversion d'une surface Θ. La congruence (Δ) définit une transformation continue de Ribaucour particulière de la surface inverse de Θ [parallélisme ordinaire], et l'inversion fait correspondre à cette transformation, une transformation continue de Ribaucour de Θ. Les éléments transformés de Θ dans cette transformation *ne sont pas situés sur une chaîne issue de* Θ.

Soient Δ_1 et Δ_2 deux congruences (Δ) particulières; dans ces deux congruences les *développables se correspondent*; il résulte, par suite, d'un théorème bien connu, que *les droites joignant les couples de foyers homologues de* Δ_1 *et* Δ_2 *sont deux tangentes conjuguées de la surface* (A) *enveloppée par le plan* π *contenant* Δ_1 *et* Δ_2.

La surface (A) nous apparaît donc comme douée d'un réseau conjugué (α) *tel qu'il existe une infinité* [*dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres*] *de congruences normales harmoniques au réseau* [1].

Désignons par β le point de rencontre de Δ_1 et Δ_2; β décrit comme l'on sait, lorsque π varie, un réseau associé à (α). Ce réseau (β), conjugué à deux congruences normales, est l'un des réseaux [que C. Guichard appelle 2O] auxquels on peut attacher des congruences de sphères de Ribaucour [les centres des sphères sont les points du réseau] déterminant sur les deux nappes de leur enveloppe une correspondance par lignes de courbure, les lignes de courbure correspondant précisément aux courbes du réseau.

---

[1] On ne connaît pas beaucoup de réseaux *harmoniques à une infinité de congruences normales*. Parmi les réseaux de cette espèce, je ne peux citer que les réseaux harmoniques à ∞^1 congruences normales parallèles, et les réseaux enveloppés par les plans des trajectoires orthogonales des familles de Lamé à trajectoires orthogonales planes.

L'existence de réseaux admettant une infinité, dépendant d'un nombre arbitrairement grand de paramètres, de congruences harmoniques normales, n'a peut-être pas encore été signalée. On voit quel est le degré de généralité des réseaux (A) : chaque réseau associé à un réseau orthogonal en donne un.

Les congruences des normales aux deux nappes de l'enveloppe sont (Δ_1) et (Δ_2); les surfaces normales à (Δ_1) et (Δ_2) *s'assemblent donc par couples de surfaces transformées de Ribaucour l'une de l'autre.*

Il est facile de mettre en évidence l'intérêt de cette dernière remarque.

Deux réseaux pris au hasard dans l'ensemble (Θ) [donc non généralement situés sur une même chaîne d'éléments], ne peuvent ordinairement pas être transformés l'un dans l'autre par *une seule* transformation de Ribaucour.

Nous allons voir cependant, qu'il est toujours possible d'appliquer à deux réseaux arbitrairement choisis dans (Θ), des transformations de Ribaucour telles que les deux réseaux transformés *soient en transformation de Ribaucour.*

Soient en effet Θ_1, Θ_2 deux éléments arbitraires de (Θ); Δ_1, Δ_2 les congruences des normales aux surfaces μ_1 et μ_2 inverses de Θ_1 et Θ_2.

Désignons par ω_1 et ω_2 deux réseaux transformés de Ribaucour l'un de l'autre, orthogonaux respectivement à Δ_1 et Δ_2 [nous avons vu qu'il y a une infinité de couples (ω_1, ω_2)].

μ_1 et ω_1 sont transformés de Ribaucour, de même que μ_2 et ω_2.

L'inversion du pôle O transforme μ_1 et μ_2 en Θ_1 et Θ_2; ω_1 et ω_2 en deux nouveaux réseaux α_1, α_2.

α_1 et α_2 sont respectivement transformés de Ribaucour de Θ_1 et Θ_2, en même temps que transformés de Ribaucour l'un de l'autre, conformément à la proposition énoncée.

Si l'on prend ω_1 confondu avec μ_1, la transformation de Θ_1 en α_1 disparaît, et l'on voit que l'on peut passer de Θ_1 à Θ_2 par les deux transformations de Ribaucour suivantes : transformation de Θ_1 en α_2, puis transformation de α_2 en Θ_2.

On peut donc énoncer la propriété suivante de l'ensemble des réseaux (Θ) :

On peut toujours passer de l'un quelconque de ses éléments à un autre par deux transformations de Ribaucour successives.

Si Θ_1 et Θ_2 *sont pris sur une même chaîne*, une seule transformation de Ribaucour permet de passer de Θ_1 à Θ_2. Les quatre réseaux $(\Theta_1, \alpha_1, \alpha_2, \Theta_2)$ définis plus haut, forment alors un quadruple tel que deux réseaux consécutifs quelconques du quadruple [dans l'ordre de la permutation] sont transformés de Ribaucour.

Tout couple (Θ_1, Θ_2) donne ∞^1 quadruples du genre précédent, car, le couple (α_1, α_2) n'est défini qu'à un paramètre près.

Envisageons les quatre droites suivant lesquelles se coupent les plans tangents homologues des couples consécutifs de réseaux d'un même quadruple. Ces droites forment un quadrilatère gauche dont les quatre arêtes *décrivent quatre congruences cycliques sur lesquelles les développables se correspondent.*

La configuration qui fait l'objet de cette étude, contient une infinité de quadruples de congruences cycliques analogues au précédent, le quadruple général dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on veut.

Pour terminer, envisageons la droite Δ, image après l'inversion, d'une chaîne quelconque issue de l'élément point O et définie par une certaine congruence cyclique (C) harmonique à O. Δ engendre une congruence normale, dont les surfaces orthogonales ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure qu'une surface quelconque Σ portant un réseau R *parallèle au réseau* O.

En envisageant toutes les congruences (C) harmoniques à O, et en transformant par inversion les cercles des systèmes cycliques correspondants, on obtient une infinité de congruences normales dont les surfaces orthogonales ont toutes même représentation sphérique que Σ.

Il est facile de voir qu'on obtient ainsi *la totalité* des surfaces admettant même représentation sphérique que Σ.

Envisageons une telle surface; la congruence de ses normales est orthogonale au réseau O [ses rayons sont perpendiculaires aux plans correspondants du réseau]; les cercles inverses des rayons de la congruence précédente forment un système cyclique, et les axes des cercles de ce système forment une congruence cyclique dont les rayons sont situés dans les plans correspondants du réseau O [donc harmonique à ce réseau]. Σ fait donc partie des surfaces déterminées plus haut, conformément à la proposition énoncée.

Les congruences cycliques harmoniques à O étant parallèles aux congruences harmoniques à R, on voit immédiatement apparaître le lien bien connu, signalé dans l'introduction, entre le problème de la recherche des systèmes cycliques normaux à une surface quelconque Σ et celui de la recherche des surfaces ayant même représentation sphérique que Σ.