

MUSTAPHA BOUHAR

**Sur la symétrie radiale et l'unicité de solutions
d'équations elliptiques semi-linéaires**

Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6^e série, tome 6, n° 1
(1997), p. 105-120

http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_1_105_0

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la symétrie radiale et l'unicité de solutions d'équations elliptiques semi-linéaires^(*)

MUSTAPHA BOUHAR⁽¹⁾

RÉSUMÉ. — On étudie ici la symétrie radiale des solutions de l'équation :

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \lambda u + \phi(t) + f(u) = 0 \quad \text{dans } I \times S^1,$$

où $I = [0, +\infty[$, $S^1 = [0, 2\pi]$, f vérifiant certaines hypothèses, ϕ est une fonction positive, a et λ sont deux nombres réels. On étudie aussi l'unicité des solutions radiales quand $\phi \equiv 0$.

ABSTRACT. — We study here the radial symmetry of the solutions of:

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \lambda u + \phi(t) + f(u) = 0 \quad \text{in } I \times S^1,$$

where $I = [0, +\infty[$ and $S^1 = [0, 2\pi]$ and f satisfy some properties and ϕ is a positive function and a, λ are two real numbers. We study also the uniqueness for radial solutions when $\phi \equiv 0$.

1. Introduction

On considère l'équation différentielle non linéaire :

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \lambda u + \phi(t) + f(u) = 0 \quad \text{dans } I \times S^1, \quad (1)$$

où S^1 désigne la sphère de \mathbb{R}^2 de centre 0 et de rayon 1, $I = [0, +\infty[$, $\phi(t)$ est une fonction positive, a et λ sont deux nombres réels tel que a soit différent de zéro.

(*) Reçu le 12 octobre 1993

(1) Laboratoire de Mathématiques et Applications, Université de Tours, Faculté des Sciences et Techniques, Parc de Grandmont, F-37200 Tours (France)

Rappelons que certaines hypothèses sur f permettent de mettre en évidence une estimation a priori pour les solutions positives de (1) (M. Bouhar [2] et M. Bouhar et L. Veron [3]) et par conséquent de définir leur comportement asymptotique au voisinage de l'infini (M. F. Bidaut-Veron et M. Bouhar [1]). Ici on s'intéresse, dans un premier temps, à la symétrie radiale des solutions positives u de (1) avec des données mixtes au bord. Notre premier résultat est le suivant.

THÉORÈME 1. — *Supposons que l'hypothèse suivante soit vérifiée.*

(H1) *Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que $f(s) - \lambda s$ soit décroissante sur $[0, \varepsilon_0]$ et considérons une solution positive u de (1) vérifiant :*

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} (u(t, \sigma)) \leq \varepsilon_0 \quad \text{uniformément sur } S^1, \quad (2)$$

et il existe $t_0 \in \mathbb{R}^+$ assez grand tel que :

$$u(t_0, \sigma) = u(t_0) \quad \text{pour tout } \sigma \in S^1. \quad (3)$$

Alors

$$u(t_0, \sigma) = u(t_0) \quad \text{pour tout } t \geq t_0 \text{ et } \sigma \in S^1. \quad (4)$$

Notre second résultat est le suivant.

THÉORÈME 2. — *Supposons que l'hypothèse suivante soit vérifiée.*

(H2) *Il existe $\delta_0 < 0$ tel que :*

$$\text{sign}(-a)\delta_0 \left(s \frac{df}{ds}(s) - f(s) \right) \geq 2f(s) \quad \text{pour } s \geq 0 \text{ et } \lambda < \frac{a^2}{4}.$$

Considérons une solution positive u de (1) vérifiant

$$u(t_0, \cdot) = 0 \quad \text{sur } S^1 \text{ pour un certain } t_0 \in \mathbb{R}^+. \quad (5)$$

Alors

$$u(t_0, \sigma) = u(t) \quad \text{pour tout } \sigma \in S^1 \text{ et } t \geq t_0. \quad (6)$$

Ensuite, on suppose que a et λ sont strictement positives et on caractérise, pour $\xi \leq 0$ donné, les solutions du problème (PVI) suivant :

$$u_{tt} + au_t - \lambda u + f(u) = 0, \quad t \geq 0, \quad u > 0, \quad t > 0, \quad (7)$$

$$u'(0) = \xi, \quad (8)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0. \quad (9)$$

Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(r) = f(r) - \lambda r$ et G sa primitive qui s'annule en zéro. Enfin, soit $U_0 = \inf\{u \in]0, +\infty[\mid G(u) > 0\}$. Dans leur article [4], L. A. Peletier et J. Serrin ont montré que si g vérifiait les hypothèses suivantes :

(H3) g est définie, continue et localement lipschitzienne sur $]0, +\infty[$,

(H4) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{g(s)}{s} = -\lambda$,

(H5) $\int_0^\delta g(u) du > 0$ pour un réel δ positif,

(H6) $g(u)/(u - U_0)$ est décroissante sur $]U_0, +\infty[$, où $g(u) > 0$,

alors le problème suivant :

$$u_{tt} + \frac{n-1}{t} u_t + g(u) = 0, \quad t \geq 0, \quad u \geq 0, \quad t \geq 0, \quad (10)$$

$$u'(0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0 \quad (11)$$

admettait au plus une solution. Leurs techniques nous permettent d'établir des résultats d'unicité similaires pour les solutions de (PVI).

THÉORÈME 3. — *Supposons que (H3), (H4), (H5) et (H6) soit vérifiées. Alors le problème (PVI) admet au plus une solution.*

2. Démonstration du théorème 1

Comme dans la démonstration du théorème 2.1 (L. Veron [5]), on introduit la fonction moyenne :

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} u(t, \sigma) d\sigma. \quad (12)$$

Celle-ci vérifie l'équation :

$$\bar{u}_{tt} + a\bar{u}_t - \lambda\bar{u} + \phi(t) + \overline{f(u)} = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (13)$$

Considérons $w(t, \sigma) = u(t, \sigma) - \bar{u}(t)$. w vérifie l'équation :

$$w_{tt} + aw_t + w_{\sigma\sigma} - \lambda w + f(u) - \overline{f(u)} = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (14)$$

Ensuite, on multiplie (14) par w et on intègre sur S^1 . On obtient pour tout $t \geq 0$:

$$\int_{S^1} w w_{tt} d\sigma + a \int_{S^1} w w_t d\sigma + \int_{S^1} w w_{\sigma\sigma} d\sigma + \int_{S^1} (f(u) - \overline{f(u)} - \lambda w) w d\sigma = 0. \quad (15)$$

Comme \bar{u} est la projection de u sur le premier espace propre associé à $-\Delta u_{S^1}$ ayant 1 comme deuxième valeur propre, on a

$$- \int_{S^1} w_{\sigma\sigma} w d\sigma \geq \int_{S^1} w^2 d\sigma. \quad (16)$$

D'autre part, (H5) et (2) montrent qu'il existe $T \in \mathbb{R}^+$ assez grand tel que :

$$(f(u) - f(\bar{u}) - \lambda(u - \bar{u}))(u - \bar{u}) \leq 0 \quad \text{pour } t \geq T. \quad (17)$$

Ensuite comme

$$\begin{aligned} & \int_{S^1} (f(u) - \lambda u - (\overline{f(u)} - \lambda \bar{u})) (u - \bar{u}) d\sigma = \\ & = \int_{S^1} (f(u) - \lambda u - (f(\bar{u}) - \lambda \bar{u})) (u - \bar{u}) d\sigma + \\ & \quad + \int_{S^1} ((f(\bar{u}) \overline{f(u)})(u - \bar{u})) d\sigma = \\ & = \int_{S^1} (f(u) - f(\bar{u}) - \lambda w) w d\sigma, \end{aligned} \quad (18)$$

on déduit de (17) :

$$\int_{S^1} (f(u) - f(\bar{u}) - \lambda w) w d\sigma \leq 0 \quad \text{pour tout } t \geq T. \quad (19)$$

En utilisant (16) et (19), (15) devient

$$\int_{S^1} w_{tt} w d\sigma + a \int_{S^1} w_t w d\sigma \geq \int_{S^1} w^2 d\sigma \quad \text{pour tout } t \geq T. \quad (20)$$

Soit

$$X(t) = \left(\int_{S^1} w^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \tilde{X}(t) = (\eta^2 + X(t)^2)^{\frac{1}{2}},$$

Sur la symétrie radiale et l'unicité de solutions d'équations elliptiques

où η désigne un réel strictement positif. Un calcul rapide montre que $\tilde{X}_t \tilde{X}(t) = \int_{S^1} w_t w \, d\sigma$ et

$$\tilde{X}_{tt} \tilde{X}(t) = \int_{S^1} w_{tt} w \, d\sigma + \int_{S^1} w_t^2 \, d\sigma - X_t^2 \geq \int_{S^1} w_{tt} w \, d\sigma.$$

D'où :

$$\tilde{X}_{tt} + a\tilde{X}_t - \left(\tilde{X} - \frac{\eta}{\tilde{X}} \right) \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq T. \quad (21)$$

En faisant tendre η vers 0, on obtient

$$X_{tt} + aX_t - X \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq T. \quad (22)$$

L'équation associée à (22) :

$$Y_{tt} + aY_t - Y = 0 \quad \text{pour tout } t \geq T \quad (23)$$

admet comme solution générale :

$$Y(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \quad \text{pour tout } t \geq T, \quad (24)$$

où A et B désignent deux constantes réelles et

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4}}{2} > 0 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4}}{2} < 0. \quad (25)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $Y_\varepsilon(t) = \varepsilon e^{r_1 t}$. Montrons que $X(t)$ est inférieur à $Y_\varepsilon(t)$ sur $[t_0, +\infty[$ (t_0 étant défini par (3) et supérieur à T). On introduit alors la fonction $Z(\cdot) = X(\cdot) - Y_\varepsilon(\cdot)$. Elle vérifie l'inéquation :

$$Z_{tt} + aZ_t - Z \geq 0 \quad \text{pour tout } t \geq t_0. \quad (26)$$

Comme $Z(t_0) = -\varepsilon e^{r_1 t_0} < 0$ et $Z(t) < 0$ au voisinage de $+\infty$, d'après le principe de maximum on a $Z(t) < 0$ sur $[t_0, +\infty[$. D'où

$$X(t) < \varepsilon e^{r_1 t} \quad \text{sur } [t_0, +\infty[. \quad (27)$$

Lorsque l'on fait tendre ε vers 0, on obtient

$$X \equiv 0 \quad \text{sur } [t_0, +\infty[. \quad (28)$$

3. Démonstration du théorème 2

La démonstration du théorème 2 repose essentiellement sur le résultat dû à B. Gidas [6] que nous rappelons ici.

THÉORÈME . — *Supposons $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < R\}$. Soit v une solution strictement positive de $C^2(\Omega)$ du problème suivant :*

$$(B1) \quad \Delta v + g(r, v) = 0 \text{ dans } \Omega,$$

$$(B2) \quad v = 0 \text{ sur } \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| = R\},$$

g est une fonction de C^1 en u et décroissante en r . Alors $v(x)$ a une symétrie radiale et $v_r < 0$ pour $0 < r < R$.

L'idée de la démonstration consiste à chercher un changement de variable de type :

$$t = -\log r^\alpha \quad \text{et} \quad v(r, \sigma) = r^{-\delta} u(t, \sigma), \quad (29)$$

qui permet de transformer (1) et (5) en un problème de type (B). Un calcul rapide montre que :

$$u_t = -\frac{1}{\alpha} r^{\delta+2} \left(\frac{v_r}{r} + \frac{\delta v}{r^2} \right)$$

et

$$u_{tt} = -\frac{1}{\alpha^2} r^{\delta+2} \left(v_{rr} + (2\delta + 1) \frac{v_r}{r} + \frac{\delta^2 v}{r^2} \right).$$

Par conséquent (1) devient

$$\begin{aligned} v_{rr} + (2\delta + 1 - \alpha\alpha) \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\sigma\sigma}}{r^2} + \frac{v_r}{r^2} (\delta^2 - \alpha\alpha\delta - \lambda\alpha^2) + \\ + \alpha^2 r^{-(\delta+2)} f(r^\delta v) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \end{aligned} \quad (30)$$

où $\Omega = B(0, R_0)$, ou son complémentaire selon que α est strictement négatif ou strictement positif, et $R_0 = e^{-t_0/\alpha}$. Avec les deux conditions suivantes :

$$(I) \quad 2\delta - \alpha\alpha = 0,$$

$$(II) \quad \delta^2 - \alpha\alpha\delta - \lambda\alpha^2 = 0,$$

(29) devient :

$$\Delta v + \alpha^2 r^{-(\delta+2)} f(r^\delta v) = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (31)$$

Or le système (I)-(II) n'a de sens que pour $\lambda = -\alpha^2/4$. On distingue alors deux cas.

Cas 1. $\lambda = -\frac{a^2}{4}$

Cas 1.1. — $a < 0$. On choisit $\alpha > 0$ de telle façon que le changement de variable (12) transforme (1) en un problème intérieur. Par conséquent, δ est strictement négatif. Considérons ensuite la fonction g définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$g(r, v) = \alpha^2 r^{-(\delta+2)} f(r^\delta v). \quad (32)$$

Un calcul rapide montre que

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, v) = \alpha^2 r^{-(\delta+2)} (-(\delta+2)f(r^\delta v) + \delta r^\alpha v f'(r^\delta v)). \quad (33)$$

On pose $X = r^\delta v$, g est alors décroissante en r si seulement si

$$-(\delta+2)f(X) + \delta X f'(X) \leq 0 \quad \text{avec } X \geq 0. \quad (34)$$

Inégalité garantie par l'hypothèse (H6).

Cas 1.2. — $a > 0$. Cette fois on ne peut choisir $\alpha > 0$ puisque, sous l'hypothèse (H6), (34) n'est pas vérifiée en général. (1) se transforme en un problème extérieur. On introduit alors la transformation de Kelvin en dimension 2 :

$$w(y) = v\left(\frac{y}{|y|^2}\right), \quad y \in B(0, R_0). \quad (35)$$

w vérifie

$$\Delta w(y) + \alpha^2 |y|^{\delta-2} f(|y|^\delta w(y)) = 0. \quad (36)$$

On pose alors

$$g(r, w) = \alpha^2 |y|^{\delta-2} f(|y|^\delta w(y)) = 0. \quad (37)$$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial r}(r, w) = \alpha^2 r^{\delta-3} ((\delta-2)f(r^{-\delta} w) - \delta r^{-\delta} w f'(r^{-\delta} w)). \quad (38)$$

Soit $Y = r^{-\delta} w$, g est alors décroissante en r si et seulement si

$$(\delta-2)f(Y) - \delta Y f'(Y) \leq 0 \quad \text{avec } Y \geq 0. \quad (39)$$

Celle-ci est vérifiée grâce à (H6).

Cas 2. $\lambda < -\frac{a^2}{4}$

L'idée de base consiste à se ramener au cas précédent avec une nouvelle fonction f vérifiant (H6). En effet (1) peut s'écrire :

$$u_{tt} + au_t + u_{\sigma\sigma} - \frac{a^2}{4}u + \phi(t) + \left(\frac{a^2}{4} - \lambda\right)u + f(u) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \times S^1. \quad (40)$$

On introduit une nouvelle fonction \tilde{f} telle que

$$\tilde{f}(u) = \left(\frac{a^2}{4} - \lambda\right)u + f(u).$$

Avec l'expression de f , en fonction de \tilde{f} , (H6) devient :

$$\begin{aligned} \text{sign}(a) \delta_0(X\tilde{f}'(X) - \tilde{f}(X)) &\geq \\ &\geq -2f(X) + \left(\frac{a^2}{4}u + \phi(t)\right) + \left(\frac{a^2}{4} - \lambda\right)X \quad \text{avec } X \geq 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Si l'on prend $\lambda < a^2/4$, alors \tilde{f} vérifie (H6). Ceci démontre le théorème 2.

4. Théorème d'unicité

4.1 Résultats préliminaires

PROPOSITION 4.1. — *On suppose $a > 0$. Soit u une solution de (7) et (8). Alors u admet au plus un point critique $t_0 \in [0, +\infty[$ et on a*

$$u(t_0) \geq U_0. \quad (42)$$

Si de plus u est solution de (PVI) alors $u'(t) < 0$ pour tout $t > 0$.

Démonstration. — Considérons deux étapes.

Première étape. — Supposons que u admette un point critique t_0 et soit t_1 un point tel que $t_1 > t_0$. En multipliant (1) par u et intégrant sur $[t_0, t_1]$ on obtient :

$$\frac{u'(t_1)^2}{2} - \frac{u'(t_0)^2}{2} = - \int_{u_0}^{u_1} g(s) ds - a \int_{t_0}^{t_1} u'(s)^2 ds, \quad (43)$$

Sur la symétrie radiale et l'unicité de solutions d'équations elliptiques

où $u_i = u(t_i)$ avec $i = 0$ ou 1 . D'où

$$\frac{u'(t_1)^2}{2} < - \int_{u_0}^{u_1} g(s) ds. \quad (44)$$

En faisant tendre t_1 vers $+\infty$ dans (44), on obtient :

$$0 \leq - \int_{u_0}^{u_1} g(s) ds. \quad (45)$$

Ce qui équivaut à (42).

Deuxième étape. — Soit $\zeta \in [0, +\infty[$ un point critique de $u(t)$. On a

$$u''(\zeta) + g(u(\zeta)) = 0. \quad (46)$$

Comme $t_{1,2}$ est un minimum de u , on a $u''(t) \geq 0$ au voisinage de $t_{1,2}$. (46) implique alors :

$$g(u(t_{1,2})) \leq 0. \quad (47)$$

Or $u(t_{1,2})$ est différent de zéro sinon, d'après le théorème standard d'unicité locale, u serait identiquement nulle sur $[0, +\infty[$. D'où :

$$\frac{g(u(t_{1,2}))}{u(t_{1,2})} \leq 0. \quad (48)$$

D'autre part, on montre facilement en utilisant (H1) et (H2) que :

$$\frac{2G(u)}{u^2} < \frac{g(u)}{u} \quad \text{pour } u > 0. \quad (49)$$

En combinant (42), (48) et (49), on obtient une contradiction.

Remarque 4.2. — D'après la proposition 4.1, si u est une solution positive de (7) et (8) alors sa courbe admet l'une des formes suivantes.

PROPOSITION 4.2. — *Sous les hypothèses de la proposition 4.1, on a*

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{u'(t)}{u(t)} = -\beta. \quad (50)$$

D'autre part pour $\varepsilon \in [0, \beta[$, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup u(t) e^{t\sqrt{\beta-\varepsilon}} < \infty \quad (51)$$

avec

$$\beta = \frac{1 + \sqrt{1 - 4g'(0)}}{2}. \quad (52)$$

Démonstration. — On introduit la fonction z telle que $z(t) = -u'(t)/u(t)$. D'après la proposition 4.1, il existe $t_1 \in [0, +\infty[$ tel que $z(t) > 0$ pour $t \geq t_1$.

Première étape. — z est bornée au voisinage de $+\infty$. En effet, un calcul rapide montre que z vérifie :

$$z' = -\frac{u''}{u} + \frac{u'^2}{u^2} = z^2 - z + \frac{g(u)}{u}. \quad (53)$$

Considérons l'ensemble $E = \{(t, z) \mid t \geq t_1 \text{ et } z \geq 1 + \sqrt{2\lambda + 1}\}$. D'après (H1) et (H3), on a

$$z^2 - z + \frac{g(u)}{u} \geq \frac{1}{2}z^2 + \left(\frac{1}{2}z^2 - z - \lambda\right) \geq \frac{1}{2}z^2 \quad \text{dans } E. \quad (54)$$

D'où

$$z(t) \geq \frac{2}{\frac{z(t_1)}{z(t)} - (t - t_1)} \quad \text{pour } t \geq t_1. \quad (55)$$

$z(t)$ explose au bout d'un temps fini, ce qui est impossible. Par conséquent :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup z(t) \leq 1 + \sqrt{2\lambda + 1}. \quad (56)$$

Deuxième étape. — $z(t)$ admet une limite finie quand t tend vers $+\infty$. En effet d'après la première étape, il suffit de montrer que $z(t)$ est monotone pour t assez grand. Considérons z comme une fonction de u . On a

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{du} u' = -uz \frac{dz}{du}.$$

D'où l'équation

$$\frac{dz}{du} = -\frac{z^2 - z + \frac{g(u)}{u}}{uz} = H(u; z). \quad (57)$$

$z(u)$ admet un signe constant quand u devient très petit. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe une suite tendant vers zéro telle que :

$$\frac{dz}{du}(u_n) = (-1)^n \left| \frac{dz}{du}(u_n) \right| \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (58)$$

Soit $\alpha \in]0, u_0]$ un point critique de z . D'après (57) on a

$$z^2(\alpha) - z(\alpha) + \frac{g(z)}{\alpha} = 0 \quad (59)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{du^2}(\alpha) &= H_u(\alpha; z(\alpha)) + H_z(\alpha; z(\alpha)) \frac{dz}{du}(\alpha) \\ &= H_u(\alpha; z(\alpha)). \end{aligned} \quad (60)$$

Or

$$H_u(\alpha; z(\alpha)) = -\frac{g'(\alpha)u - g(u)}{u^3z} z + \frac{\left(z^2 - z + \frac{g(u)}{u}\right)}{zu^2};$$

en utilisant alors (59), on obtient :

$$\frac{d^2z}{du^2} = -\frac{g'(\alpha)\alpha - g(\alpha)}{\alpha^3z(\alpha)} < 0. \quad (61)$$

D'après (58), il existe une suite $\{u_n\}$ convergeant vers zéro telle que $z(u_n)$ soit un minimum local pour z et par conséquent

$$\frac{d^2z}{du^2}(u_n) \geq 0; \quad (62)$$

ce qui contredit (61). Ensuite comme z est bornée, la seconde étape implique que z admet une limite finie quand u tend vers zéro. Le second membre de (53) admet donc une limite finie quand t tend vers $+\infty$. D'où :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z'(t) = 0 \quad (63)$$

(sinon z ne serait plus bornée). Soit ℓ tel que $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} z(t)$. Elle vérifie l'équation $\ell^2 - \ell - g'(\alpha) = 0$. D'où :

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(4(f'(0) - \lambda))}}{2}.$$

Enfin pour avoir (51), il suffit de remarquer que d'après (50) on a pour $\varepsilon \in]0, \beta[$:

$$-\frac{u'(t)}{u(t)} \geq \beta - \varepsilon \quad \text{pour } t \text{ assez grand.} \quad (64)$$

PROPOSITION 4.3. — *Considérons deux solutions positives u et v de (PVI). On a les propriétés suivantes :*

- i) $u(t) - v(t)$ ne peut avoir qu'un nombre fini de zéros sur $[0, +\infty[$;
- ii) supposons que $t(u) - r(u) > 0$ pour u suffisamment petit, alors

$$(t(u) - r(u))' < 0 ; \quad (65)$$

- iii) supposons $u(t) > v(t)$ pour $t > T$, alors $t(u) - r(u)$ est positive décroissante sur $[0, v(T)]$.

Démonstration

Première étape. — Montrons i). Soit $\phi(t) = u(t) - v(t)$. Supposons que $\phi(\zeta) = 0$ pour un certain $\zeta \geq 0$. Si $\phi'(\zeta) = 0$ alors le théorème standard d'unicité implique que $\phi(\zeta) \equiv 0$ sur $[0, +\infty[$. D'où $\phi'(\zeta) = 0$ et les zéros de ϕ sont isolés et forment un sous-ensemble fermé de $[0, +\infty[$. S'il existe un nombre infini de zéros de ϕ , on peut les ordonner comme suit, $\zeta_1 < \zeta_2 < \dots$, et $\zeta_k \rightarrow +\infty$ quand $k \rightarrow +\infty$. Comme $u(t)$ tend vers zéro quand t tend vers l'infini, il existe \bar{k} tel que

$$u(\zeta_{\bar{k}}) < \alpha = \inf\{u \in]0, +\infty[\mid g(u) > 0\}.$$

Or d'après la proposition 1.1, on sait qu'il existe $t'_0 \in [0, +\infty[$ tel que $u(t)$ et $v(t)$ soient monotones décroissantes sur $[t'_0, +\infty[$. Soient ζ_k et $\zeta_{k+1} \in [t'_0, +\infty[$ tels que $k \geq \bar{k}$. On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (u'(t_1)^2 - v'(t_1)^2) e^{2t_1} - \frac{1}{2} (u'(t_0)^2 - v'(t_0)^2) e^{2t_2} = \\ & = \int_{u_1}^{u_0} (e^{2t(u)} - e^{2r(u)}) g(u) du, \end{aligned} \quad (66)$$

où $t_0 = \zeta_k$, $t_1 = \zeta_{k+1}$ et $t(u)$ et $r(u)$ sont les inverses de $u(t)$ et $v(t)$. Comme $u_1 = u(t_1) < u_0 = u(t_0) < \alpha$, on a $g'(u) \leq 0$. On suppose $u > v$ (l'autre cas se traite de la même façon). Donc $r(u) - t(u) < 0$ dans $]u_0, u_1[$. Le second membre de (66) est donc négatif. D'autre part, $v'(t_0) < u'(t_0) < 0$ et

$u'(t_1) < v'(t_1) < 0$. Par conséquent, le membre de droite de (66) est positif. La contradiction, qu'on vient d'obtenir, montre alors qu'il ne peut y avoir pour ϕ qu'un nombre fini de zéros.

Deuxième étape. — Montrons ii). Comme dans [4], on pose $u = e^{-w}$ et on considère la fonction $t(w) - r(w)$. Il suffit alors de montrer que $-(t-r)_w < 0$. D'après la proposition 4.3, soit $(t-r)_w$ est strictement positif, soit $(t-r)_w$ est strictement négatif. Supposons alors $(t-r)_w < 0$. Un calcul rapide montre que

$$(t-r)_{ww} + (t-r)_w + (t_w^2 - r_w^2) - e^w g(e^{-w})(t_w^3 - r_w^3) = 0. \quad (67)$$

D'où :

$$(t-r)_{ww} = - \left\{ 1 + (t_w + r_w) - e^w g(e^{-w}) \frac{(t_w^3 - r_w^3)}{(t_w + r_w)} \right\} (t-r)_w. \quad (68)$$

Quand u tend vers zéro, on a w, t et $r \rightarrow +\infty$. Et d'après la proposition 4.2, $e^w f(e^w) - \lambda, t_w$ et r_w convergent respectivement vers $f'(0) - \lambda$ et β . Par conséquent lorsque l'on fait tendre u vers 0 dans (67), le coefficient de $(t-r)_w$ est $2\beta - 1 - g'(0)(2\beta + \beta^2) > 0$. Si $(t-r)_w < 0$ alors $(t-r)_{ww} < 0$. Or pour w suffisamment petit, les trois conditions $t-r > 0, (t-r)_{ww} > 0$ et $(t-r)_{ww} > 0$ sont incompatibles puisque $(t-r)$ est définie sur un intervalle non borné supérieurement. D'où (66).

Troisième étape. — Montrons iii). Montrons que $t(u) - r(u)$ est ou bien décroissante ou bien croissante sur $[T, +\infty[$. En un point critique, on a $(t-r)_w = 0$. On en déduit, en utilisant (67), que $(t-r)_{ww} = 0$. D'après le théorème standard d'unicité locale, on a alors $t-r = 0$. Par conséquent $(t-r)$ n'admet pas de points critiques. D'après ii), $(t-r)$ est alors strictement décroissante sur $[0, v(T)]$.

PROPOSITION 4.4. — *On suppose que (H3), (H4) et (H5) sont vérifiées. Soient u et v deux solutions de (7) et (9). Si les graphes de u et de v se rencontrent en un point (T, U) , où $U > 0$, alors $U > U_0$.*

Démonstration. — Soit (T, U) le dernier point de rencontre des graphes de u et de v . On a

$$\frac{1}{2} e^{2t} u'(t)^2 - \frac{1}{2} e^{2T} u'(T)^2 = \int_{u(t)}^U e^{2t(u)} g(u) du \quad \text{pour tout } t > T. \quad (69)$$

D'après la proposition 4.2, pour chaque $\varepsilon > 0$ donné on a

$$u(t) \leq C(\varepsilon)e^{-(\beta-\varepsilon)t} \quad \text{pour } t \text{ assez grand,} \quad (70)$$

où $C(\varepsilon)$ est une constante strictement positive et β est donné par (52). En considérant la fonction inverse $t(u)$ de u , on a

$$e^{2t(u)}|g(u)| \leq C'(\varepsilon)\frac{|g(u)|}{u^\sigma} \quad \text{pour } t \text{ assez petit.} \quad (71)$$

$C'(\varepsilon)$ est une nouvelle constante positive et $\sigma = 2/(\beta - \varepsilon)$. D'autre part d'après (H4), on a $g(u)/u^\sigma \cong u^{-\sigma+1}$ proche de zéro. Par définition de β , on peut toujours choisir $\varepsilon > 0$ de telle sorte que la fonction $f(u)/u^\sigma$ soit intégrable sur tout intervalle de la forme $[0, T^*]$ avec $T^* < \infty$ (par exemple $\varepsilon_0 = (1 + \sqrt{1 + 4\lambda})/2$). L'intégrale de (69) est donc convergente lorsque t tend vers l'infini. D'autre part, d'après (52), il est clair que u' décroît aussi exponentiellement au voisinage de l'infini. Avec ε_0 déjà choisi si t tend vers l'infini dans (69), on obtient

$$\frac{1}{2} e^{2T} u'(T)^2 = - \int_0^U e^{2t(u)} g(u) du. \quad (72)$$

De la même façon, on obtient un résultat analogue pour $v(t)$. D'où :

$$\frac{1}{2} e^{2T} (v'(T)^2 - u'(T)^2) = - \int_0^U \psi(u) g(u) du, \quad (73)$$

où $\psi(u) = e^{2t(u)} - e^{2r(u)}$. On suppose que $u > v$ pour $t > T$. Alors, on a $v'(T) < u'(T) < 0$, d'où $v'(T)^2 > u'(T)^2$. Il en découle que $\int_0^U \psi(u) g(u) du > 0$. Or la proposition 4.3, implique que $t(u) - r(u)$ est positive et strictement décroissante pour $u \in]0, U[$. Donc $\psi(u) > 0$ sur $]0, U[$ et $\psi'(u) = 2\{e^{2t}(t - r') + (e^{2t} - e^{2r})r'\} < 0$.

Supposons par l'absurde que $U \leq \beta$. Alors $G(U) \leq 0$. D'autre part, on a

$$\lim_{u \rightarrow 0 \text{ ou } U} \psi(u)G(u) = 0. \quad (74)$$

Donc

$$0 \leq \int_0^U \psi(u)g(u) du = - \int_0^U \psi'(u)G(u) du \leq 0.,$$

ce qui est impossible.

4.2 Démonstration du théorème d'unicité

D'après la proposition 4.4, il suffit de montrer que les graphes de u et de v ne se rencontrent pas au-dessus de la droite $U = U_0$.

On raisonne par l'absurde. Soit (U, T) le dernier point de rencontre des graphes de u et de v . On introduit les mêmes notations que dans [4] (démonstration du théorème 2). Soit ε assez petit pour que $\beta + \varepsilon < U$. Puisque u est décroissante, il existe un nombre réel unique $\zeta > T$ tel que $u(\zeta) = \beta + \varepsilon$. On a alors $u(\zeta) < v(\zeta)$. Posons $\bar{u} = u - (\beta + \varepsilon)$, $\bar{v} = v - (\beta + \varepsilon)$ et soit $\eta = \inf\{\tau > 0 \mid \tau\bar{v} > \bar{u} \text{ sur } [0, \zeta]\}$.

Puisque $\bar{u} > \bar{v}$ dans un voisinage à gauche de T , on a $\eta > 1$. En effet dans le cas contraire, par définition de la borne inférieure, il existerait une suite (τ_n) tendant vers 1 telle que $\bar{u} < \tau_n\bar{v}$. Quand n tend vers l'infini on obtient $\bar{u} \leq \bar{v}$, ce qui est impossible. Ensuite posons $z = \eta\bar{v} - \bar{u}$. Alors $z \geq 0$ sur $[t, \zeta]$. En plus, il existe $t_0 \in [0, \zeta]$ tel que $z(t_0) = 0$. En effet, soit $\gamma = \sup z(t)$ sur $[0, \zeta]$. Comme z est continue sur $[0, \zeta]$, il existe $\xi \in [0, \zeta]$ tel que $\gamma = z(\xi)$. Si $\gamma > 0$, en choisissant

$$\tau = \frac{\eta\bar{v}(0) + \frac{1}{2}\gamma}{\bar{v}(0)},$$

on montre facilement que $\bar{u} < \tau\bar{v} < \eta\bar{v}$. Ceci contredit la définition de la borne inférieure. De plus par définition de ζ , on a $t_0 \neq \zeta$. Par conséquent

$$z''(t_0) + az'(t_0) \geq 0 \quad (75)$$

et, en utilisant (7), on obtient :

$$\eta g(\bar{v}(t_0) + U_0 + \varepsilon) \leq g(\bar{u}(t_0) + U_0 + \varepsilon). \quad (76)$$

Puisque $z(t_0) = 0$, on peut écrire

$$\frac{g(\bar{v}(t_0) + U_0 + \varepsilon)}{\bar{v}(t_0)} \leq \frac{g(\bar{u}(t_0) + U_0 + \varepsilon)}{\bar{u}(t_0)}. \quad (77)$$

Comme $U > U_0$, on a $u(0) > U_0$. D'après (H6) :

$$\frac{g(u)}{u - (U_0 + \varepsilon)}$$

est strictement décroissante sur $]U_0 + \varepsilon, u(0)[$. D'où :

$$\frac{g(s)}{s - (U_0 + \varepsilon)} > \frac{g(t)}{t - (U_0 + \varepsilon)} \quad \text{pour } U_0 + \varepsilon < s < t < u(0). \quad (78)$$

Si l'on pose $s = \bar{v}(\eta) + U_0 + \varepsilon$ et $t = \bar{u}(\eta) + U_0 + \varepsilon$, on obtient une contradiction avec (77).

Références

- [1] BIDAUT-VERON (M.- F.) et BOUHAR (M.) .— *On characterization of some nonlinear differential equations and applications*, Siam J. of Math Analysis, **25** (1994), pp. 859-875.
- [2] BOUHAR (M.) .— *Comportement limite de solutions d'équations semi-linéaires dans des cylindres infinis*, Ph. D. Thesis, Uni. Tours (1991).
- [3] BOUHAR (M.) et VÉRON (L.) .— *Integral representation of solutions of semilinear elliptic systems in cylinders and applications*, Nonlinear Analysis, **23** (1994), pp. 275-296.
- [4] PELETIER (L. A.) et SERRIN (J.) .— *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in \mathbb{R}^N* , Arch. Rational Mechanics Anal. **81** (1983), pp. 181-197.
- [5] VERON (L.) .— *Geometric invariance of singular solutions of some nonlinear partial differential equations*, Indiana Univ. Math. J. (in press).
- [6] GIDAS (B.) .— *Symmetry properties and isolated singularities of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering and Applied Science; edited by R. Sternberg, A. Kalinowski and J. Papadakis, Marcel Dekker, New-York 1980.