

LAURENT DESVILLETES

**Sur un modèle de type Borgnakke-Larsen conduisant  
à des lois d'énergie non linéaires en température  
pour les gaz parfaits polyatomiques**

*Annales de la faculté des sciences de Toulouse 6<sup>e</sup> série*, tome 6, n<sup>o</sup> 2  
(1997), p. 257-262

[http://www.numdam.org/item?id=AFST\\_1997\\_6\\_6\\_2\\_257\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AFST_1997_6_6_2_257_0)

© Université Paul Sabatier, 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de la faculté des sciences de Toulouse » (<http://picard.ups-tlse.fr/~annaes/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Sur un modèle de type Borgnakke–Larsen conduisant à des lois d'énergie non linéaires en température pour les gaz parfaits polyatomiques<sup>(\*)</sup>

LAURENT DESVILLETES<sup>(1)</sup>

---

**RÉSUMÉ.** — Nous généralisons la classe de modèles de type Borgnakke–Larsen introduits dans [1] pour obtenir une expression de l'énergie interne d'un gaz parfait qui soit aussi générale que possible.

**ABSTRACT.** — We generalize in this work the class of models of interval energy for the Boltzmann equation (of Borgnakke–Larsen type) introduced in [1]. This allows us to obtain at the level of the macroscopic limit a wide class of laws of internal energy.

---

## 1. Introduction

Les problèmes de rentrée dans la haute atmosphère de véhicules spatiaux ont conduit à l'étude, en particulier numérique, de l'équation de Boltzmann (cf. [3], [4], [5]) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f = Q(f), \quad (1.1)$$

où  $f(t, x, v)$  est la densité de particules qui au temps  $t$  et au point  $x$  possèdent la vitesse  $v$ , et  $Q$  est un noyau de collision quadratique qui vérifie le théorème H de Boltzmann :

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} Q(f)(v) \log f(v) \, dv \leq 0. \quad (1.2)$$

---

(\*) Reçu le 13 juin 1995

(1) Université d'Orléans, Département de Mathématiques, B.P. 6759, F-45067 Orléans Cedex 2 (France)

Dans des simulations réalistes, cette modélisation s'avère néanmoins insuffisante et il faut introduire les degrés d'énergie interne dus au fait que  $O_2$  et  $N_2$  sont des molécules diatomiques.

Les modèles de Boltzmann correspondants, même s'ils ne décrivent pas forcément le détail des processus physiques, doivent permettre de récupérer à la limite macroscopique des lois d'énergie interne autres que la loi des gaz parfaits monoatomiques :

$$e = \frac{3}{2} \rho T, \quad (1.3)$$

où  $e$  est l'énergie interne,  $\rho$  la densité et  $T$  la température du gaz.

De plus, on souhaite dans une telle modélisation n'introduire qu'un seul paramètre supplémentaire, l'énergie interne  $I^2 \in \mathbb{R}_+$  d'une molécule, ce qui permet de ne pas surcharger la capacité-mémoire des ordinateurs, et de garder des temps de calcul raisonnables.

Enfin, on veut un modèle pour lequel on puisse démontrer rigoureusement un analogue du théorème H (1.2).

Ce programme a été mis en œuvre dans [1] pour le cas particulier où la loi d'énergie interne du gaz est linéaire en  $T$  :

$$e = \alpha \rho T, \quad (1.4)$$

avec  $\alpha > 3/2$ .

Nous proposons dans cette note un modèle qui généralise celui de [1] et permet, tout en satisfaisant aux contraintes énoncées précédemment, d'obtenir à la limite macroscopique des lois d'énergie de la forme

$$e = \rho \Phi(t) \quad (1.5)$$

pour des  $\Phi > 0$  arbitraires.

## 2. Description du modèle

Le mécanisme de collision est celui de [1], et est basé sur la procédure proposée par Borgnakke et Larsen [2].

Sur un modèle de type Borgnakke–Larsen conduisant à des lois d'énergie non linéaires

Les vitesses et énergies internes  $v, v_*, v', v'_*$  des particules après une collision sont liées aux quantités correspondantes avant la collision grâce aux équations suivantes :

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{4} |v - v_*|^2 + I^2 + I_*^2 \quad (2.1)$$

$$v' = \frac{v + v_*}{2} + R\varepsilon |v - v_*|^{-1} \{v - v_* - 2\omega \cdot (v - v_*)\omega\} \quad (2.2)$$

$$v'_* = \frac{v + v_*}{2} - R\varepsilon |v - v_*|^{-1} \{v - v_* - 2\omega \cdot (v - v_*)\omega\} \quad (2.3)$$

$$I'^2 = r(1 - R^2)\varepsilon^2 \quad (2.4)$$

$$I_*'^2 = (1 - r)(1 - R^2)\varepsilon^2 \quad (2.5)$$

et  $\omega \in S^2$ ,  $r, R \in [0, 1]$ .

Le noyau de Boltzmann correspondant prend alors la forme

$$\begin{aligned} Q(f)(v, I) &= \\ &= \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} \int_{\omega \in S^2} \iint_{r, R \in [0, 1]} \{f(v', I')f(v'_*, I'_*) - f(v, I)f(v_*, I_*)\} \times \\ &\quad \times B(v, v_*, I, I_*, \omega, r, R)R(1 - R^2) dR dr d\omega \frac{I}{\phi(I)} I_* dv_* \end{aligned} \quad (2.6)$$

et

$$\begin{aligned} B(v, v_*, I, I_*, \omega, r, R) &= \\ &= \tilde{B} \left( \varepsilon, R|v - v_*|, R|(v - v_*) \cdot \omega|, I^2 r(1 - R^2), \right. \\ &\quad \left. I_*^2(1 - r)(1 - R^2), (I^2 + I_*^2)(1 - R^2) \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

La fonction  $\phi$  peut être choisie arbitrairement, elle est liée à la loi d'énergie (1.5) par une relation que nous explicitons en (4.3)-(4.6).

### 3. Théorème H

Nous démontrons ici l'analogie pour notre modèle du théorème H de Boltzmann pour les gaz monoatomiques décrit en (1.2). La mesure  $dv$  est remplacée par  $\phi(I) dI dv$ . On peut écrire la propriété suivante.

THÉORÈME 1. — Pour toute fonction  $f(v, I) > 0$  pour laquelle les intégrales ont un sens, on a

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) \log f(v, I) \phi(I) dI dv \leq 0 \quad (3.1)$$

et

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) \begin{pmatrix} 1 \\ v_i \\ |v|^2/2 + I^2 \end{pmatrix} \phi(I) dI dv = 0. \quad (3.2)$$

De plus, (si  $B > 0$  p.p.)

$$\int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) \log f(v, I) \phi(I) dI dv = 0 \quad (3.3)$$

si et seulement si  $f(v, I)$  est une fonction maxwellienne.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la propriété suivante.

THÉORÈME 2. — Pour toute fonction  $f(v, I) > 0$  et toute fonction  $q(v, I)$  pour lesquelles les intégrales ont un sens, on a

$$\begin{aligned} & \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} Q(f)(v, I) q(v, I) \phi(I) dI dv = \\ & = \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} \int_{v_* \in \mathbb{R}^3} \int_{I_* \in \mathbb{R}_+} \int_{\omega \in S^2} \iint_{r, R \in [0, 1]} \times \\ & \quad \times \{f(v', I') f(v'_*, I'_*) - f(v, I) f(v_*, I_*)\} \times \\ & \quad \times \{q(v, I) + q(v_*, I_*) - q(v', I') - q(v'_*, I'_*)\} \times \\ & \quad \times BR^2(1 - R^2) dR dr d\omega II_* dI dI_* dv dv_* . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Ce théorème est lui-même une conséquence de la propriété suivante.

THÉORÈME 3. — Si l'on définit  $R'$  et  $r'$  dans  $[0, 1]$  en posant

$$I^2 + I_*^2 = (1 - R'^2)\varepsilon^2 \quad (3.5)$$

$$I^2 = r'(1 - R'^2)\varepsilon^2 \quad (3.6)$$

par symétrie avec (2.4) et (2.5), alors on a l'invariance de mesure suivante :

$$\begin{aligned} & dv dv_* II_* dI dI_* dr R^2(1 - R^2) dR d\omega = \\ & = dv' dv'_* I' I'_* dI' dI'_* dr' R'^2(1 - R'^2) dR' d\omega . \end{aligned} \quad (3.7)$$

Sur un modèle de type Borgnakke–Larsen conduisant à des lois d'énergie non linéaires

De plus,

$$B(v, v_*, I, I_*, \omega, r, R) = B(v', v'_*, I', I'_*, \omega, r', R'). \quad (3.8)$$

Le théorème 3 est une conséquence simple de l'équation (15) de [1].

#### 4. La loi d'énergie

L'équation d'Euler associée au modèle dont le noyau de collision est donné par (2.7) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} f(t, x, v, I) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2/2 + I^2 \end{pmatrix} \phi(I) dI dv + \\ + \operatorname{div}_x \int_{v \in \mathbb{R}^3} \int_{I \in \mathbb{R}_+} f(t, x, v, I) \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2/2 + I^2 \end{pmatrix} v \phi(I) dI dv = 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

La loi d'énergie s'écrit alors

$$e = \rho \Phi(T), \quad (4.2)$$

et  $\Phi$  est reliée à  $\phi$  par la formule

$$\Phi(t) = \frac{3}{2} T + \frac{\int_{I \in \mathbb{R}_+} \phi(I) I^2 e^{-I^2/T} dI}{\int_{I \in \mathbb{R}_+} \phi(I) e^{-I^2/T} dI}. \quad (4.3)$$

La fonction  $\Phi$  étant en fait celle qui est mesurée expérimentalement, il est important de pouvoir inverser la formule (4.3). On peut en fait écrire

$$\phi(x) = \sqrt{x} Lg(x), \quad (4.4)$$

où  $L$  est la transformée de Laplace inverse, et

$$g(x) = \exp h(x), \quad (4.5)$$

où  $h$  est une primitive de

$$\tau \longrightarrow \frac{3}{2\tau} - \Phi\left(\frac{1}{\tau}\right). \quad (4.6)$$

## Références

- [1] BOURGAT (J.-F.), DESVILLETES (L.), LE TALLEC (P.) et PERTHAME (B.) .— *Microreversible Collisions for Polyatomic Gases and Boltzmann's Theorem*, Eur. J. Mech., B/Fluids, **13**, n° 2 (1994), pp. 237-254.
- [2] BORGNAKKE (C.) et LARSEN (P. S.) .— *Statistical collision model for Monte Carlo simulation of polyatomic gas mixtures*, J. Comp. Phys. **18** (1975), pp. 405-420.
- [3] CERCIGNANI (C.) .— *The Boltzmann equation and its applications*, Springer Verlag, Berlin (1988).
- [4] CHAPMAN (S.) et COWLING (T. G.) .— *The mathematical theory of non-uniform gases*, Cambridge Univ. Press, London (1952).
- [5] TRUESDELL (C.) et MUNCASTER (R.) .— *Fundamentals of Maxwell kinetic theory of a simple monoatomic gas*, Acad. Press, New-York (1980).