ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

S. KICHENASSAMY

La relativité générale, extension nécessaire de la relativité restreinte

Annales de l'I. H. P., section A, tome 4, nº 2 (1966), p. 139-158
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1966__4_2_139_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. IV, n° 2, 1966, p. 139-158. *Physique théorique.*

La Relativité générale, extension nécessaire de la Relativité restreinte

par

S. KICHENASSAMY
(Institut Henri Poincaré, Paris).

1. INTRODUCTION

Nous nous proposons d'analyser ici le grand courant qui va de la Mécanique newtonienne à la Relativité générale et de montrer dans le cadre des idées *classiques* :

a) que la Relativité générale est nécessaire à l'étude rigoureuse des phénomènes physiques,
b) que si, selon V. Fock, elle ne généralise pas une certaine conception du principe de relativité, elle étend la Relativité restreinte dans un sens où celle-ci étend la Mécanique newtonienne,
c) que l'interprétation physique de la Relativité générale nécessite certains compléments suggérés par nous-même, il y a trois ans [*1*].

2. SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE. ESPACE ET TEMPS

Cette analyse part de l'idée que dans toute théorie physique classique, l'élément primitif est l'événement ([1]) et non l'espace ou le temps. Or, l'événement suppose le système de référence S par rapport auquel il existe;

([1]) Ce point de vue semble avoir été considéré pour la première fois par Alfred A. Robb [*2*] et ensuite par A. D. Fokker [*3*].

S est déterminé par un observateur O situé à l'origine de ce système et susceptible :

a) de localiser tout événement dans une direction déterminée par rapport à trois axes $(\vec{e}_i)$ donnés *a priori*,

b) d'attribuer à toute paire d'événements (A, B) une durée t_{AB} et une longueur l_{AB} au moyen d'appareils de mesure $\{\mathcal{A}\}$ standard, c'est-à-dire des appareils de mesure qui, au repos et en coïncidence, ont même comportement. Une discussion opérationnelle des procédés de mesure ne peut être abordée ici.

L'ensemble des durées qui séparent les événements repérés par O détermine le temps t de S et l'ensemble des événements repérés au même instant t_0 détermine l'espace Σ_{t_0} de S à l'instant t_0 (remarquons que nous disons repérés et non observés pour indiquer qu'il s'agit en fait d'établir une carte). Si Σ_t se trouve être indépendant de l'instant t considéré, nous dirons que Σ_t est l'espace Σ de S. On peut alors parler du repérage des événements dans Σ au moyen de trois coordonnées x^i ; la distance l_{AB} de deux événements (A, B) est alors une fonction donnée des coordonnées x^i_A et x^i_B. (Σ, t) détermine l'espace-temps de S.

Un système de référence est dit *local* s'il ne repère que des événements situés au voisinage d'un événement donné; il est *global* s'il repère tous les événements possibles.

3. SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE AU REPOS RELATIF

Un système de référence $\overline{S}$ est au repos par rapport à S si $\overline{O}$ est fixe par rapport à O, c'est-à-dire si $O\overline{O}$ est conservé en direction et en grandeur lorsque t varie.

Deux systèmes de référence S et $\overline{S}$ au repos relatif sont équivalents pour la détermination de l'espace et du temps si :

a) leur espace est indépendant du temps,

b) leurs appareils de mesure standard sont équivalents :

$$\{\overline{\mathcal{A}}/\overline{S}\} \sim \{\mathcal{A}/S\} \tag{3.1}$$

ce qui signifie que les appareils $\{\overline{\mathcal{A}}\}$ ont par rapport à $\overline{S}$ le même comportement que $\{\mathcal{A}\}$ par rapport à S, *c)* les durées et distances qui séparent par rapport à S et $\bar{S}$ deux événements arbitraires (A, B) sont égales :

$$\bar{t}_{AB} = t_{AB} \qquad \bar{l}_{AB} = l_{AB} \tag{3.2}$$

d) les axes de référence $(\vec{\bar{e}}_i)$ et $(\vec{e}_i)$ peuvent être amenés en coïncidence par transport suivant une loi donnée, quel que soit le chemin suivi pour effectuer ce transport.

Dans ces conditions, $\bar{t}$ se déduit de t par :

$$\bar{t} = t + t_0 \tag{3.3}$$

et $\bar{\Sigma}$ peut être appliqué sur Σ par un déplacement euclidien.

4. SYSTÈME D'INERTIE

L'ensemble des systèmes de référence au repos relatif et équivalents permet de définir un système d'inertie S dont le temps t et l'espace Σ sont le temps et l'espace communs à ces systèmes. Le caractère local ou global de S dépend du fait que les événements repérés par S représentent une partie ou la totalité des événements possibles.

Le temps t peut être repéré en divers points de Σ par des horloges standard, pourvu que leurs indications soient synchronisées par un procédé physique, ce que nous supposons dans la suite. Posons $x^0 = ct$ (c = constante arbitraire), Σ est un espace euclidien à trois dimensions qui peut être rapporté à des coordonnées cartésiennes (x^i).

Un tel système d'inertie S n'est source d'aucune action sur les corps en présence, de telle sorte qu'un point matériel libre est animé par rapport à S d'un mouvement rectiligne et uniforme (principe d'inertie).

5. SYSTÈMES D'INERTIE EN TRANSLATION UNIFORME RELATIVE

Considérons deux systèmes d'inertie S et S′ repérant les événements au moyen des coordonnées cartésiennes (x^α) et $(x^{\alpha'})$. Soit $(\beta^i)_t$ la vitesse à l'instant t de $O' \in S'$ par rapport à S et $(\beta^{i'})_{t'}$ la vitesse relative (S/S′) à l'instant t'. S′ (resp. S) est en translation uniforme par rapport à S (resp. S′)

lorsque β^i (resp. $\beta^{i'}$) est invariable en grandeur et en direction au cours du temps.

Proposons-nous de chercher la relation qui lie les coordonnées d'un même événement par rapport à S et S' :

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^\sigma, \beta^i) \tag{5.1}$$

$$\text{dét}\,|a^{\alpha'}{}_\beta| \neq 0 \qquad a^{\alpha'}{}_\beta = \partial x^{\alpha'}/\partial x^\beta \tag{5.2}$$

On démontre [4, 5, 6] alors, du fait que tout point matériel libre est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme par rapport à S et S', que l'on a :

$$\partial_\lambda a^{\alpha'}{}_\mu = a^{\alpha'}{}_\lambda \varphi_\mu + a^{\alpha'}{}_\mu \varphi_\lambda \tag{5.3}$$

où φ_α sont quatre fonctions arbitraires des (x^α). Les relations (5.1) ne sont donc pas nécessairement linéaires.

6. SYSTÈMES D'INERTIE ET MÉCANIQUE NEWTONIENNE

En Mécanique newtonienne, on postule :

a) que tous les systèmes de référence possibles sont des systèmes d'inertie globaux,

b) que ces systèmes d'inertie (S, S'...) sont équivalents pour la détermination de l'espace et du temps, c'est-à-dire essentiellement :

$$\{\mathcal{A}'/S'\} \sim \{\mathcal{A}/S\} \tag{6.1}$$

et :

$$t'_{AB} = t_{AB} \qquad l'_{AB} = l_{AB} \tag{6.2}$$

Dès lors, (5.1) se réduit à :

$$x^{0'} = x^0 + b^{0'} \qquad x^{i'} = a^{i'}{}_\sigma x^\sigma + b^{i'} \qquad a^{i'}{}_\alpha = \text{const.} \tag{6.3}$$

Ces relations qui traduisent le passage de S à S' forment un groupe, le groupe de Galilée. En raison de (6.1) et (6.2), elles peuvent être également interprétées comme un changement d'origine des temps et une application dépendant du temps d'un espace euclidien sur lui-même. Les phénomènes physiques se présentent alors comme évoluant par rapport à un temps absolu (valable pour tous les observateurs) sur une scène constituée par l'espace absolu. La covariance des lois de la Mécanique par le groupe de Galilée traduit, compte tenu de (6.1), le principe de relativité de la Mécanique newtonienne.

7. SYSTÈMES D'INERTIE ET RELATIVITÉ RESTREINTE

A la suite des échecs des tentatives de mise en évidence de l'espace absolu et de la critique de la notion de simultanéité à distance, on postule en Relativité restreinte :

a) que tous les systèmes de référence possibles sont des systèmes globaux d'inertie munis d'appareils de mesure standard équivalents :

$$\{\mathcal{A}'/S'\} \sim \{\mathcal{A}/S\} \tag{7.1}$$

b) que la lumière se propage de manière isotrope et à vitesse constante c par rapport à tout système d'inertie :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = 0 \rightarrow ds'^2 = \eta_{\alpha'\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'} = 0 \tag{7.2}$$

$$\eta_{\alpha 0} = \delta_{\alpha 0} \qquad \eta_{ij} = -\delta_{ij} \tag{7.3}$$

On démontre alors sous certaines hypothèses de continuité :

a) que :

$$ds'^2 = \Lambda^2(x^\alpha, \beta^i)ds^2 \tag{7.4}$$

b) que, compte tenu de (5.3) :

$$\partial_\lambda a^{\alpha'}{}_\mu = 0 \qquad \partial_\lambda \log \Lambda = 0 \tag{7.5}$$

c) que :

$$\beta'^2 = \beta^2 \rightarrow \Lambda^2(\beta^i) = 1 \rightarrow ds'^2 = ds^2 \tag{7.6}$$

sans faire état sous une forme quelconque, du principe de réciprocité [*6*].

Dès lors, (7.1) et (7.6) permettent d'interpréter le passage de S à S' au moyen d'une transformation de Lorentz (active) :

$$x^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\sigma x^\sigma + b^{\alpha'} \qquad a^{\alpha'}{}_\beta = \text{const.} \tag{7.7}$$

comme réalisant une transformation orthogonale (passive) de l'espace-temps de Minkowski M_4 muni de la métrique $ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta$.

La covariance des lois physiques par le groupe de Lorentz traduit compte tenu de (7.1) le principe de relativité de la Physique de la Relativité restreinte. Signalons d'ailleurs que le groupe de Lorentz se réduit au groupe de Galilée pour des vitesses faibles ($\beta^2 \ll 1$) et pour les domaines d'espace-temps petits ($\beta_i x^i \ll x^0$).

Ainsi, en raison de (7.1) et (7.6), l'espace-temps de Minkowski devient la scène absolue dans laquelle se présentent les phénomènes physiques, tandis que l'espace et le temps perdent leur caractère absolu. La Relativité restreinte rend donc relatifs l'espace et le temps, mais laisse absolu l'espace-temps.

8. SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ACCÉLÉRÉS ET MÉCANIQUE NEWTONIENNE

Soit S_0' un système de référence accéléré par rapport à un système de référence S; cela signifie que OO_0' varie en grandeur et en direction lorsque t varie. Le problème qui se pose est de savoir si malgré les accélérations subies, les appareils de mesure standard $\{\mathcal{A}_0'\}$ ont par rapport à S_0' un comportement équivalent à celui de $\{\mathcal{A}/S\}$.

La Mécanique newtonienne y répond par l'affirmative :

$$\{\mathcal{A}_0'/S_0'\} \sim \{\mathcal{A}/S\} \tag{8.1}$$

et admet que S_0' est un système d'inertie tout comme S.

9. SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ACCÉLÉRÉS ET RELATIVITÉ RESTREINTE

Dans cette théorie, la réponse varie suivant les auteurs.

a) S_0' est un système local d'inertie [7].

(8.1) est satisfait au voisinage de l'instant-point x_0^α où l'on considère le système entraîné S_0' (S = système d'inertie); le voisinage U_0' de l'espace-temps considéré par S_0' se déduit d'un voisinage $\bar{U}$ de l'espace-temps de Minkowski, par une transformation de Lorentz f_0. Cependant, l'ensemble des voisinages U_i' considérés par le système entraîné en divers instants-points de la trajectoire spatio-temporelle de O_0'/S se déduisant de $\bar{U}$ par des transformations de Lorentz f_i différentes, fournit un recouvrement, non plus de l'espace-temps de Minkowski, mais d'une variété différentiable dont l'espace tangent est minkowskien. Ce même genre de difficulté existe d'ailleurs déjà en Mécanique newtonienne.

b) S'_0 n'est pas un système d'inertie.

Cela signifie que les appareils de mesure ainsi que les phénomènes physiques se trouvent modifiés par les accélérations subies. Ce point de vue, bien que jamais explicitement admis, se trouve chez bon nombre de classiques de la Relativité, ne serait-ce que lors de la résolution du « paradoxe des horloges ». Nous allons maintenant indiquer ce que l'étude des mouvements uniformément accélérés ou suraccélérés apporte en faveur de ce point de vue.

10. MOUVEMENTS UNIFORMÉMENT ACCÉLÉRÉS OU SURACCÉLÉRÉS

Cette étude, bien que pouvant être développée dans un cadre plus large [*8*, *9*], est faite en supposant que le système de référence S de l'observateur O est associé à un voisinage $\overline{U}$ de l'espace-temps de Minkowski muni de la métrique :

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \tag{10.1}$$

Par rapport à S, un mobile M a la vitesse :

$$u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{ds} \qquad u^\alpha u_\alpha = 1 \tag{10.2}$$

l'accélération :

$$\gamma^\alpha = u^\sigma \nabla_\sigma u^\alpha = \frac{\nabla}{ds} u^\alpha = a n^\alpha \qquad n^\alpha u_\alpha = 0 \qquad n^\alpha n_\alpha = -1 \tag{10.3}$$

la suraccélération :

$$\sigma^\alpha = \frac{\nabla}{ds}\gamma^\alpha = a(a u^\alpha + b b^\alpha) + \frac{\nabla a}{ds} n^\alpha \qquad b^\alpha u_\alpha = b^\alpha n_\alpha = 0 \qquad b^\alpha b_\alpha = -1 \tag{10.4}$$

et l'hyperaccélération :

(10.5)

$$\pi^\alpha = \frac{\nabla}{ds}\sigma^\alpha = 3a\frac{\nabla a}{ds}u^\alpha + \left[\frac{\nabla}{ds}\frac{\nabla a}{ds} + a(a^2 - b^2)\right] n^\alpha + \left(a\frac{\nabla b}{ds} + 2b\frac{\nabla a}{ds}\right) b^\alpha + abc c^\alpha$$

$$c^\alpha u_\alpha = c^\alpha n_\alpha = c^\alpha b_\alpha = 0 \qquad c^\alpha c_\alpha = -1$$

n^α, b^α, c^α sont respectivement les première, deuxième et troisième normales.

Soit S'_0 le système de référence instantanément lié à M (au point $x^\alpha = x_0^\alpha$), associé à un voisinage U'_0 d'une variété V_4 difféomorphe à M_4 munie de la métrique :

$$ds'^2 = g_{\alpha'\beta'} dx^{\alpha'} dx^{\beta'} \tag{10.6}$$

$$x^{\alpha'} = 0 \text{ correspondant à } x^\alpha = x_0^\alpha \tag{10.7}$$

ds^2 et ds'^2 n'étant *a priori* liés par aucune relation.

La vitesse $u^{\alpha'}$, l'accélération $\gamma^{\alpha'}$, la suraccélération $\sigma^{\alpha'}$ et l'hyperaccélération $\pi^{\alpha'}$ de M par rapport à S'_0 sont formellement définies comme en (10.2-10.5). Soit :

$$dx^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\sigma dx^\sigma \tag{10.8}$$

l'application qui permet de passer de $\overline{U}$ à U'_0. On a :

(10.9)

$$u^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\sigma u^\sigma \frac{ds}{ds'}$$

$$\gamma^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\sigma \left[\gamma^\sigma \left(\frac{ds}{ds'}\right)^2 + u^\sigma \frac{d^2s}{ds'^2}\right]$$

$$\sigma^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\lambda \left\{ \sigma^\lambda \left(\frac{ds}{ds'}\right)^3 + 3\gamma^\lambda \frac{d^2s}{ds'^2}\frac{ds}{ds'} + u^\lambda \frac{d^3s}{ds'^3} \right\}$$

$$\pi^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\lambda \left\{ \pi^\lambda \left(\frac{ds}{ds'}\right)^4 + 6\sigma^\lambda \left(\frac{d^2s}{ds'^2}\right)\left(\frac{ds}{ds'}\right)^2 + \gamma^\lambda \left[4\frac{d^3s}{ds'^3}\frac{ds}{ds'} + 3\left(\frac{d^2s}{ds'^2}\right)^2\right] + u^\lambda \frac{d^4s}{ds'^4} \right\}$$

Nous proposons de définir :

a) le mouvement uniformément accéléré par :

$$\sigma^{\alpha'} = \lambda u^{\alpha'} \qquad (u^{i'} = 0) \tag{10.10}$$

Cette définition est conforme à celle qui est connue dans la littérature [*10*], à cela près que S'_0 n'est pas assimilé à un système d'inertie, *a priori* ;

b) le mouvement uniformément suraccéléré par :

$$\pi^{\alpha'} = \mu u^{\alpha'} \qquad (u^{i'} = 0) \tag{10.11}$$

On montre alors :

i) que la définition (10.10) est covariante [*8*] par le groupe des transformations (10.8) :

ia) telles que :

$$ds'^2 = ds^2 \tag{10.12}$$

c'est-à-dire par le groupe de Lorentz,

ib) ou telles que :

(10.13) $$ds'^2 = \Lambda^2(x^\alpha)ds^2$$

c'est-à-dire par le groupe conforme.

ii) que la définition (10.11) admet également comme groupes d'invariance, le groupe de Lorentz et le groupe conforme [9].

11. LIEN ENTRE LE TEMPS PROPRE ET L'ACCÉLÉRATION LORS DES MOUVEMENTS SURACCÉLÉRÉS

Nous allons maintenant montrer pourquoi il ne semble pas admissible de considérer comme seul groupe d'invariance de ces mouvements, le groupe de Lorentz.

(10.11) donne par rapport à S'_0 (avec des coordonnées géodésiques d'origine $x^{\alpha'} = 0$) :

(11.1) $$a'b'c' = 0$$

(11.2) $$a'\frac{db'}{ds'} + 2b'\frac{da'}{ds'} = 0$$

(11.3) $$\frac{d^2a'}{ds'^2} + a'(a'^2 - b'^2) = 0$$

Si l'on exclut les cas particuliers où $a' = 0$, $b' = 0$, on a :

(11.4) $$c' = 0 \qquad a'^2b' = k = \text{const.}$$

et :

(11.5) $$s' = p^{-1}(\mathrm{A}') = \int_{\mathrm{A}'}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{4u^3 - hu - k^2}}$$

avec :

(11.6) $$\mathrm{A}' = -\frac{a'^2}{2} \qquad h/2 = \left(\frac{da'}{ds'}\right)^2 + k^2a'^2 + \frac{1}{2}a'^4 = \text{const.}$$

On supposera également que s' est une fonction monotone de A', soit :

(11.7) $$27k^4 - h^3 \geqslant 0.$$

Comme la *magnitude a^2 de l'accélération ne peut être mesurée par rapport à S'_0 par des mesures de vitesse*, nous proposons d'interpréter (11.5) comme fournissant cette grandeur par l'intermédiaire de la mesure du temps propre au moyen d'une horloge standard entraînée (dont le comportement cesse d'être standard : $\{\mathcal{A}'_0/S'_0 \nsim \mathcal{A}/S\}$). S'_0 n'est pas dans ces conditions un système local dxinertie.

Une relation du type (11.5) existe également entre le temps propre s et la magnitude a^2 de l'accélération par rapport au système d'inertie S, mais elle ne saurait être interprétée de la même manière, puisque l'horloge standard de S ne subit aucune accélération.

12. GROUPE CONFORME $\mathcal{C}_0$ ET NATURE DE S'_0

Nous allons maintenant montrer que S'_0 ne peut être associé à un voisinage $\overline{U}$ de M_4, contrairement à une opinion communément répandue [*10, 11*], lorsque l'on passe de S à S'_0 par une transformation du groupe conforme $\mathcal{C}_0$.

Ce groupe est isomorphe au groupe des transformations supposées *intégrables* :

$$(12.1) \qquad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^{\sigma}) \qquad \text{dét}\,|a^{\alpha'}{}_{\beta}| = \text{dét}\,|\partial x^{\alpha'}/\partial x^{\beta}| \neq 0$$

telles qu'à l'intervalle élémentaire :

$$(12.2) \qquad ds^2 = \eta_{\alpha\beta}dx^{\alpha}dx^{\beta}$$

corresponde :

$$(12.3) \qquad ds'^2 = \eta_{\alpha'\beta'}dx^{\alpha'}dx^{\beta'} = \Lambda^2(x^{\alpha})d^{12}$$

On en déduit :

$$(12.4) \qquad \partial_{\lambda}a^{\alpha'}{}_{\mu} = a^{\alpha'}{}_{\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}(\delta^{\sigma}_{\lambda}\varphi_{\mu} + \delta^{\sigma}_{\mu}\varphi_{\lambda} - \eta_{\lambda\mu}\varphi^{\sigma})$$

où :

$$(12.5) \qquad \varphi_{\lambda} = \partial_{\lambda}\log\Lambda$$

Les conditions d'intégrabilité de (12.4) s'écrivent :

$$(12.6\,a) \qquad \partial_{\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \partial_{\mu}\Gamma^{\rho}_{\lambda\nu} + \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\lambda} - \Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu}\Gamma^{\rho}_{\sigma\mu} = 0$$

ou encore :

$$(12.6\,b) \qquad \partial_{\lambda\mu}u = \frac{1}{2u}\eta_{\lambda\mu}\partial^{\sigma}u\,.\,\partial_{\sigma}u \qquad u = \Lambda^{-1}$$

dont la solution au voisinage de $x^\alpha = x_0^\alpha$ est :

$$u = C\Delta x^\lambda \Delta x_\lambda - 2a^\lambda \Delta x_\lambda + B \qquad \Delta x^\alpha = x^\alpha - x_0^\alpha \tag{12.7}$$

avec :

$$BC = a^\alpha a_\alpha \qquad B = u(x_0^\alpha) \tag{12.8}$$

En vue d'intégrer (12.4) au voisinage de $x^\alpha = x_0^\alpha$, posons :

$$\bar{a}^{\alpha'}{}_\beta = (a^{\alpha'}{}_\beta)_{x^\alpha = x_0^\alpha} \tag{12.9 a}$$

$$\overset{*}{x}{}^\alpha = u^{-1} X^\alpha \tag{12.9 b}$$

Il vient alors :

$$\eta_{\rho'\sigma'} \bar{a}^{\rho'}{}_\alpha \bar{a}^{\sigma'}{}_\beta = B^{-2} \eta_{\alpha\beta} \tag{12.10 a}$$

$$\partial_{\lambda\mu} X^\alpha = \eta_{\lambda\mu}(\partial_\sigma X^\alpha . \partial^\sigma u - 2CX^\alpha) u^{-1} \tag{12.10 b}$$

D'après (12.8) et (12.10 *a*), B n'est pas indépendant des autres paramètres du groupe et ne peut être arbitrairement pris égal à 1, comme dans [*5*], si l'on exige que la transformation considérée soit strictement conforme au point $x = x_0^\alpha$. Le cas où $B = 1$ sera examiné dans le paragraphe suivant.

L'intégration de (12.10 *b*) avec les conditions initiales (10.7), c'est-à-dire aussi :

$$x^\alpha = x_0^\alpha \rightarrow X^\alpha = 0 \qquad (B^{-1}\partial_\alpha X^\beta)_{x^\alpha = x_0^\alpha} = \delta_\alpha{}^\beta \tag{12.11}$$

conduit à distinguer quatre cas [*12*] :

a) Cas général où : $\partial_{\lambda\mu} X^\alpha \neq 0$, $C \neq 0$. La solution est :

$$x^{\alpha'} = \bar{a}^{\alpha'}{}_\sigma (B\Delta x^\sigma - a^\sigma \Delta x^\lambda \Delta x_\lambda) u^{-1} \tag{12.12}$$

b) Cas où : $\partial_{\lambda\mu} X_\alpha = 0$, $C \neq 0$. La solution pourrait être :

$$x^{\alpha'} = a^{\alpha'}{}_\sigma \left(\frac{p}{c}\right) \Delta x^\sigma / \Delta x^\lambda . \Delta x_\lambda \qquad \text{avec} \qquad a^\alpha = 0,\ B = 0 \tag{12.13}$$

si l'on omettait la condition initiale $(\partial_\alpha X^\beta)_0 = B\delta_\alpha{}^\beta$. En toute rigueur, la solution est identiquement nulle et l'inversion $(\Delta x^\alpha / \Delta x^\sigma \Delta x_\sigma)$ n'apparaît pas ici comme une solution possible.

c) Cas où : $\partial_{\lambda\mu} X^\alpha \neq 0$, $C = 0$. La solution se déduit de (12.12) en y faisant $a^\alpha a_\alpha = 0$. On ne retrouve pas ici la transformation de Cremona [*11*].

d) Cas où : $\partial_{\lambda\mu} X^\alpha = 0$, $C = 0$. La solution non triviale est :

$$\bar{x}^{\alpha'} = \bar{a}^{\alpha'}{}_\sigma \Delta x^\sigma \tag{12.14}$$

ce qui, eu égard à (12.10 a) correspond à une rotation 4-dimensionnelle suivie d'une homothétie (B étant arbitraire).

Il s'ensuit que le groupe conforme dépend de 15 paramètres essentiels (en fait des 26 paramètres $\bar{a}^{\alpha'}{}_{\beta}$, a^{α}, B, C et $b^{\alpha'}$ liés à un changement d'origine des $x^{\alpha'}$, entre lesquels il existe 11 relations indépendantes (12.8) et (12.10 a)); les $\bar{a}^{\alpha'}{}_{\beta}$ déterminent une similitude et les a^{α} une transformation d'accélération. Ce groupe est connexe au voisinage de l'identité et conserve la relation d'ordre dans le temps. Son algèbre de Lie est semi-simple et de rang 3.

D'autre part, (12.6 a) exprime que la variété V'_4 munie de la métrique $ds'^2 = \Lambda^2(x^{\alpha})ds^2$ est localement euclidienne ; mais $\Lambda(x^{\alpha})$ n'étant pas partout régulière, V'_4 n'est pas un espace-temps normal et n'est par suite pas un espace-temps de Minkowski; S'_0 n'est donc pas un système d'inertie.

13. CAS OÙ B = 1

Les transformations obtenues dans ce cas sont donc telles que l'élément linéaire soit conservé au point $x^{\alpha} = x^{\alpha}_0$, par passage de S à S'_0. Elles se déduisent de (12.12) et peuvent s'écrire :

$$(13.1) \quad x^{\alpha'} = \bar{a}^{\alpha'}{}_{\sigma}(Y^{\sigma} - a^{\sigma})/(Y^{\lambda} - a^{\lambda})(Y_{\lambda} - a_{\lambda}) \qquad Y^{\alpha} = \frac{\Delta x^{\alpha}}{\Delta x^{\sigma}\Delta x_{\sigma}}$$

ce qui, pour $x^{\alpha}_0 = 0$ et $a^{\alpha} = 0$, se réduit à l'inversion :

$$(13.2) \qquad x^{\alpha'} = \frac{x^{\alpha}}{x^{\sigma}x_{\sigma}}$$

On comprend dès lors que l'on puisse obtenir, comme on le fait d'habitude, les transformations (13.1) en combinant l'inversion et une translation a^{α} dans l'espace-temps de Minkowski.

Les transformations (13.1) forment un groupe à 14 paramètres (6 des $a^{\alpha'}{}_{\beta}$, $4a^{\alpha}$ et $4b^{\alpha'}$). Ce groupe auquel on ajoute une dilatation arbitraire est appelé dans la littérature, groupe conforme. D'après ce qui précède, cette terminologie n'est manifestement pas satisfaisante; nous l'appellerons *groupe pseudo-conforme* $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}$ contient l'inversion; par suite, il n'est pas connexe et ne conserve pas la relation d'ordre dans le temps [*11 a*].

14. LA RELATIVITÉ RESTREINTE ET LA DYNAMIQUE

Nous pouvons donc résumer ce qui précède de la manière suivante :

a) Lorsque le système de référence S_0' instantanément lié au mobile accéléré est supposé galiléen, l'étude de la Dynamique ne peut se faire dans le cadre de la Relativité restreinte, à moins de s'astreindre à ne considérer que des mouvements accélérés pour lesquels la variation de la vitesse est négligeable.

b) Lorsque l'on admet que les accélérations modifient le comportement des appareils de mesure, on passe de S à S_0' par une transformation de $\mathcal{C}_0$ et de S à tout autre système d'inertie par une transformation de Lorentz. Dans ce cas, la modification du comportement des horloges requiert l'emploi d'une nouvelle jauge de temps, fonction de l'accélération. Le système de référence entraîné par un mobile accéléré n'est pas admissible dans le cadre de la Relativité restreinte; on peut lui associer un voisinage d'une variété conformément minkowskienne si on ne supposait pas intégrable la transformation qui permet de passer de S à S_0'.

Cette analyse nous montre donc que si l'Optique a ébranlé les fondements de la Dynamique newtonienne, la Dynamique nécessite à son tour un élargissement de la Relativité restreinte, élargissement tel que la variété des événements ne soit plus isomorphe à un espace-temps de Minkowski, mais à une variété différentiable plus générale supposée à connexion linéaire.

15. INTRODUCTION A LA CONSTRUCTION DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Nous allons maintenant montrer que si la Dynamique exige l'introduction d'une variété non euclidienne, le principe « d'équivalence » entre champ d'accélérations et champ de gravitation permet, moyennant certaines autres hypothèses plus ou moins tirées de l'expérience, d'aboutir à la Relativité générale.

Dans la mesure où le principe d'équivalence ne suffit pas à rendre nécessaire la Relativité générale, ne vaudrait-il pas mieux le considérer comme « une sage-femme qui a contribué à la naissance de cette théorie mais qui doit maintenant être enterrée avec tous les honneurs » [*13*] ? Il nous semble que non, car il serait souhaitable d'en éclairer le rôle exact afin de nous rendre compte si ce principe n'est pas à l'origine de certains traumatismes de naissance. D'ailleurs, malgré la tentative intéressante de A. Peres [*14*], nous ne disposons d'aucune meilleure justification.

16. THÉORIE NEWTONIENNE DE LA GRAVITATION

Elle est fondée sur :

a) Le principe d'action à distance : l'action *directe* et *instantanée* de A sur B est déterminée par :

$$\vec{f} = -kM_AM'_B\frac{\vec{r}}{r^3} \qquad k = \text{const.} \tag{16.1}$$

où M_A est la masse grave active de A et M'_B la masse grave passive de B.

b) Le principe d'action et de réaction : l'action de A sur B est égale et opposée à l'action de B sur A, ce qui donne pour tout corps :

$$\frac{M}{M'} = \frac{\text{masse grave active}}{\text{masse grave passive}} = k_1 \qquad k_1 = \text{const.} \tag{16.2}$$

On pose d'habitude $k_1 \to 1$.

c) Le principe fondamental de la Dynamique : le mouvement de B (A fixé) est déterminé par :

$$\vec{f} = \frac{d}{dt}(m_B\vec{v}) \qquad m_B = \text{masse inerte de B} \tag{16.3}$$

ce qui entraîne :

$$\frac{M'}{m} = \frac{\text{masse grave passive}}{\text{masse inerte}} = k_2 = \text{const.} \tag{16.4}$$

lorsque M_A/r^2 est pratiquement constant. On pose habituellement $k_2 \to 1$.
Il convient de remarquer :

i) que (16.3) est en réalité une définition de la force et non une équation qui exprime l'égalité de deux quantités mesurées indépendamment ;
ii) que l'on peut supprimer le caractère direct de l'action à distance en

passant à une théorie newtonienne du *champ* de gravitation, champ décrit par un scalaire U tel que :

(16.5) $\Delta U = 4\pi G\rho$ $G = k$ (lorsque $k_1 = k_2 = 1$) ρ=densité de matière.

17. GRAVITATION ET RELATIVITÉ RESTREINTE

Avec l'avènement de la Relativité restreinte, la théorie newtonienne de la gravitation doit abandonner le caractère instantané de l'action à distance et se transformer ou bien en théorie d'action directe entre particules, ou bien en théorie du champ de gravitation covariante par le groupe de Lorentz.

Les théories du premier type ne semblent pas pouvoir donner à l'heure actuelle des résultats que ne peuvent fournir de manière souvent plus simple les théories du second type. Celles-ci substituent le d'Alembertien $\Box$ au Laplacien Δ dans (16.5) et y remplacent U soit par un scalaire φ (par le groupe de Lorentz), soit par un tenseur $\psi_{\alpha\beta}$, ρ cédant la place chaque fois à une grandeur convenablement choisie [*15*, *16*].

Cependant, si en toute rigueur, on admet l'impossibilité d'une Dynamique de la Relativité restreinte, ces théories ne pourraient faire état d'une loi de mouvement. On ne peut donc pas avoir de théorie satisfaisante de la gravitation en Relativité restreinte. Cette conclusion rejoint d'ailleurs celle de Schild [*17*] qui a montré que la Relativité restreinte, le principe d'équivalence et le décalage vers le rouge sont inconciliables (sans autre hypothèse).

18. EXPÉRIENCE D'EÖTVÖS ET PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE

Le principe d'équivalence est essentiellement issu de l'expérience d'Eötvös qui :

a) en réalisant l'équilibre entre la force d'attraction terrestre, la force centrifuge de la Terre et la tension du fil de torsion, conclut à l'équivalence de ces divers types de forces et à la proportionnalité entre masse grave passive et masse inerte ($M'/m = k_2$),

b) en répétant l'expérience avec des corps de composition interne différente, conclut avec une précision de 10^{-11} (Dicke *et al.*) à l'indépendance de k_2 par rapport à la nature du corps utilisé; dans un même domaine tous les corps tombent avec la même accélération.

On en déduit que si un observateur O lié à un laboratoire suffisamment petit (pour que (gradient du champ) $\times$ (dimension du laboratoire)$^2 \ll c^2$) tombe en chute libre dans un champ de gravitation, cet observateur verrait avec une accélération nulle un corps d'épreuve libre situé à l'intérieur de ce laboratoire; ainsi, l'accélération du laboratoire annule l'effet du champ de gravitation sur le mouvement des corps libres situés dans le laboratoire (2). Pour cette raison, le champ d'accélération et le champ de gravitation sont à l'intérieur du laboratoire, *équivalents* au sens *faible* [*18*].

Quant au système de référence S_0 associé au laboratoire où règne un champ pratiquement homogène, il est homogène en ce sens que tous les points de l'espace Σ_0 de S_0 sont équivalents pour la mesure des durées et des longueurs. L'équivalence faible n'entraîne cependant pas que S_0 soit un système d'inertie, c'est-à-dire que Σ_0 soit isotrope et que les appareils de mesure standard aient le même comportement que dans un système d'inertie.

19. ISOTROPIE DE Σ_0

L'isotropie de Σ_0 ne semble pas pouvoir être tirée de l'expérience, de manière incontestable. On peut seulement dire qu'elle n'est pas en désaccord avec les belles expériences de Beltran-Lopez, Hughes et Robinson [*19*]. Ces expériences concluent à une absence d'influence sur la masse inerte, de l'anisotropie de la distribution d'énergie dans notre galaxie, en montrant avec une précision très grande ($\sim 10^{-20}$) :

a) que l'effet Zeeman de O_2 et Cl_2 est indépendant de l'orientation du champ magnétique extérieur $\vec{H}$ par rapport au centre de la galaxie, en dépit du fait que dans un modèle semi-classique un électron de moment orbital non nul a dans les différents états magnétiques, des vitesses de directions différentes par rapport à $\vec{H}$;

b) que la distribution des états magnétiques du noyau de lithium n'est pas modifiée par suite des effets d'anisotropie de masse.

Nous supposons dans la suite que Σ_0 *est isotrope*, quelle que soit la situation de S_0 par rapport à la source du champ.

---

(2) A. L. Harvey [*20 a*] a tenté de montrer qu'il existe des théories de la gravitation covariantes de Lorentz qui admettent l'identité de la masse inerte et de la masse grave passive et non l'égale accélération de tous les corps en chute libre dans un même domaine. Il n'en est cependant rien, comme l'a montré R. H. Dicke [*20 b*].

20. C-ÉQUIVALENCE ET ÉQUIVALENCE FORTE

La question qui se pose maintenant est de savoir dans quelle mesure :

a) les rapports des grandeurs physiques de même nature peuvent être supposés indépendants de la situation de S_0 par rapport à la source du champ;

b) les appareils de mesure standard peuvent avoir le comportement galiléen par rapport à S_0.

R. H. Dicke estime que les rapports des masses de deux corps peuvent être supposés indépendants de la localisation de S_0 car, dans le cas contraire, certaines forces anormales (non observées) devraient apparaître. Bien entendu, on peut selon Dicke, envisager l'hypothèse où ces forces se trouvent compensées par un champ supplémentaire ; ce champ ne peut être d'un type tensoriel en raison de l'isotropie postulée de Σ_0, d'un type vectoriel car un tel champ introduisant une interaction indépendante des énergies de liaison serait en désaccord avec l'expérience d'Eötvös; le champ scalaire ne peut être rejeté *a priori* et, s'il est retenu dans le cadre de la Relativité générale, conduit à une variation de la constante de gravitation [*19*, *21*].

Nous supposons dans la suite que (20 *a*) *est vérifié.* Dès lors, par rapport à S_0, les phénomènes physiques sont régis par les mêmes lois que celles de la Relativité restreinte avec toutefois la possibilité pour les appareils de mesure standard d'avoir un comportement non galiléen; cela signifie que si deux événements sont séparés par l'intervalle élémentaire ds^2 (selon S_0) et $d\bar{s}^2$ (selon un système d'inertie S), on a :

$$ds^2 = \Lambda_0^2 d\bar{s}^2 \tag{20.1}$$

où Λ_0 est fonction du champ présent. Un tel S_0 est appelé pseudo-système d'inertie.

L'équivalence faible jointe à l'hypothèse que le système local de référence est un pseudo-système d'inertie définit la *C-équivalence.*

Si, au contraire, on admet que l'on peut partout prendre $\Lambda_0 = 1$, le système local de référence est assimilé à un système d'inertie et l'on a à faire à l'*équivalence forte* admise par A. Einstein au nom de l'expérience d'Eötvös.

La C-équivalence peut de prime abord susciter deux sortes de critiques :

a) certains peuvent estimer qu'une distinction fondée sur un changement de jauge ne peut qu'être illusoire; il convient de remarquer à leur intention que la jauge Λ_0 n'est pas arbitraire : elle est essentiellement déterminée par la courbure de la variété des événements, courbure due à la présence d'une distribution d'énergie [*1*];

b) d'autres peuvent estimer que l'on restreint la généralité des arguments présentés ici, en postulant l'isotropie de Σ_0 et en réduisant l'effet de la courbure à une variation isotrope de la jauge; nous pouvons seulement leur répondre que l'isotropie locale semble une bonne approximation.

Enfin, nous compléterons l'hypothèse (20 *a*) en postulant avec F. Marzske et J. A. Wheeler [*22*] que le rapport des longueurs de deux vecteurs (U^α, V^α) ne varie pas lorsqu'on les transporte en tout autre point, par parallélisme, le long de deux chemins distincts.

21. RELATIVITÉ GÉNÉRALE

La théorie de la gravitation se fait dès lors dans le cadre d'une variété de Riemann V_4 munie de la métrique :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{21.1}$$

Avec ce choix, l'équivalence forte conduit à écrire en tout point A :

$$(ds^2)_A = (d\bar{s}^2)_A \tag{21.2}$$

où $d\bar{s}^2$ est l'élément linéaire de l'espace-temps osculateur en A, tandis que la C-équivalence conduit à :

$$\left(ds^2\right)_A = \Lambda_A^2\left(d\bar{s}^2\right)_A \tag{21.3}$$

où Λ_V tient compte des termes d'ordre supérieur à 2 dans une représentation du deuxième ordre d'un voisinage de V_4 sur l'espace de Minkowski osculateur [*1*]. Il convient de souligner que Λ_A n'introduit pas, comme dans [*21*], un champ scalaire supplémentaire dans V_4; ce facteur précise le lien entre la variété et l'espace minkowskien osculateur et traduit la modification du comportement des appareils standard.

Les équations de la gravitation s'obtiennent alors par généralisation de (16.5) :

$$S_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \chi T_{\alpha\beta} \tag{21.4 a}$$

à l'intérieur d'une distribution d'énergie représentée par $T_{\alpha\beta}$; $R_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Ricci de la variété; à l'extérieur des masses, $g_{\alpha\beta}$ est astreint à vérifier :

$$S_{\alpha\beta} = 0 \tag{21.4b}$$

les $g_{\alpha\beta}$ devant satisfaire par ailleurs à certaines conditions de régularité (3).

On sait que $S_{\alpha\beta}$ vérifient quatre identités :

$$\nabla_\sigma S_\alpha{}^\sigma = 0 \tag{21.5}$$

ce qui assure l'arbitraire sur le choix des coordonnées (i. e., la covariance générale de la théorie) et la déduction des lois du mouvement (4) à partir de (21.4) (tout au moins dans les cas d'approximation).

On voit ainsi :

a) que le caractère non euclidien de la variété fondamentale est déterminé par l'étude des mouvements accélérés tandis que la théorie de la gravitation et des lois du mouvement résultent du principe d'équivalence faible et de certains autres postulats précisés aux paragraphes 19 et 20;

b) que la covariance générale de la théorie, nécessaire pour que celle-ci soit indépendante de la manière dont nous étiquetons les événements, n'est pas un principe spécifique de la Relativité générale (5);

c) qu'enfin, la variété fondamentale n'est plus une scène où évoluent les phénomènes physiques puisque sa structure est déterminée par la distribution d'énergie présente. Il s'ensuit que, même si l'on admet l'équivalence forte, l'espace-temps ne peut généralement pas être absolu au sens où l'espace-temps de Minkowski l'est, c'est-à-dire indépendant de l'observateur (6).

---

(3) La C-équivalence suggère de n'accorder une signification de grandeur mesurable qu'aux variations locales de $T_{\alpha\beta}$; la représentation des milieux continus dans cette perspective est abordée dans [*23*].

(4) L'identité des masses graves active et passive ne se pose qu'à ce niveau et non lors de la définition du principe d'équivalence, comme l'envisage F. Rohrlich [*24*].

(5) Cette constatation semble avoir été faite pour la première fois par Edwin B. Wilson ou E. Kretchmann [*25*].

(6) La C-équivalence rend en outre la jauge relative. Signalons que seule la C-équivalence permet de distinguer dans le décalage vers le rouge des raies spectrales, l'effet Doppler de l'effet gravitationnel, dans le cadre d'un espace-temps de Riemann général [*1*].

Ainsi, le courant qui nous mène de la Mécanique newtonienne à la Relativité générale nous fait passer d'un espace et d'un temps absolus, d'abord à l'espace-temps absolu de la Relativité restreinte et ensuite à l'espace-temps relatif.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] S. KICHENASSAMY, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 1, 1964, p. 129.
[*2*] Alfred A. ROBB, *The absolute relations of Space and Time*. Cambridge, 1921.
[*3*] A. D. FOKKER, *Time and space, weight and inertia*. Pergamon, 1965.
[*4*] H. WEYL, *Math. Anal. des Raumproblems*. Springer, 1923.
[*5*] V. FOCK, *The Theory of Space, time and gravitation*. Pergamon, 1959.
[*6*] S. KICHENASSAMY, *C. R.*, t. 259, 1964, p. 4521.
[*7*] A. EINSTEIN et la plupart des manuels classiques sur le sujet.
[*8*] S. KICHENASSAMY, *C. R.*, t. 260, 1965, p. 3001.
[*9*] S. KICHENASSAMY, *C. R.*, t. 260, 1965, p. 3865.
[*10*] L. PAGE, *Phys. Rev.*, t. 49, 1936, p. 254; E. L. HILL, *Phys. Rev.*, t. 72, 1947, p. 143; W. RINDLER, *Phys. Rev.*, t. 119, 1960, p. 2082, etc.
[*11*] S. LIE, *Theorie der transf. Gruppen*. Teubner, 1930; E. CUNNINGHAM, *Proc. London Math. Soc.*, [2], t. 8, 1910, p. 77; H. BATEMAN, *Ibid.*, p. 228; G. DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, Livre II, chap. I. G.-Villars, 1910; S. KICHENASSAMY, *C. R.*, t. 260, 1965, p. 3296, etc.
[*11 a*] A. GAMBA et G. LUZZATO, *Nuov. Cim.*, t. 33, 1964, p. 1732.
[*12*] S. KICHENASSAMY, *Proc. 2nd Matscience Summer School* (Bangalore, 1965). Plenum Press *(à paraître)*.
[*13*] J. L. SYNGE, *Relativity, the general theory*. North Holland Pub., 1960.
[*14*] A. PERES, *Ann. Phys.*, t. 19, 1962, p. 279.
[*15*] A. L. HARVEY, *Amer. J. Phys.*, t. 33, 1965, p. 449.
[*16*] M. A. TONNELAT, *Les vérifications expérimentales de la Relativité générale*. Masson, 1964.
[*17*] A. SCHILD, dans *Evidence for gravitational theories*. Academic Press, 1961, p. 69.
[*18*] R. H. DICKE, dans [*17*], p. 1; *Relativity, groups and topology*. Les Houches, 1963, p. 165.
[*19*] V. HUGHES, dans *Gravitation and Relativity*. Benjamin, 1964, p. 105.
[*20 a*] A. L. HARVEY, *Ann. Phys.*, t. 29, 1964, p. 383.
[*20 b*] R. H. DICKE, *Ann. Phys.*, t. 31, 1965, p. 235.
[*21*] C. BRANS et R. H. DICKE, *Phys. Rev.*, t. 124, 1961, p. 925; R. H. DICKE, dans [*19*], p. 142.
[*22*] F. MARZSKE et J. A. WHEELER, dans [*19*], p. 40.
[*23*] J. F. BENNOUN, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. 3, 1965, p. 41.
[*24*] F. ROHRLICH, *Ann. Phys.*, t. 22, 1963, p. 169.
[*25*] E. B. WILSON, *Astrophys. J.*, t. 15, 1917, p. 244; E. KRETCHMANN, *Ann. Physik*, t. 53, 1917, p. 575.

(Manuscrit reçu le 21 février 1966).

Directeur de la publication : P. GAUTHIER-VILLARS.

IMPRIMÉ EN FRANCE

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1427*a*. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5252. 5-1966.