

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

C. BOURRELY

J. MANDELBROJT

J. PASCALE

**Nouvelles considérations sur le modèle statique.**

**I. - La fonction de source**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 6, n° 3 (1967), p. 245-254

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1967\\_\\_6\\_3\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__6_3_245_0)

© Gauthier-Villars, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Nouvelles considérations sur le modèle statique

### I. — La fonction de source

par

**C. BOURRELY (\*)**, **J. MANDELBROJT**  
et **J. PASCALE**

Physique théorique, Faculté des Sciences,  
Place Victor-Hugo, 13-Marseille (3<sup>e</sup>).

---

**SOMMAIRE.** — Une fonction de source est calculée dans le modèle de Chew et Low à partir du potentiel nucléon-nucléon en utilisant un « procédé de convergence canonique ». Sans utiliser de paramètres arbitraires (cutoff par exemple) et sans introduire la masse du nucléon, on trouve que notre fonction de source est négligeable pour  $\omega > 6\mu$  ( $\mu$ , masse du méson  $\pi$ ).

**ABSTRACT.** — A source function in the Chew-Low model is calculated from conditions on the two nucleon potential by using a « canonical convergence procedure ». Without the use of arbitrary parameters (such as a cutoff) and without introducing the mass of the nucleon, our source function is found to be negligible for  $\omega > 6\mu$  ( $\mu$ , mass of the  $\pi$  meson).

### I. — INTRODUCTION

Dans un article précédent, l'un de nous (J. Mandelbrojt [1]) a introduit un procédé canonique de convergence dans l'espace des impulsions, basé sur des considérations d'analyse fine dues à S. Mandelbrojt [1] et [2]. Nous

---

(\*) Une thèse partiellement basée sur cet article doit être présentée par C. Bourrely à l'Université d'Aix-Marseille en vue d'obtenir le titre de « Docteur ès Sciences ».

résumons ici une de ces propriétés; elle relie le support de la transformée de Fourier d'une fonction à son comportement asymptotique dans l'espace des  $x$  (nous en donnons ici un énoncé moins général que celui donné dans l'article [2] mais suffisant pour le but que nous poursuivons).

$C(x)$  ( $x > 0$ ) étant une fonction non décroissante et continue, on considère la classe des fonctions  $F$  qui satisfait aux conditions suivantes :

$$1^{\circ} F(x) \leq e^{-C(|x|)}.$$

$2^{\circ} \widehat{F}(k)$ , la transformée de Fourier de  $F$ , a un support compact contenu dans l'intervalle  $(-\delta, +\delta)$ .

$$3^{\circ} \widehat{F}(0) = 1.$$

Il est bien connu que la condition  $2^{\circ}$  entraîne que  $F(x)$  est la restriction d'une fonction entière  $F(z)$  de type exponentiel  $\delta$ , et que  $F(z) \leq e^{\delta|y| - C(x)}$  ( $\leq e^{\delta|y|}$ , si  $C(x) \geq 0$ ). On sait également qu'une condition nécessaire et suffisante pour que les conditions  $1^{\circ}$  et  $2^{\circ}$  soient compatibles est que

$$(1) \quad \int_1^{\infty} \frac{C(u)}{u^2} du < \infty$$

c'est-à-dire qu'il existe des fonctions  $F \not\equiv 0$  satisfaisant aux conditions  $1^{\circ}$  et  $2^{\circ}$  si l'intégrale (1) converge. Si cette intégrale diverge et si  $F$  satisfait aux conditions  $1^{\circ}$  et  $2^{\circ}$  alors  $F \equiv 0$ .

Considérons alors le produit infini

$$(2) \quad \Pi(x) = \frac{\sin^2 ax}{ax^2} \prod_1^{\infty} \frac{\sin \mu_n x}{\mu_n x}$$

$\frac{1}{\mu_n}$  étant l'abscisse du point où  $C(x)$  passe par la valeur  $n$ . Ce produit converge uniformément dans tout compact, puisque si l'inégalité (1) a lieu  $\sum \mu_n < \infty$ . En fait ce produit infini converge uniformément dans chaque compact du plan complexe quand on remplace  $x$  par  $z = x + iy$ .  $\Pi(x)$  est donc la restriction à l'axe des  $x$  d'une fonction entière  $\Pi(z)$  (définie par le produit infini (2) lorsque  $x$  est remplacé par  $z$ ). S. Mandelbrojt a montré [2] que

$$|\Pi(z)| \leq e^{\delta_0 |y| - C(|z|)} \leq e^{\delta_0 |y| - C(|x|)}$$

La propriété essentielle que nous retenons de [2] est que lorsque l'inégalité (1) a lieu : *pour toute fonction  $F$  qui est la restriction d'une fonction entière  $F(z)$  satisfaisant aux conditions  $\widehat{F}(0) = 1$  et  $|F(z)| \leq e^{\delta|y| - C(|x|)}$  ( $z = x + iy$ ) (la transformée de Fourier de  $\widehat{F}$  a donc son support compris dans l'intervalle  $(-\delta, \delta)$  et  $|F(x)| \leq e^{-C(|x|)}$ ) on a  $\delta \geq \alpha \delta_0$ ,  $\alpha$  étant une*

constante positive indépendante de  $F$ . Certaines conditions de régularité de croissance doivent être satisfaites par  $C(x)$  (en fait dans [2] l'inégalité à laquelle satisfaisait  $F(z)$  était  $|F(z)| \leq e^{\delta|y| - C(|z|)}$  au lieu de  $F(z) \leq e^{\delta|y| - C(|x|)}$  mais la démonstration reste valable avec cette dernière inégalité). Remarquons que si les quantités  $\frac{1}{\mu_n}$  comprennent les multiples d'un nombre  $\frac{1}{q}$  ( $q > 0$  entier),  $\alpha$  tend vers 1.

L'énoncé que nous avons souligné peut s'exprimer en disant que le « cut off » minimum que l'on peut mettre à une fonction  $\widehat{F}$  tout en respectant les conditions 1° et 3° est  $\alpha\delta_0$ . Au lieu de couper une fonction  $\widehat{F}(k)$  à ce « cut off » minimum, on peut, de façon plus cohérente simplement remplacer  $\widehat{F}(k)$  par la fonction  $\widehat{\Pi}(k)$ . Notre procédé canonique de convergence consiste à faire cette substitution.

Lorsque  $\int_1^\infty \frac{C(u)}{u^2} du$  diverge, mais  $\int_1^\infty \frac{C(u)}{u^3} du < \infty$  (par exemple pour  $C(|u|) = \mu|u|$ ), aucune fonction  $F \not\equiv 0$  (non identiquement nulle) satisfaisant à la condition 1°, ne peut avoir un support compact, mais la fonction  $\Pi(x)$  définie par l'expression (2) existe encore et notre procédé canonique de convergence consiste encore dans ce cas à remplacer la fonction  $\widehat{F}(k)$  par  $\widehat{\Pi}(k)$ . Plusieurs raisons que nous énoncerons ci-après justifient cette façon de procéder :

— Le produit infini qui définit  $\Pi(x)$  converge encore dans chaque compact de l'axe des  $x$  et en fait dans chaque compact du plan complexe lorsque  $x$  est remplacé par  $z = x + iy$ , si bien que notre procédé est bien défini.

— Lorsque  $\widehat{F}(k)$  est remplacée par  $\widehat{\Pi}(k)$  les conditions 1° et 3° sont encore satisfaites.

—  $\widehat{\Pi}(k)$  peut s'écrire de la façon suivante

$$\widehat{\Pi}(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(2^n \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n)^{-1} \int_{-a}^a dv \int_{-\mu_n}^{\mu_n} dt_n \dots \times \int_{-\mu_1}^{\mu_1} \Delta(k + v + t_1 + \dots + t_n) dt_1$$

où  $\Delta(k) = 1$  pour  $|k| \leq a$ ;  $\Delta(k) = 0$  pour  $|k| > a$ .

Nous pouvons alors décrire la construction de la fonction  $\Pi(x)$  de la façon suivante : on prend la fonction  $\Delta(k)$  qui est la transformée de Fourier de  $\frac{\sin ax}{x}$ . Son support qui est  $(-a, a)$  est augmenté à chaque intégration

successive, simultanément la valeur de la fonction obtenue dans l'espace des impulsions est diminuée surtout aux extrémités de son support, autrement dit à chaque intégration le support de la transformée de Fourier est augmenté par un processus d'étalement de la transformée de Fourier, la fonction elle-même étant multipliée à chaque étape par  $\frac{\sin \mu_n x}{\mu_n x}$ . Ces augmentations successives du support de la transformée de Fourier semblent être les plus petites possibles compatibles avec le fait que la fonction finale  $\left(\frac{\sin^3 ax}{ax^2} \prod \frac{\sin \mu_n x}{\mu_n x}\right)$  décroisse comme  $e^{-C(|x|)}$ . Autrement dit, une déformation aussi faible que possible est faite sur une fonction ayant un support compact (dans l'espace des impulsions) pour lui donner un comportement donné à l'avance pour  $|x| \rightarrow \infty$ .

— Lorsque (1) converge, on sait que le support  $(-\delta, +\delta)$  de  $\widehat{F}(k)$  est lié au comportement de  $F(z)$  dans le plan complexe d'après l'inégalité  $|F(z)| \leq e^{\delta|y|-C(|x|)}$ . La fonction  $\delta|y|$  est du plus petit ordre possible compatible avec le fait que  $\int_0^\infty e^{-C(|x|)} dx < \infty$ ; si nous avons  $F(z) \leq e^{\varphi|y|-C(|x|)}$  avec  $\frac{\varphi(u)}{u} \rightarrow 0$ , alors on aurait nécessairement  $F \equiv 0$  (même si (1) converge).

Si nous considérons maintenant le cas où (1) diverge, nous avons  $|\Pi(z)| \leq e^{\varphi|y|-C(|x|)}$  où, à un certain point de vue  $\varphi(u)$  est la fonction de croissance la « moins rapide » permise pour qu'une fonction  $F(z)$  non identiquement nulle puisse satisfaire à l'inégalité  $|F(z)| \leq e^{\varphi|y|-C(|x|)}$  avec  $\int \frac{C(u)}{u^3} du < \infty$ . Autrement dit  $\varphi(|y|)$  joue ici (quand on a l'inégalité (3)) le rôle que jouait la fonction  $\delta|y|$  quand on avait l'inégalité (1).  $\varphi(t)$  est de la forme

$$(4) \quad \varphi(t) = A \left( t \int_1^t \frac{C(u)}{u^2} du + t^2 \int_t^\infty \frac{C(u)}{u^3} du \right)$$

où  $A$  est une constante numérique (on a pris pour simplifier  $C(u) = 0$  pour  $0 \leq u \leq 1$ ).

Comme nous l'avons indiqué c'était grâce au fait que  $\varphi(t) = \delta_0 t$  que nous avons  $\widehat{\Pi}(u) = 0$  pour  $|u| > \delta_0$  (lorsque l'on a la condition 1°).

Lorsque l'on n'a pas l'inégalité (1) mais l'inégalité (3), la manière de décroître de  $\widehat{\Pi}(u)$  est équivalente au fait que  $\varphi(t)$  a la forme (4) si bien qu'il n'est pas déraisonnable de supposer que  $\widehat{F}(u)$  ne doit pas décroître plus rapidement que  $\widehat{\Pi}(u)$ .

## II. — LE POTENTIEL NUCLÉON-NUCLÉON DANS LE MODÈLE DE CHEW ET LOW

L'hamiltonien de source fixe pour le système de deux nucléons interagissant par l'intermédiaire de mésons en ondes P est :

$$H_2(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left\{ \omega(k) a_\alpha^*(\vec{k}) a_\alpha(\vec{k}) + \frac{f_0}{\mu} \sum_{j=1}^2 \frac{v(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} \tau_\alpha^{(j)} [i(\vec{\sigma}^{(j)} \cdot \vec{k}) a_\alpha(\vec{k}) \exp(i\vec{k}x_j) - i(\vec{\sigma}^{(j)} \cdot \vec{k}) a_\alpha^*(\vec{k}) \exp[-i\vec{k}x_j]] \right\} d^3k$$

où  $\vec{r}$  est le vecteur joignant les deux nucléons,  $v(k)$  est la fonction de source à symétrie sphérique et  $a_\alpha^*(\vec{k})$  et  $a_\alpha(\vec{k})$  sont les opérateurs de création et d'annihilation du champ de méson,  $\alpha$  l'indice de charge.

$E(\vec{r})$  étant une valeur propre approximative de  $H_2(r)$  pour l'état fondamental des deux nucléons, le potentiel peut être calculé en prenant

$$V(\vec{r}) = E(\vec{r}) - E(\infty)$$

$$V(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{f^2}{\mu^2} \int \frac{v^2(k)}{2\omega^2(k)} \sum_{j,j'=1}^2 \tau_\alpha^{(j)} \tau_\alpha^{(j')} (\vec{\sigma}^{(j)} \cdot \vec{k}) (\vec{\sigma}^{(j')} \cdot \vec{k}) \exp[ik(x_j - x_{j'})] d^3k \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

ou

$$V(r) = - \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{f^2}{\mu^2} \int \frac{v^2(k)}{\omega^2(k)} \tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)} (\vec{\sigma}^{(1)} \cdot \vec{k}) (\vec{\sigma}^{(2)} \cdot \vec{k}) \cos \vec{k}r d^3k$$

$f$  étant la constante de couplage renormalisée.

## III. — CONDITIONS SUR LA FONCTION DE SOURCE

Si l'on veut que la théorie de la source fixe ait un lien avec la théorie des champs,  $V(x)$  devra quand  $|\vec{x}| \rightarrow \infty$  tendre asymptotiquement vers le potentiel qui correspond à l'échange d'un méson, lequel est obtenu en remplaçant  $v(k)$  par 1.

Ainsi  $v(k)$  doit satisfaire les conditions suivantes

$$(A1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} V(\vec{x}) \rightarrow -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{f^2}{\mu^2} \int \frac{d^3k}{\omega^2(k)} \tau_\alpha^{(1)} \tau_\alpha^{(2)} (\sigma^{(1)} \cdot k) (\sigma^{(2)} \cdot k) e^{i\vec{k}\vec{x}} \\ \lim_{k \rightarrow 0} v(k) \rightarrow 1 \end{array} \right.$$

$$\text{Définissons } \widehat{F}(k) = \mu^2 \frac{v^2(k)}{k^2 + \mu^2}.$$

On voit facilement que la condition (A1) est équivalente à la condition (A2)

$$(A2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow \infty} |F(r)| \rightarrow \frac{\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad r = |\vec{x}| \\ \widehat{F}(0) = 1 \end{array} \right.$$

Les conditions de (A2) ne sont pas tout à fait les mêmes que les conditions du 1° et 3° de l'introduction. Car il est évident que la première condition de (A2) ne correspond pas à  $|F(r)| \leq e^{-C(r)}$  pour tout  $r$ , mais dans la construction de la fonction  $\widehat{\Pi}(k)$  il est raisonnable de supposer que c'est l'expression de  $e^{-C(r)}$  pour  $r$  grand qui joue un rôle fondamental, c'est ce que nous vérifierons par la suite.

Envisageons la discussion dans le cas concret.

Les théories sur le potentiel nucléon-nucléon montrent que l'on peut définir qualitativement trois régions, la région extérieure ( $\mu r > 1,25$ ) où l'échange d'un pion est dominant, la région intermédiaire ( $0,7 < \mu r < 1,25$ ) où les processus d'échange de deux pions et plus sont importants, et la région intérieure ( $\mu r < 0,7$ ) dans laquelle on ne possède pas d'information [4]. En résumé nous avons la situation suivante.

$$V(r) = \left\{ \begin{array}{ll} V_1(r) \text{ pour } \mu r > 1,25 & \text{potentiel dû à l'échange d'un méson,} \\ V_2(r) \text{ pour } 0,7 < \mu r < 1,25 & \text{potentiel phénoménologique dont on} \\ & \text{peut fixer une borne supérieure et} \\ & \text{inférieure,} \\ V_3(r) \text{ pour } \mu r < 0,7 & \text{inconnu.} \end{array} \right.$$

Nous écrivons.

$$(B1) \quad \left\{ \begin{array}{l} |V(r)| = e^{-C_1(r)} \text{ pour } r ]0, \infty) \\ \text{avec :} \\ e^{-C_1(r)} = \left\{ \begin{array}{ll} V_1(r) \text{ pour } \mu r > 1,25 \\ V_2(r) \text{ pour } 0,7 < \mu r < 1,25 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans ce cas les conditions de (B1) s'expriment comme.

$$(B2) \quad \begin{cases} |F(r)| \leq e^{-C(r)} \\ v(0) = 1 \end{cases}$$

$e^{-C(r)}$  est obtenu en dérivant deux fois  $e^{-C_1(r)}$ , en particulier

$$e^{-C(r)} = \frac{\mu^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad \text{pour} \quad \mu r > 1,25.$$

La fonction  $C(r)$  n'est pas déterminée pour  $\mu r < 0,7$ , mais les  $\mu_n$  étant calculés à partir de l'équation  $C\left(\frac{1}{\mu_n}\right) = \text{entier}$ , le calcul montre que la valeur de  $C(r)$  pour  $\mu r < 0,7$  n'intervient pas puisque l'on trouve  $1/\mu_1 > 0,7/\mu$ .

Suivant le procédé de convergence canonique nous prendrons comme fonction  $F(r)$

$$\Pi(r) = \frac{(\sin ar)^2}{ar^2} \prod_1^{\infty} \frac{\sin \mu_n r}{\mu_n r}$$

Le paramètre  $a$  est calculé par la condition de normalisation  $\hat{\Pi}(0) = 1$ . La transformée de Fourier  $\hat{\Pi}(k)$  est représentée sur la figure 1 et  $v^2(k)$  est donné par la relation

$$v^2(k) = \frac{k^2 + \mu^2}{\mu^2} \hat{\Pi}(k)$$

En conclusion on voit que la condition (B2) remplace la condition (A2) dans le cas concret, et satisfait aux conditions 1<sup>o</sup> et 3<sup>o</sup> de l'introduction.

Pour voir comment varie  $\Pi(k)$  lorsque l'on modifie  $C(r)$  pour les petites valeurs de  $r$  (on conserve le même comportement asymptotique) nous avons tracé une courbe  $\hat{\Pi}_M(k)$  obtenue en modifiant  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  <sup>(1)</sup>, voir figure 1. Les résultats numériques montrent que les deux fonctions  $\hat{\Pi}(k)$  et  $\hat{\Pi}_M(k)$  sont simultanément négligeables pour  $\omega \sim 6\mu$ . On peut en conclure que l'intervalle en dehors duquel  $\hat{\Pi}(k)$  est négligeable est lié au comportement

---

<sup>(1)</sup> Les  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  que nous avons pris pour construire  $\Pi_M(x)$  correspondent à  $C(r) = -\log \frac{\mu^2}{4\pi} + \mu r + \text{Log } r$  pour  $x > 1/\mu_1$ .



asymptotique de  $C(r)$ , de là au comportement asymptotique du potentiel. La forme précise de  $\widehat{\Pi}(k)$  dépend par contre du comportement du potentiel pour tout  $r$  et en particulier dans la région intermédiaire.

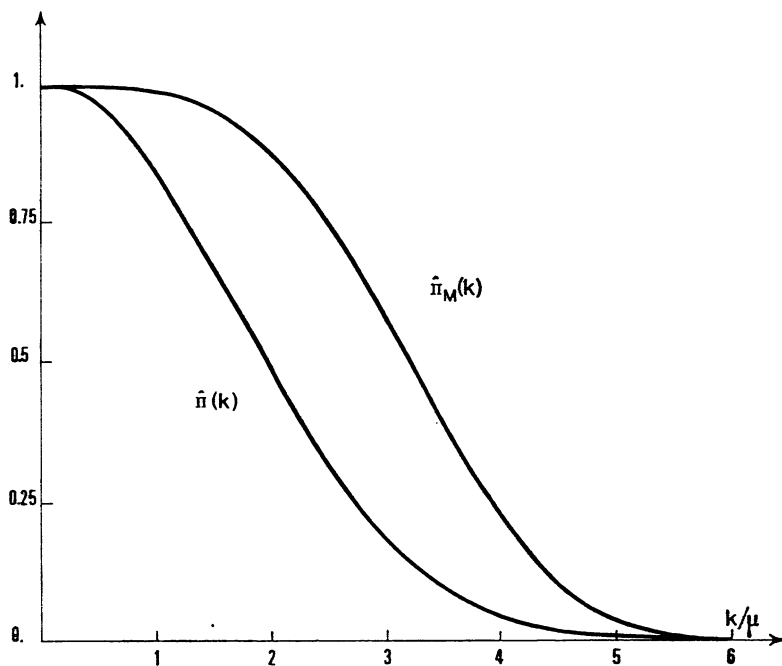


FIG. 1. —  $\widehat{\Pi}(k)$  et  $\widehat{\Pi}_M(k)$  en fonction de  $k/\mu$ .

#### IV. — CONCLUSION

La fonction de source obtenue à partir du procédé de convergence canonique d'après la condition (B2) est très semblable dans l'espace d'impulsion à une fonction dont l'extrémité du support serait  $\omega \sim 6\mu$ . C'est en fait cette valeur que Chew et Low ont déterminée empiriquement pour obtenir la valeur expérimentale de la résonance  $(3/2, 3/2)$ .

Remarquons finalement qu'il peut sembler à première vue naturel de trouver une fonction de source dont l'extension dans l'espace d'impulsion (c'est-à-dire l'intervalle où les contributions de  $\widehat{\Pi}(k)$  sont « importantes ») est de l'ordre de la masse du nucléon, mais il faut souligner que nulle part dans les calculs nous n'avons introduit la masse du nucléon.

*Complément.* — B. U. Korenblum a démontré récemment [5] que la constante  $\alpha$  correspondant au théorème de S. Mandelbrojt que nous résumons à la fin de la page 246, satisfait à la double inégalité  $\frac{2}{\pi} \leq \alpha \leq 1$ . Ceci apporte une justification supplémentaire à notre procédé canonique de convergence.

### REMERCIEMENTS

Nous remercions le Professeur H. Morel du « Centre de Calcul Numérique de Marseille » de nous avoir permis d'utiliser le calculateur Pallas. Un des auteurs (C. Bourrelly) est redevable au « Commissariat à l'Énergie Atomique » d'une Bourse de Thèse.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. MANDELBROJT et S. MANDELBROJT, *J. Math. Phys.*, t. 6, 1965, p. 974.
- [2] S. MANDELBROJT, *J. Anal. Math.* (Jérusalem), t. 10, 1962-1963, p. 381.
- [3] G. F. CHEW et F. E. LOW, *Phys. Rev.*, t. 101, 1956, p. 1570.
- [4] M. J. MORAVCSIK et H. P. NOYES, *Ann. Rev. Nuclear Sci.*, t. 11, 1961, p. 95.
- [5] B. U. Korenblum, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, t. 170, 1966, p. 286.

## APPENDICE

Dans l'espace des  $x$  la fonction canonique est la transformée de Fourier de

$$\Pi(r) \quad (r = |\vec{x}|)$$

$$\Pi(r) = \frac{\sin^2 ar}{ar^2} \prod_1^{\infty} \frac{\sin \mu_n r}{\mu_n r}$$

avec

$$|\Pi(r)| \leq \exp(-C(r))$$

les «  $\mu_n$  » sont déterminés par l'équation

$$C(1/\mu_n) = n \quad n \text{ entier.}$$

Les trois premiers  $\mu_n$  ont pour valeur

$$\mu_1 = 1,45 \quad \mu_2 = 1,3 \quad \mu_3 = 1,15.$$

Pour le calcul numérique de la transformée de Fourier nous avons pris 400 valeurs de  $\mu_n$ .

Le paramètre de normalisation «  $a$  » est évalué par la condition

$$\hat{\Pi}_a(0) = 1$$

on trouve  $a = 0,256$ .

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1966).