ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. MANDELBROJT

Comparaison d'un hamiltonien de Fermi et d'un hamiltonien de Yukawa

Annales de l'I. H. P., section A, tome 7, nº 3 (1967), p. 257-269

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1967__7_3_257_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 3, 1967, p. 257-269.

Section A :
Physique théorique.

Comparaison d'un hamiltonien de Fermi et d'un hamiltonien de Yukawa

par

J. MANDELBROJT
(Physique Théorique, Université d'Aix-Marseille).

INTRODUCTION

Il est bien connu depuis les travaux de B. Jouvet qu'une théorie de Yukawa devient lorsque $Z_3 \to 0$ équivalente à une théorie de Fermi. On peut se demander inversement si étant donné un hamiltonien de fermions ayant une interaction de Fermi, et ayant un état lié du type boson, on peut trouver un hamiltonien de Yukawa qui donne l'interaction de cet état lié avec le champ de fermion. Ce problème qui se ramène à comparer un hamiltonien de Fermi et un hamiltonien de Yukawa admet d'après ce qui a été dit, une solution qui est celle où le boson de la théorie de Yukawa a sa constante de rénormalisation Z_3 nulle. Nous nous proposons de voir s'il n'y a pas, au moins avec une approximation dont nous préciserons la nature, et pour certains phénomènes physiques, une autre solution. Cette autre solution, que nous mettrons en évidence, correspond à la notion de « hamiltonien effectif ».

I. — Nous considérons donc un hamiltonien $H_F = H_F^0 + H_F^I$ de nucléons antinucléons ayant une interaction de Fermi, H_F^0 est le hamiltonien du champ libre, H_F le hamiltonien d'interaction.

Nous désignerons par b_{qr}^*, b_{qr}, d_{qr}^*, d_{qr}, les opérateurs de création et d'annihilation des nucléons et des antinucléons nus d'impulsion q et d'indice de spin r. $B_{Fqr}^{*\pm}$, $B_{Fqr}^{\pm}$, $D_{Fqr}^{*\pm}$, $D_{Fqr}^{\pm}$, sont les opérateurs physiques correspondants, les exposants $+$ ou $-$ indiquent s'il s'agit de particules entrantes ou sortantes, l'indice F indique qu'il s'agit des opérateurs physiques correspondants au hamiltonien de Fermi. Les opérateurs de création et d'annihilation des particules physiques ont été étudiés en détail par Madeleine Sirugue-Collin [2] (article désigné dans ce qui suit par M. S. C.) et par Raoelina Andriambololona [3]; ils sont définis par les conditions

$$[\mathrm{H_F}, \mathrm{B}^{*\pm}_{\mathrm{F}qr}] = (\mathrm{E}_q \pm i\varepsilon)\mathrm{B}^{*\pm}_{\mathrm{F}qr} \quad (\mathrm{E}_q = q^2 + \mathrm{M}^2,\ \mathrm{M} \text{ masse de la particule physique})$$

$$(1) \qquad [\mathrm{B}^{+}_{\mathrm{F}qr}, \mathrm{B}^{*+}_{\mathrm{F}q'r'}] = \delta(q - q')\delta rr'$$

$$[\mathrm{B}^{-}_{\mathrm{F}qr}, \mathrm{B}^{*-}_{\mathrm{F}q'r'}] = \delta(q - q')\delta rr'$$

et les conditions analogues pour les opérateurs D.

Nous supposons avec M. S. C. que la masse du nucléon mathématique est choisie égale à la masse du nucléon physique.

Nous supposons en outre que le hamiltonien $\mathrm{H_F}$ admet un état lié de type méson (c'est-à-dire de nombre baryonique zéro) dont nous désignerons les opérateurs de création et d'annihilation par $\mathrm{A}^{*\pm}_{\mathrm{F}p}$ et $\mathrm{A}^{\pm}_{\mathrm{F}p}$ pour un méson d'impulsion p.

$\mathrm{H_F}$ peut alors s'écrire identiquement sous deux formes

$$\mathrm{H_F} = \sum_r \int d^3p\mathrm{E}_p(b^*_{pr}b_{pr} + d^*_{pr}d_{pr})$$

$$+ \frac{\mathrm{G}}{(2\pi)^3}\sum_{rs\mu\nu}\int d^3p_1d^3p_2d^3p_3d^3p_4\delta^3(p_1 - p_2 + p_3 - p_4)(-i\sigma_2)_{rs}(+i\sigma_2)_{\mu\nu} \times b^*_{p_1r}d^*_{-p_2s}d_{-p_3\mu}b_{p_4\nu}$$

(nous avons choisi ici un hamiltonien de Fermi particulier pour illustrer notre propos)

et

$$\mathrm{H_F} = \sum_r \int d^3p\mathrm{E}_p(\mathrm{B}^{*+}_{\mathrm{F}pr}\mathrm{B}^{\pm}_{\mathrm{F}pr} + \mathrm{D}^{*+}_{\mathrm{F}pr}\mathrm{D}^{\pm}_{\mathrm{F}pr}) + \int d^3p\Omega_p\mathrm{A}^{*\pm}_{\mathrm{F}p}\mathrm{A}^{\pm}_{\mathrm{F}p}$$

Le vide physique $\Psi_{\mathrm{F}0} >$ est défini par les conditions

$$\mathrm{B}^{\pm}_{\mathrm{F}pr}\Psi_{0\mathrm{F}} > = 0$$

$$\mathrm{D}^{\pm}_{\mathrm{F}pr}\Psi_{0\mathrm{F}} > = 0$$

$$\mathrm{A}^{\pm}_{\mathrm{F}p}\ \Psi_{0\mathrm{F}} > = 0$$

Considérons d'autre part un hamiltonien de Yukawa. $H_Y = H_{0Y} + H_{IY}$

$$\begin{aligned} H_{0Y} &= \sum_r \int d^3p E_p \{ b^*_{pr} b_{pr} + d^*_{pr} d_{pr} \} + \int d^3k \omega_k a^*_k a_k \\ H_{IY} &= \frac{f}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{rs} \int d^3k d^3p_1 d^3p_2 \delta^3(p_1 - p_2 - k) \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} (-i\sigma_2)_{rs} \\ &\qquad \times [b^*_{p_1 r} d^*_{-p_2 s} a_k - a^*_{-k} d_{-p_1 r} b_{p_2 s}] \end{aligned}$$

Nous avons choisi la forme de l'interaction de façon que H_Y devienne H_F pour $Z_3 = 0$.

Nous désignons par $A^{*\pm}_{Yp}$, $A^{\pm}_{Yp}$, $B^{*\pm}_{Ypr}$, $B^{\pm}_{Ypr}$, $D^{*\pm}_{Ypr}$, $D^{\pm}_{Ypr}$, les opérateurs physiques correspondants. Ils satisfont aux relations (1′) analogues à (1) où l'indice F est simplement remplacé par l'indice Y. Le hamiltonien de Yukawa s'écrit en terme des opérateurs physiques sous la forme

$$H_Y = \sum_r \int d^3p E_p (B^{*\pm}_{Ypr} B^{\pm}_{Ypr} + D^{*\pm}_{Ypr} D_{Ypr}) + \int d^3p \Omega_p A^{*\pm}_{Yp} A^{\pm}_{Yp}$$

Nous avons supposé ici que la masse des particules physiques de cette théorie de Yukawa était la même que celle des particules physiques de la théorie de Fermi précédente. Le vide physique dans la théorie de Yukawa est défini par

$$A^{\pm}_Y \Psi_{0Y} > = 0$$

$$B^{\pm}_Y \Psi_{0Y} > = 0$$

$$D^{\pm}_Y \Psi_{0Y} > = 0$$

Les hamiltoniens de Fermi et de Yukawa seront équivalents s'il existe une transformation formellement unitaire e^{iS} telle que le transmué par e^{iS} des opérateurs physiques de la théorie de Fermi, soient les opérateurs physiques correspondants de la théorie de Yukawa. On aura alors $e^{iS}\Psi_{0F} > = \Psi_{0Y} >$ et les probabilités de transitions calculées à partir des deux théories seront les mêmes. Notre but est de trouver une telle transformation e^{iS}. Remarquons que dans le cas $Z_3 = 0$ nous trouverons que H_F est identique à H_Y et la transformation e^{iS} se réduit alors à l'unité.

II. — EXPRESSION AUX PREMIERS ORDRES DES OPÉRATEURS PHYSIQUES DANS LA THÉORIE DE FERMI ET DANS LA THÉORIE DE YUKAWA

On obtient les premiers ordres du développement des opérateurs physiques dans les théories de Fermi et de Yukawa en écrivant que les relations (1) et (1′) respectivement sont satisfaites à cet ordre d'approximation. Ce calcul a été effectué par Madeleine Sirugue-Collin [2] et donne :

$$A_{Fp}^{\{\pm\}*} = \sum_{rs} \int d^3k(\theta)_{rs} \lambda_p^{\{\pm\}}(k) b_{kr}^* d_{p-ks}^* \qquad \theta = (i\sigma_2)_{rs}$$

L'énergie Ω_p du méson état lié est solution de

$$1 + \frac{2G}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_{p-k} + E_k - \Omega_p} = 0$$

$$\lambda_p(k) = \frac{\sqrt{I_p}}{E_k + E_{p-k} - \Omega_p} \qquad I_p = \int \frac{d^3k}{(E_{p-k} + E_k - \Omega_p)^2}$$

La valeur de I_p est choisie de sorte que $[A_{Fk}^{\pm}, A_{Fk'}^{\pm *}] = \delta(k - k')$.

$$B_{Fqr}^{\{\pm\}*} = b_{qr}^* + \sum_{s\mu\nu} \int d^3k d^3l (-i\sigma_2)_{rs} (-i\sigma_2)_{\mu\nu} f_q^{\{\pm\}}(kl) b_{l\mu}^* d_{k-l\nu}^* d_{k-qs}$$

avec

$$f_q^{\{\pm\}}(kl) = \frac{G}{(2\pi)^3} \frac{1}{(E_q + E_{k-q} - E_l - E_{k-l} \pm i\varepsilon)\left(1 - \frac{2G}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3t}{E_q + E_{k-q} - E_t - E_{k-t} \pm i\varepsilon}\right)}$$

les opérateurs A_F, B_F, D_F^*, D_F, s'obtiennent à partir des précédents par des transformations évidentes.

Les opérateurs physiques de la théorie de Yukawa au même ordre d'approximation (l'ordre d'approximation est d'une façon générale définie dans M. S. C. [2])

$$A_{Yp}^{\{\pm\}*} = Z_p^{1/2} \left\{ a_p^* + \sum_{rs} \int d^3k g_p^{\{\pm\}}(k) (+ i\sigma_2)_{rs} b_{kr}^* d_{p-ks}^* \right\}$$

avec

$$g_p(k) = \frac{f}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \frac{1}{E_{k-p} + E_k - \Omega_p}$$

l'énergie nue du méson et l'énergie renormalisée sont liées par la relation

$$\Omega_p - \omega_p = -\frac{f^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \int \frac{d^3k}{E_{p-k} + E_k - \Omega_p}$$

$$B_{Yqr}^{\{\pm\}*} = b_{qr}^* + \sum_s \int d^3k\,(-i\sigma_2)_{rs} a_k^* d_{k-qs} f_{1,q}^{\{\pm\}}(k)$$
$$+ \sum_{s\mu\nu} \int d^3k d^3l\,(-i\sigma_2)_{rs}\,(+i\sigma_2)_{\mu\nu} b_{l\mu}^* d_{k-l\nu}^* d_{k-qs} f_{2,q}^{\{\pm\}}(kl)$$

avec

$$f_{1,q}^{\{\pm\}}(k) = \lim_{\varepsilon \to 0+}$$
$$\frac{f}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{E_{k-q} + E_q - \omega_k - \dfrac{f^2}{(2\pi)^3} \dfrac{1}{\omega_k} \displaystyle\int \frac{d^3l}{E_{k-q} + E_q - E_{k-l} - E_l \pm i\varepsilon}}$$

$$f_{2,q}^{\{\pm\}}(kl) = \lim_{\varepsilon \to 0+} -\frac{f}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{f_{1,q}^{\{\pm\}}(k)}{E_q + E_{k-q} - E_{k-l} - E_l \pm i\varepsilon}$$

les opérateurs A_Y, B_Y, D_Y^*, D_Y s'obtiennent à partir des précédents par des transformations évidentes.

III. — RECHERCHE DE LA TRANSFORMATION e^{is}

Nous cherchons S sous une forme générale qui fasse intervenir les groupes d'opérateurs dont A_Y^* est composé au premier ordre.

$$S = \int \{ 2h a_p^* a_p + (g_1 + ig_2) A_{F_p}^* a_p + (g_1 - ig_2) a_p^* A_{F_p} \} d^3p$$

il nous sera utile par la suite de poser

$$g_1 = g \cos\alpha \quad , \quad g_2 = g \sin\alpha \ (g > 0) \rho = \sqrt{h^2 + g^2}$$

Calcul de $e^{iS}A^*_{Fp}e^{-iS}$.

Nous utilisons la formule de Dyson

$$e^{iS}A^*_{F_p}e^{-iS} = A^*_{F_p} + \frac{i}{1\,!}[S, A^*_F] + \frac{i^2}{2\,!}[S, [S, A^*_F]] + \dots$$

Les relations de commutation

$$[S, A^*_{F_p}] = a^*_p(g_1 - ig_2)$$
$$[S, a^*_p] = 2ha^*_p + (g_1 + ig_2)A^*_{F_p}$$

donnent si l'on pose

$$[S, \dots [S, A^*_{F_p}]] = \alpha_n a^*_p + \beta_n A^*_{F_p}$$

les relations de récurrence

$$\alpha_{n+1} = 2h\alpha_n + (g_1 - ig_2)\beta_n$$
$$\beta_{n+1} = (g_1 + ig_2)\alpha_n$$

qui se résolvent et donnent

$$e^{iS}A^*_{F_p}e^{-iS} = \frac{e^{ih}}{\rho}\left\{ (ig\,(\cos\alpha - i\sin\alpha)\sin\rho)a^*_p + (ih\sin\rho + \rho\cos\rho)A^*_{F_p} \right\}$$

Calcul de $e^{iS}B^{*\pm}_{Fqr}e^{-iS}$.

Nous calculons d'abord $e^{iS}b^*_{qr}e^{-iS}$ par la formule de Dyson.

$$[S, b^*_{qr}] = (g_1 - ig_2)\sum_s \int d^3k\,(-i\sigma_2)_{rs}a^*_k d_{k-\bar{q}s}\lambda_q(k)$$

$$[S[S, b^*_{qr}]] = 2h(g_1 - ig_2)\sum_s \int d^3k\,(-i\sigma_2)_{rs}a^*_k d_{k-qs}\lambda_q(k)$$
$$+ (g_1 - ig_2)(g_1 + ig_2)\sum_{s\mu\nu} \int d^3k d^3l\,(-i\sigma_2)_{rs}(i\sigma_2)_{\mu\nu}b^*_{l\mu}d^*_{k-l\nu}d_{k-qs}\lambda_l(k)\lambda_k(q)$$
$$+ \text{terme en } a^*_k b^*_k$$

Dans $e^{iS}b^*_{qr}e^{-iS}$ nous sommons à tous les ordres de la formule de Dyson le terme en a^*d et nous retenons en outre le terme en b^*d^*d qui apparaît dans $[S(S, b^*)]$.

Avec cette approximation nous avons :

$$e^{iS}b^*_{qr}e^{-iS} = b^*_{qr} + (g_1 - ig_2)\frac{e^{i\frac{h}{2}} - 1}{\frac{h}{2}}\sum_s \int d^3k\,(-\,i\sigma_2)_{rs}a^*_k d_{k-qs}\lambda_q(k)$$
$$+\, g^2\sum_{s\mu\nu}\int d^3kd^3l\,(-\,i\sigma_2)_{rs}(i\sigma_2)_{\mu\nu}b^*_{l\mu}d^*_{k-l\nu}d_{k-qs}\lambda_l(k)\lambda_k(q)$$

Calcul de $e^{iS}B^*_{Fqr}e^{-iS}$.

$$B^{\pm *}_{Fqr} = b^*_{qr} + \sum_{s\mu\nu}\int d^3kd^3l(i - \sigma_2)_{rs}(-\,i\sigma_2)_{\mu\nu}f^{\pm}_q(k, l)b^*_{l\mu}d^*_{k-l\nu}d_{k-qs}$$

Pour calculer approximativement $e^{iS}B^*_{Fqr}e^{-iS}$, nous remplaçons $e^{iS}b^*e^{-iS}$ par l'expression trouvée ci-dessus et nous ne modifions pas le terme en b^*d^*d c'est-à-dire que pour ce terme nous gardons le terme d'ordre zéro de la transformée de Dyson.

On obtient ainsi

$$e^{iS}B^*_{Fqr}e^{-iS} \approx b^*_{qr} + (g_1 - ig_2)\frac{e^{i\frac{h}{2}} - 1}{\frac{h}{2}}\sum_s \int d^3k\,(-\,i\sigma_2)_{rs}a^*_k d_{k-qs}\lambda_q(k)$$
$$+ \sum_{s\mu\nu}\int d^3kd^3l\,(-\,i\sigma_2)_{rs}(-\,i\sigma_2)_{\mu\nu}f_q(k, l)b^*_{l\mu}d^*_{k-l\nu}d_{k-qs}$$
$$+\, g^2\sum_{s\mu\nu}\int d^3kd^3l\,(-\,i\sigma_2)_{rs}(i\sigma_2)_{\mu\nu}b^*_{l\mu}d^*_{k-l\nu}d_{k-qs}\lambda_l(k)\lambda_k(q)$$

IV. — IDENTIFICATION DES OPÉRATEURS PHYSIQUES

Le hamiltonien de Fermi étant supposé donné, les inconnues de notre problème sont les paramètres qui interviennent dans le hamiltonien de Yukawa, à savoir $\frac{f}{\sqrt{\omega_k}}$, ainsi que les paramètres dont dépend la transformation e^{iS}. Nous les déterminons en écrivant qu'à l'ordre d'approximation considéré, on a

$$e^{iS}A_F^* e^{-iS} = A_Y^*$$

$$e^{iS}B_F^* e^{-iS} = B_Y^*$$

les conditions sur A_F, A_Y, B_F, B_Y, D_F^*, D_F^* et D_F, D_Y étant alors automatiquement satisfaites.

1. — Identification de $e^{iS}A_F^* e^{-iS}$ avec A_Y^*.

Cette identification donne deux conditions :

d'une part la réalité du rapport des coefficients de b^*d^* et de a^* dans $e^{iS}A_F^* e^{-iS}$,

d'autre part l'identification de ce rapport avec celui des mêmes termes dans A_Y^*. Ces deux conditions s'obtiennent immédiatement et s'écrivent respectivement

$$(A_1) \qquad -\frac{\rho}{g \sin \rho}\left(\cos \rho \cos \alpha + \frac{s}{\rho} \sin \rho \sin \alpha\right) = 0$$

et

$$(A_2) \qquad \frac{\rho}{g \sin \rho}\left(\cos \rho \sin \alpha - \frac{s}{\rho} \sin \rho \cos \alpha\right) = -\frac{f}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{I_k}}{\sqrt{2\omega_k}}$$

2. — Identification de $e^{iS}B_F^* e^{-iS}$ avec B_Y^*.

Cette identification donne trois conditions, d'une part l'identification du terme en a^*d de $e^{iS}B_F^* e^{-iS}$ qui donne deux conditions, une sur sa partie réelle, l'autre sur sa partie imaginaire (qui doit être nulle), d'autre part l'identification du terme en b^*d^*d de $e^{iS}B_F^* e^{-iS}$ et de B_Y^* qui s'avère impossible pour $Z \neq 0$, avec la forme de la transformation e^{iS} que nous avons choisi.

Nous examinons d'abord cette dernière condition.

Terme en b^*d^*d :

L'identification de ce terme donne

$$\frac{f^2}{(2\pi)^3 2\omega_k}\frac{1}{E_{k-q}+E_q-\Omega_k}+g^2\lambda^2(k)$$
$$-\frac{f^2}{(2\pi)^3\omega_k}\left(\int\frac{d^3l}{E_{k-l}+E_l-\Omega_k}+\int\frac{d^3l}{E_{k-q}+E_q-E_{k-l}-E_l\pm i\varepsilon}\right)$$
$$=\frac{G}{(2\pi)^3}\frac{1}{\left(1-\frac{2G}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3l}{E_q+E_{k-q}-E_l-E_{k-l}\pm i\varepsilon}\right)}$$

$$g^2\lambda^2(k)=\frac{G}{(2\pi)^3}\frac{1}{\left(1-\frac{2G}{(2\pi^3)}\int\frac{d^3l}{E_q+E_{k-q}-E_l-E_{k-l}\pm i\varepsilon}\right)}-\frac{f^2}{(2\pi)^3 2\omega(k)} \tag{B_3}$$
$$\times\frac{1}{E_{k-q}+E_q-\Omega_k-\frac{f^2}{(2\pi)^3\omega_k}\left(\int\frac{d^3l}{E_{k-l}+E_l-\Omega_k}+\int\frac{d^3l}{E_{k-q}+E_q-E_{k-l}-E_l\pm i\varepsilon}\right.}$$

le second membre considéré comme fonction de la variable $\frac{f^2}{\omega_k}$ est continu car le dénominateur ne s'annule pas du fait que $E + E - \Omega > 0$. De plus ce second membre a un signe constant quel que soit $\frac{f^2}{\omega_k}$, si en effet nous cherchons à l'annuler nous trouvons l'équation en $\frac{f^2}{2\omega_k}$

$$\frac{f^2}{(2\pi)^3 2\omega_k}\left(1+\frac{2G}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3l}{E_{k-l}+E_l-\Omega_k}\right)=\frac{G}{(2\pi)^3}(E_{k-q}+E_q-\Omega_k)$$

et d'après la condition qui donne la masse de l'état lié Ω en fonction de G la parenthèse du premier membre est nulle donc cette équation ne peut être satisfaite que pour $\frac{f^2}{2\omega_k}\to\infty$.

Si nous revenons maintenant à l'équation B_3 le second membre de cette équation a, d'après ce qui précède, le signe de

$$\frac{G}{(2\pi)^3}\frac{1}{\left(1-\frac{2G}{(2\pi)^3}\int\frac{d^3l}{E_q+E_{k-q}-E_l-E_{k-l}\pm i\varepsilon}\right)}$$

qui est négatif compte tenu

$$1 + \frac{2G}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{E_{p-k} + E_k - \Omega_p} = 0 \quad \text{et de} \quad E + E - \Omega > 0.$$

donc l'équation (B_3) où le premier membre est toujours positif, le 2^e^ membre toujours < 0 n'a pas de solution $\left(\text{autre que } \frac{f}{\omega_k} = \infty, g = 0\right)$ nous reviendrons dans la discussion au paragraphe suivant sur ce fait.

Terme en da.*

L'identification du terme en a^*d dans $e^{+iS}B_F^* e^{-iS}$ et dans B_Y^* donne les deux conditions (partie imaginaire et réelle du coefficient) :

$$(B_1) \qquad g \sin s \cos (s - \alpha) = 0$$

$$(B_2) \qquad -\frac{g}{s} \sin s \sin (s - \alpha) = \frac{f}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{1 - \frac{f^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \int \frac{d^3l}{(E_{k-l} + E_l - \Omega_k)(E_{k-q} + E_q - E_{k-l} - E_l)}}$$

Étude du système d'équations (A_1) (A_2), (B_1), (B_2).

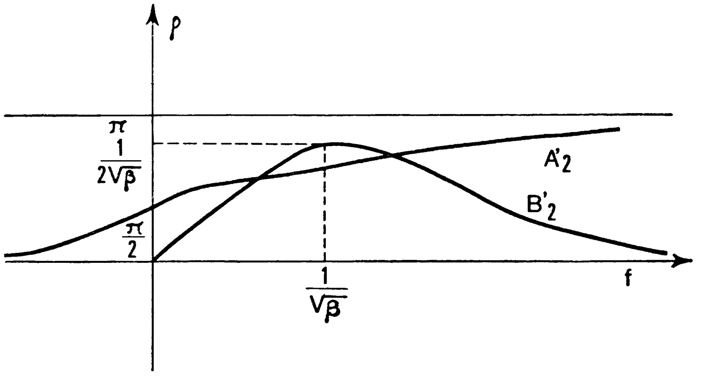
Ce système admet évidemment la solution $g = 0$ $\frac{f}{\sqrt{\omega_k}} = \infty$ qui correspond à $Z = 0$. Nous cherchons les autres solutions.

L'éliminateur des inconnues α et s se fait aisément à l'aide des équations A_1 et B_1 et conduit aux équations suivantes en ρ et $\frac{f}{\sqrt{\omega_k}}$

$$(A'_2) \qquad \frac{1}{\operatorname{tg} \rho} = \frac{f}{(2\pi)^3} \frac{\sqrt{E_k}}{\sqrt{2\omega_k}}$$

$$(B'_2) \qquad \rho = \frac{f}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \frac{1}{1 - \frac{f^2}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \int \frac{d^3l}{(E_{k-l} + E_l - \Omega_k)(E_{k-q} + E_q - E_{k-l} - E_l)}}$$

système d'équation que l'on résout graphiquement, il est aisé de voir que ce système d'équation (A'_2), (B'_2) admet au moins 2 solutions en $\frac{f}{\sqrt{2\omega_k}}$ pourvu que $\beta = \left| \int \frac{d^3 l}{(E_{k-l} + E_l - \Omega_k)(E_{k-q} + E_q - E_{k-l} - E_l)} \right|$ soit suffisamment petit puisque le maximum de ρ correspondant à la courbe B'_2 devient alors aussi grand que l'on veut pourvu que β soit suffisamment petit, ce qui correspond à une constante de Fermi G suffisamment grande ou encore, ce qui revient au même, au cut-off de la théorie de Fermi suffisamment petit.



DISCUSSION ET CONCLUSION

Nous avons mis en évidence une transformation e^{iS}, telle que les transmués, par cette transformation, des opérateurs des particules physiques d'une théorie de Fermi soient partiellement identifiables avec les opérateurs physiques d'une théorie de Yukawa. Nous avons également trouvé l'équation qui permet alors d'avoir la quantité $\frac{f^2}{\omega_k}$ (rapport du carré de la constante de couplage à l'énergie du méson) de cette théorie de Yukawa. Il reste à examiner si cette équivalence partielle a un intérêt physique. Autrement dit, cette équivalence partielle permet-elle de dire que les deux théories donnent les mêmes prévisions pour certains phénomènes physiques ?

Pour répondre à cette question, il est utile de considérer un autre modèle que celui que nous avons étudié, le modèle de Chew-low du hamiltonien de Yukawa correspondant à la limite non relativiste du hamiltonien PV, PV, et le modèle de Fermi correspondant.

Les calculs analogues à ceux que nous avons faits montreraient dans ce cas que l'on peut identifier au premier ordre le transmué de A_F^* avec A_Y^*, et également les termes en b^*a transmué de B_F^* avec le terme correspondant de B_Y^*. Ainsi avec cette équivalence restreinte on a l'équivalence des théories de Yukawa et de Fermi pour le méson physique et pour le nuage de mésons qui habille le nucléon, mais non pour l'habillage, en paires nucléon anti-nucléon, du nucléon. Si maintenant nous considérons la diffusion méson nucléon en source fixe, il n'est pas nécessaire d'avoir l'identité des termes en b^*d^*d de $e^{iS}B_F^*e^{-iS}$ et de B_Y^*. Remarquons cependant que même en se restreignant à ce phénomène, le calcul que nous avons fait n'a qu'un caractère préliminaire, il est en effet nécessaire d'introduire les termes d'ordre 4 dans A^*, et donc aussi dans S, si l'on veut avoir une diffusion méson nucléon car jusqu'à cet ordre $A^{*+} = A^{*-}$ et par conséquent l'élément de matrice $\langle B^-A^-A^{*+}B^{*+} \rangle$ ne permet de calculer la diffusion méson nucléon en source fixe que si A a des termes d'ordre 4 à partir desquels A^- diffère de A^+. Ces termes sont donnés explicitement dans M. S. C. [*2*].

Si maintenant nous nous intéressions à un autre phénomène physique tel que par exemple la diffusion nucléon nucléon, nous chercherions une transformation e^{iS} différente de la précédente car nous n'imposerions plus que le transmué de A_F^* soit A_Y^*.

Il est clair que la transformation e^{iS} correspondant à ce phénomène physique serait obtenu en fabriquant S à partir du groupe d'opérateurs qui interviennent dans le développement de B_Y^*. La raison pour laquelle nous ne pouvions pas identifier les termes en b^*d^*d de $e^{iS}A_F^*e^{-iS}$ et de A_Y^* dans le calcul que nous avons fait tient en effet au fait que l'expression de S n'a pas été choisie suffisamment riche, pour permettre cela, mais une forme plus générale aurait évidemment compliqué les calculs. C'est pourquoi il est bon pour chaque phénomène physique auquel on s'intéresse de choisir la transformation e^{iS} qui lui est adaptée.

Remarquons pour terminer que nous avons uniquement identifié les interactions de Fermi et de Yukawa pour des impulsions de b^*, d^* et a^* tendant vers 0. $e^{iS}B_F^*e^{-iS}$ ainsi que $e^{iS}A_F^*e^{-iS}$ diffèrent de B_Y^* et A_Y^* par des facteurs de forme. Ceci rejoint le phénomène déduit par Lovelace des équations de Fadeev, que dans l'interaction d'une particule composée et d'une particule élémentaire, intervient un facteur de forme correspondant à la fonction d'onde de l'état lié.

Je remercie M. Racœlina Andriambololona pour avoir rectifié une formule du paragraphe III.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] B. Jouvet, *Nuovo Cimento*, t. 3, 1133, 1956.
[*2*] M. Sirugue-Collin, *Nuovo Cimento*, t. 41, A 485, 1966.
[*3*] Racœlina Andriambololona, Thèse de doctorat d'État *(à paraître)*.

(Manuscrit reçu le 26 avril 1967).