ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

BERNARD LÉAUTÉ

Étude de la métrique de Kerr

Annales de l'I. H. P., section A, tome 8, nº 1 (1968), p. 93-115
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1968__8_1_93_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VIII, n° 1, 1968, p. 93-115.

Section A :
Physique théorique.

Étude de la métrique de Kerr

par

Bernard LÉAUTÉ
Stagiaire de recherche.
Institut Henri Poincaré [1]

RÉSUMÉ. — La métrique de Kerr est une solution stationnaire, à symétrie axiale, des équations d'Einstein du vide ; elle dépend de deux paramètres m et a. On montre que m peut être interprétée comme la masse du corps central, source du champ — théorème de Gauss — et — m/a comme un « courant de masse » le parcourant — théorème d'Ampère —. L'étude de la structure multipolaire du champ de Kerr fait apparaître un « moment quadrupolaire de masse » proportionnel à ma^2 et « un moment dipolaire de rotation » proportionnel à ma. En considérant les trajectoires des particules d'épreuve, on obtient un terme dépendant de a qui s'ajoute aux termes issus de la solution de Schwarzchild.

SUMMARY. — The Kerr metric is a stationnary axially symmetric solution of Einstein vacuum equations; it depends two parameters m and a. It is shown that m can be interpreted as the mass of the central body which is the source of the field—Gauss' theorem—and—m/a as a « mass current » travelling inside the body—Ampère's theorem—. The study of the multipole structure of the Kerr field reveals a « quadripole mass moment » proportionnal to ma^2, and a « dipole moment of rotation » proportionnal to ma. By considering the trajectoires of test particules, one reveals the existence of a term proportionnal to a, which does not exist in the Schwarzchild solution.

[1] Laboratoire de Physique Théorique associé au C. N. R. S.

NOTATIONS

Nous utiliserons des métriques de signature $+2(-+++)$.
Les indices grecs prendront les valeurs 0, 1, 2, 3.
Les indices latins les valeurs 1, 2, 3.
Le système d'unités sera tel que $G = 1$ et $c = 1$, sauf à propos de certains points particuliers où il apparaîtra souhaitable, pour plus de clarté, d'utiliser les unités habituelles.

I. — SOLUTION DE KERR. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES. INTERPRÉTATIONS

1. Introduction.

La métrique de Kerr appartient à une classe particulière de solutions des équations d'Einstein du vide [*1*]

$$R_{\mu\nu} = 0.$$

Cette classe est celle pour laquelle le tenseur métrique est de la forme :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2l_\mu l_\nu, \tag{I.1}$$

où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski et l_μ un vecteur isotrope par rapport à cette métrique

$$\eta^{\mu\nu}l_\mu l_\nu = 0 \tag{I.2}$$

Notons que ceci implique que :

$$g^{\mu\nu}l_\mu l_\nu = 0$$

Énonçons quelques-unes des propriétés des solutions de la forme (I.1).

a. Toutes les métriques de cette forme sont algébriquement dégénérées au sens de la classification de Bel-Pétrov [*2*], l_μ étant vecteur principal. Ainsi la congruence associée à l_μ est géodésique et sans distorsion.

b. Elles admettent un groupe d'isométries à un paramètre. Le vecteur de Killing $\vec{\xi}$, générateur du groupe, est aussi vecteur de Killing de la métrique minkowskienne. En fait, la transformation est une translation le long d'une direction qui peut être de genres temps, espace ou isotrope dans l'espace-temps de Minkowski. Il y a ainsi trois cas :

b_1. $$\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu < 0$$
b_2. $$\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu > 0$$
b_3. $$\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu = 0$$

c. Dans chacun de ces cas la solution générale est déterminée par une fonction analytique arbitraire.

2. Métrique de Kerr. Diverses formes. Propriétés.

La métrique de Kerr est une solution de type b_1 correspondant au choix d'une fonction analytique particulière dépendant d'un paramètre $a\,(a \geqslant 0)$. Rapportant la métrique de Minkowski à un système de coordonnées cartésien, x, y, z et t, la métrique de Kerr s'écrit :

$$\text{(I.3)} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2} \left[dt + \frac{z}{r}dz + \frac{r}{r^2 + a^2}(xdx + ydy) + \frac{a}{r^2 + a^2}(xdy - ydx) \right]^2$$

où r est une fonction réelle, positive définie par la relation :

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1$$

A l'aide du changement de coordonnées suivant :

$$\text{(I.4)} \quad \left| \begin{aligned} (r - ia)e^{i\varphi} \sin \theta &= x + iy, \\ r \cos \theta &= z, \\ u &= t + r. \end{aligned} \right.$$

On passe à une seconde forme de la métrique :

$$\text{(I.5)} \quad ds^2 = \alpha^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) + 2(du + a \sin^2 \theta d\phi)(dr + a \sin^2 \theta d\phi) - \left(1 - \frac{2mr}{\alpha^2}\right)(du + a \sin^2 \theta d\phi)^2$$

où l'on a posé :

$$\alpha^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta.$$

Considérant ces deux expressions de la métrique de Kerr nous pourrons déjà noter les propriétés et remarques suivantes :

(1) L'annulation de m conduit à la métrique de Minkowski, ceci est clair sur l'expression (I.3) ; par contre l'annulation de m dans la forme (I.5)

de la métrique de Kerr ne conduit pas à la version polaire de la métrique de Minkowski ; les coordonnées r, θ, ϕ ne constituent donc pas un système de coordonnées polaires.

L'introduction de coordonnées polaires $\tilde{r}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$ et l'utilisation des formules (I.4) conduisent aux relations :

$$\text{(I.6)} \qquad \left| \begin{array}{l} \tilde{r}^2 = r^2 + a^2 \sin^2 \theta, \\ \tilde{r} \cos \tilde{\theta} = r \cos \theta, \prec z \\ \tilde{\phi} = \phi - \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{a}{r}. \end{array} \right.$$

Si nous admettons que l'interprétation des coordonnées dans l'espace-temps de Kerr, se fait d'après la forme minkowskienne limite de cette métrique quand m est nulle, alors nous pourrons dire que les coordonnées polaires $\tilde{r}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$ sont aussi des coordonnées polaires pour $m \neq 0$.

Indiquons enfin que l'introduction de ces coordonnées ($\tilde{r}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\phi}$), dans l'expression de la métrique de Kerr, conduirait à une expression fort compliquée et d'un maniement difficile ; nous utiliserons donc les formes (I.3) et (I.5) recourant, si besoin est, aux formules (I.6).

(2) La métrique de Schwarzschild correspond au cas particulier $a = 0$.

(3) La métrique de Kerr a un comportement asymptotiquement euclidien.

(4) Les coefficients $g_{\alpha\beta}$ sont analytiques partout, sauf pour $r = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ c'est-à-dire, si l'on utilise (I.6), sur la circonférence Γ située dans le plan $z = 0$, centrée sur l'origine et de rayon a. $(\tilde{r} = a)$

(5) Enfin l'écriture des composantes du tenseur de courbure, par rapport à un repère orthonormé convenable, sous la forme :

$$R_{IJ} = \left| \begin{array}{ccc|ccc} -2\lambda & & 0 & -2\beta & & 0 \\ & \lambda & & & \beta & \\ 0 & & \lambda & 0 & & \beta \\ \hline -2\beta & & 0 & 2\lambda & & 0 \\ & \beta & & & -\lambda & \\ 0 & & \beta & 0 & & -\lambda \end{array} \right| \qquad \begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{mr}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}(r^2 - 3a^2\cos^2\theta) \\ \text{avec} \\ \beta = \dfrac{ma\cos\theta}{(r^2+a^2\cos^2\theta)^3}(a^2\cos^2\theta - r^2) \end{array}$$

montre que l'espace-temps de Kerr est du type IIa de la classification de Bel-Petrov ; par ailleurs ces quantités ($R_{\alpha\beta.\lambda\mu}$) sont singulières sur Γ.

$$\frac{1}{r^2+a^2\cos^2\theta} = \frac{1}{\tilde{r}^2 + a^2(2\cos^2\theta - 1)}$$

3. **Interprétations.**

a) Selon Kerr, la métrique pourrait être interprètée comme décrivant le champ de gravitation produit par un corps de révolution en rotation de son axe. Ceci se fonde (en partie) sur le fait que le développement limité à l'ordre trois des $g_{\alpha\beta}$ en une série de puissances de m et a, m étant supposée d'ordre deux et a d'ordre un, permet d'obtenir une expression approchée de la métrique de Kerr identique à la métrique de Lense et Thirring.

On a, en effet, faisant apparaître explicitement G et c, les expressions suivantes :

(Kerr)

$$ds^2 \simeq \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r_1}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{4Gma}{c^2 r_1^3}(xdy - ydx)cdt - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}\right)c^2 dt^2.$$

(L. et T.)

$$ds^2 \simeq \left(1 + \frac{2Gm}{c^2 r_1}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - \frac{4GI\omega}{c^3 r_1^3}(xdy - ydx)cdt - \left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r_1}\right)c^2 dt^2$$

d'où il ressort que *m est la masse du corps central et $-mac$ analogue de I, le moment angulaire autour de z.* $-mac \sim I\omega$

b) Compte tenu de la forme de la singularité des composantes du tenseur de courbure, Janis et Neuman pensent plutôt que le champ de Kerr correspond à *un tore de masse m en rotation autour de son axe* [*3*].

4. **Domaine de validité du système de coordonnées locales ; surfaces limitant ce domaine.**

Sur la variété V_4, la métrique doit être partout de type hyperbolique normal et, afin que les coordonnées locales conservent dans tout leur domaine de validité le même sens, on requiert en outre que :

$$g_{00}(x^\alpha) < 0,$$

de sorte que la coordonnée x^0 ait constamment un caractère temporel. Nous devons ainsi étudier le signe de l'expression :

$$g_{00}(r, \theta) = -\left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}\right)$$

$$= -\left(1 - \frac{2mr}{\tilde{r}^2 + a^2(2\cos^2\theta - 1)}\right)$$

$$= -\left(1 - \frac{2m\sqrt{\tilde{r}^2 + a^2(\cos^2\theta - 1)}}{\ldots}\right)$$

Nous constatons d'abord que la métrique est singulière sur la ligne Γ. L'étude des surfaces S_1, S_2 satisfaisant à l'équation :

$$g_{00}(r, \theta) = 0,$$

montre qu'il convient de distinguer trois cas suivant les valeurs relatives de m et a.

Si nous représentons les traces, C_1 et C_2 des surfaces S_1 et S_2, sur un plan passant par l'axe z, nous obtenons les figures suivantes :

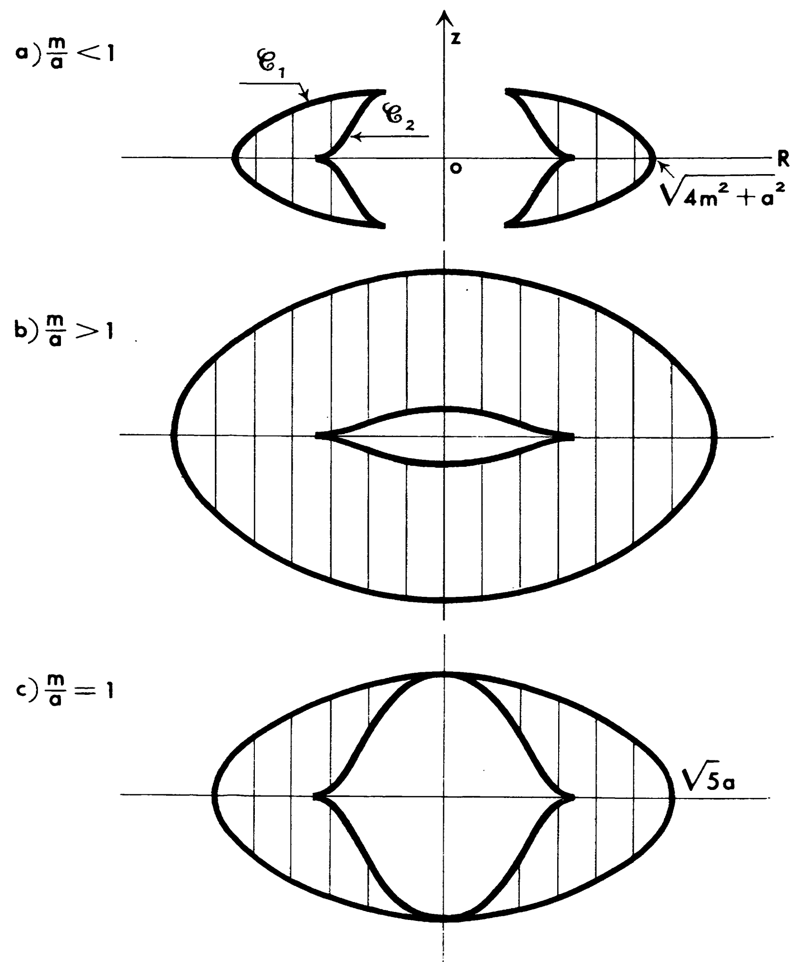

FIG. 1.

Les systèmes de coordonnées ne sont pas admissibles dans le domaine inclus entre les surfaces S_1 et S_2, ils sont admissibles partout ailleurs.

II. — EXPRESSIONS INTÉGRALES DES QUANTITÉS *m* ET *a*

A) Rappels sur la théorie des espaces-temps stationnaires.

1. Espace-temps stationnaire.

Un espace-temps riemannien V_4 est dit stationnaire s'il existe un groupe connexe à un paramètre d'isométries globales ne laissant invariant aucun point de V_4 et dont les trajectoires z, orientées dans le temps, sont homéomorphes à la droite réelle R. On appelle espace la variété quotient V_3 définie par la relation d'équivalence du groupe.

L'étude systématique des espaces-temps stationnaires a été faite par A. Lichnerowicz [*4*] ; nous en retenons ici quelques-unes des conclusions.

Il existe des systèmes de coordonnées locales x^α, adaptées au champ de vecteurs $\vec{\xi}$ générateur du groupe, pour lesquels les $g_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas de x^0 et $\vec{\xi}^2 = -\xi^2 = g_{00}$. Ces systèmes de coordonnées adaptées sont définis au changement suivant près :

$$x^{0'} = x^0 + \phi(x^i),$$
$$x^{i'} = x^{i'}(x^k).$$

Les variétés W_3, $x^0 = \text{cte}$ d'un système de coordonnées locales sont dites sections d'espace de ce système ; les x^i définissent sur elles des coordonnées locales. Elles sont conservées par les changements de la forme :

$$x^{i'} = \phi^{i'}(xj)$$

On appelle changement du système des sections d'espace, tout changement de coordonnées de la forme suivante :

$$x^i = x^{i'} \quad , \quad x^{0'} = x^0 + \psi(xj). \tag{II.1}$$

La métrique de V_4 peut être décomposée ainsi qu'il suit :

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \equiv -(\omega^0)^2 + d\hat{s}^2$$

en posant

$$\omega^0 = \frac{1}{\xi}(g_{00}dx^0 + g_{0i}dx^i)$$

et

$$d\hat{s}^2 \equiv \Sigma(\omega^i)^2 = \left(g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}}\right)dx^i dx^j. \tag{II.2}$$

Écrite en coordonnées adaptées la forme quadratique $d\hat{s}^2$ est indépendante de x^0 et de tout système de sections d'espace. Elle détermine sur V_3 une métrique riemannienne définie positive dont les tenseurs de V_3 :

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_{00}} \quad , \quad \hat{g}^{ij} = g^{ij} \tag{II.3}$$

sont les coefficients.

Les éléments, tenseurs, opérateurs, surmontés du signe ^ seront relatifs à cette métrique d'espace.

2. Application à la métrique de Kerr.

La métrique de Kerr est stationnaire par construction et, en outre, nous constatons, par inspection de la seconde forme de la métrique (I.5) que les $g_{\alpha\beta}$ ne dépendent pas non plus de la coordonnée ϕ, ceci indique que la métrique possède la symétrie axiale. Le changement de coordonnées suivant, donné sous forme différentielle,

$$\left|\begin{aligned} du &= dt - \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 - 2mr} dr, \\ d\phi &= d\Phi - \frac{a}{r^2 + a^2 - 2mr} dr \end{aligned}\right. \tag{II.4}$$

respecte la double adaptation des systèmes de coordonnées, aux caractères stationnaire et à symétrie axiale de la métrique, et permet d'aboutir à l'écriture dite canonique de la métrique de Kerr :

$$\left|\begin{aligned} ds^2 = \alpha^2\left[\frac{dr^2}{r^2 + a^2 - 2mr} + d\theta^2\right] + \left(r^2 + a^2 + \frac{2mr}{\alpha^2} a^2 \sin^2\theta\right) \sin^2\theta d^2\Phi \\ + \frac{4mr}{\alpha^2} a \sin^2\theta dt d\Phi - \left(1 - \frac{2mr}{\alpha^2}\right) dt^2. \end{aligned}\right. \tag{II.5}$$

Cette écriture se caractérise par la présence d'un seul terme rectangle g_{03} ; elle est donc particulièrement convenable pour effectuer des calculs et nous utiliserons maintenant cette troisième forme de la métrique de Kerr. Notons enfin que la nouvelle coordonnée Φ, ci-dessus introduite (II.4), est un bon angle polaire, elle coïncide avec $\tilde{\phi}$ à la limite $m = 0$. Les indices 0, 1, 2 et 3 se rapporteront respectivement aux coordonnées t, r, θ et Φ.

Exprimons la métrique quotient – (II.2)

$$\xi^2 \equiv - g_{00} = 1 - \frac{2mr}{\alpha^2}$$

(II.6)
$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &\equiv \hat{g}_{ij}dx^i dx^j \\ &= \alpha^2\left[\frac{dr^2}{r^2+a^2-2mr} + d\theta^2 + \left(\frac{r^2+a^2-2mr}{\alpha^2-2mr}\right)\sin^2\theta d\Phi^2\right] \end{aligned}$$

et

$$\sqrt{\hat{g}} = \frac{\alpha^3}{(\alpha^2-2mr)^{1/2}}\sin\theta.$$

3. Le tenseur d'espace H_{ij}.

Considérons le vecteur covariant ϕ_λ défini sur V_4, en coordonnées adaptées, par :

(II.7)
$$\phi_\lambda = \frac{g_{0\lambda}}{g_{00}}, \qquad (\phi_0 = 1)$$

Les composantes ϕ_i définissent sur W_3 un champ de vecteurs covariants. Par changement du système des sections d'espace (II.1) elles se transforment suivant :

(II.8)
$$\phi_i = \phi_{i'} + \partial_i \psi.$$

Le tenseur H_{ij}, rotationnel de ϕ_i, est bien défini sur V_3, d'après (II.8) et par le fait que :

$$H_{0\lambda} = \partial_0\phi_\lambda - \partial_\lambda\phi_0 \equiv 0.$$

Pour la métrique de Kerr on a pour expression des composantes de ϕ_i :

(II.9)
$$\phi_1 = \phi_2 = 0 \quad , \quad \phi_3 = -\frac{2mra\sin^2\theta}{\alpha^2-2mr}$$

et pour H_{ij} :

(II.10)
$$\begin{aligned} H_{23} &= \quad \partial_2\phi_3 = -\,4mra\sin\theta\cos\theta\left(\frac{r^2+a^2-2mr}{(\alpha^2-2mr)^2}\right) \\ H_{31} &= -\,\partial_1\phi_3 = -\,2ma\sin^2\theta\left(\frac{r^2-a^2\cos^2\theta}{\alpha^2-2mr}\right) \\ H_{12} &= \quad 0. \end{aligned}$$

Ainsi sur V_3 se trouvent définis, un scalaire ξ, une métrique $\hat{g}_{ij}$ et un tenseur antisymétrique H_{ij} ; sur chaque W_3 outre ces éléments on a un un champ de vecteurs ϕ_i, tel que

$$\hat{g}_{ij} = g_{ij} + \xi^2\phi_i\phi_j$$
$$H_{ij} = \partial_i\phi_j - \partial_j\phi_i$$

B) Équations de conservation. Expression des invariants correspondants.

4. Équations du champ.

Les équations du champ du cas extérieur $R_{\mu\nu} = 0$, peuvent être écrites pour un espace-temps stationnaire rapporté à un système de coordonnées adaptées ainsi qu'il suit :

$$\text{(II.11)} \qquad \left| \begin{aligned} &\widehat{R}_{ik} = \frac{1}{\xi}\widehat{\nabla}_k(\partial_i\xi) - \frac{\xi^3}{2}H_i{}^jH_{kj} \\ &\widehat{\nabla}_i(\xi^3H^i{}_j) = 0 \\ &\widehat{\Delta}\xi = -\frac{\xi^3}{2}H^2 \quad \text{où} \quad H^2 = \frac{1}{2}H_{ij}H^{ij}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons utiliser ces équations pour obtenir des relations de conservation puis, par intégration, nous calculerons les invariants correspondants.

a) Considérons le vecteur $\vec{h}$ défini comme suit :

$$\text{(II.12)} \qquad h_i = \partial_i\xi - \frac{\xi^3}{2}\phi_kH^k{}_{i}.$$

Il est bien connu que ce vecteur $\vec{h}$ satisfait la relation [*4*] :

$$\text{(II.13)} \qquad \widehat{\nabla}_ih^i = 0 \quad \text{ou} \quad \widehat{\operatorname{div}}\,\vec{h} = 0.$$

$\vec{h}$ n'est défini que sur les sections d'espace W_3, car il contient ϕ_i, mais sa $\widehat{\operatorname{div}}$ est définie intrinsèquement sur V_3.

Par changement du système des sections d'espace (II.1), $\vec{h}$ subit la transformation suivante :

$$h'_i = h_i - \frac{1}{2}(\partial_k\psi)\xi^3H^k{}_{i}.$$

Écrivons la divergence de cette quantité :

$$\text{(II.14)} \qquad \widehat{\nabla}_ih'^i = \widehat{\nabla}_ih^i - \frac{1}{2}\partial_k\psi\widehat{\nabla}_i(\xi^3H^{ki}) - \frac{1}{2}\xi^3H^{ki}\widehat{\nabla}_i(\partial_k\psi).$$

Les deux derniers termes du second membre sont nuls car :

$$\widehat{\nabla}_i(\xi^3H^{ki}) = 0$$

c'est le second groupe des équations du champ (II.11), et

$$\mathrm{H}^{ki}\hat{\nabla}_i(\partial_k\psi) = 0$$

en raison de l'antisymétrie du tenseur H^{ki}.

Ainsi :

$$\hat{\nabla}_i \mathrm{h}'^i = \hat{\nabla}_i h^i$$

et la divergence de $\vec{h}$ ne dépend pas de la section d'espace W_3 sur laquelle elle est calculée ; elle est donc intrinsèquement définie sur V_3.

b) Introduisons un second vecteur $\vec{\mathrm{B}}$ défini par l'expression :

$$\text{(II.15)} \qquad \mathrm{B}_k = \frac{1}{2}\hat{\eta}_{kij}\xi^3\mathrm{H}^{ij} \quad , \quad (\hat{\eta}_{kij} = \sqrt{\hat{g}}\varepsilon_{kij}).$$

Le second groupe des équations du champ (II.11) s'écrit, à l'aide de $\vec{\mathrm{B}}$;

$$\text{(II.16)} \qquad \underline{\mathrm{rot}\ \vec{\mathrm{B}} = 0.}$$

Nous allons maintenant exploiter ces relations (II.13) et (II.16).

5. **Théorème de Gauss pour l'espace-temps de Kerr.**

A l'aide des quantités ξ^2 (II.6), ϕ_k (II.9) et H_{ki} (II.10), nous obtenons pour expression des composantes de $\vec{h}$

$$\text{(II.17)} \qquad \left|\begin{aligned} h^1 &= \frac{m}{\alpha^7}(r^2 + a^2)(r^2 - a^2\cos^2\theta)(\alpha^2 - 2mr)^{1/2}, \\ h^2 &= -\frac{2m}{\alpha^7}a^2 r\sin\theta\cos\theta(\alpha^2 - 2mr)^{1/2}, \\ h^3 &= 0. \end{aligned}\right.$$

Considérons l'intégrale de volume suivante :

$$\text{(II.18)} \qquad \int_v \mathrm{di\hat{v}}\ \vec{h}\sqrt{\hat{g}}dv = \int_v \partial_i(\sqrt{\hat{g}}h^i)drd\theta d\phi$$

L'expression des composantes de $\vec{h}$ (de $\sqrt{\hat{g}}$) montre que la fonction à intégrer en (II.18) est formellement singulière pour $r = 0$ et $\theta = \pi/2$, c'est-à-dire sur la circonférence Γ (Ceci ne doit pas surprendre puisque les $g_{\alpha\beta}$ sont singuliers sur Γ). Nous devons distinguer deux cas :

1° *le volume v ne contient pas la ligne* Γ. La quantité $\mathrm{di\hat{v}}\ \vec{h}$ est identiquement nulle sur v et le théorème de Stokes permet de conclure que le flux de $\vec{h}$, sortant de S frontière de v, est nul.

2° *le volume v contient la ligne singulière* Γ. Un raisonnement simple, basé sur l'utilisation du théorème de Stokes, permet de voir que l'intégrale de flux :

(II.19) $$\int_S \vec{h}.\vec{n}d\sigma$$

est susceptible d'être non nulle et que sa valeur ne dépend pas de la forme de la surface S limitant le volume v contenant la singularité Γ.

Pour évaluer ce flux nous pouvons ainsi faire choix d'une surface de forme particulière simple, une sphère de centre O et de rayon $\tilde{r} = \mathrm{R}$ (constante) convient bien. Nous utilisons les coordonnées θ, ϕ comme des paramètres de calcul. L'équation de la sphère est :

$$\mathrm{R} = \sqrt{r^2 + a^2 \sin^2 \theta} \quad , \quad (\mathrm{R} > a)$$

l'élément d'aire :

$$d\sigma = \frac{\alpha^2}{r}\left[\frac{\mathrm{R}^2\alpha^2 - 2mr^3}{\alpha^2 - 2mr}\right]^{1/2} \sin \theta d\theta d\phi$$

les composantes de la normale unitaire :

$$n_1 = \frac{\alpha r}{(\mathrm{R}^2\alpha^2 - 2mr^3)^{1/2}}, \quad n_2 = \frac{\alpha a^2 \sin \theta \cos \theta}{(\mathrm{R}^2\alpha^2 - 2mr^3)^{1/2}}, \quad n_3 = 0.$$

Nous avons ainsi les éléments nécessaires au calcul de l'intégrale (II.19) :

$$\int_S \vec{h}.\vec{n}d\sigma$$
$$= 2\pi m \int_0^\pi \left[1 + \frac{a^2(1-3\cos^2\theta)}{[\mathrm{R}^2 - a^2 + 2a^2\cos^2\theta]} - \frac{4a^4(1-\cos^2\theta)\cos^2\theta}{[\mathrm{R}^2 - a^2 + 2a^2\cos^2\theta]^2}\right] \sin \theta d\theta.$$

Par intégration nous arrivons au résultat suivant :

(II.20) $$\underline{\int \vec{h}.\vec{n}d\sigma = 4\pi m.}$$

Et l'on peut énoncer : le flux du vecteur gravitationnel $\vec{h}$ sortant de la surface S entourant la masse agissante m, est égal à $4\pi m$.

6. **Théorème d' « ampère gravitationnel ».**

Nous examinons maintenant la seconde relation

$$\text{(II.16)} \qquad \operatorname{rot} \vec{\mathrm{B}} = 0.$$

Indiquons les composantes de $\vec{\mathrm{B}}$, calculées selon la formule (II.15) :

$$\text{(II.21)} \qquad \begin{aligned} \mathrm{B}_1 &= -\frac{4mar}{\alpha^4}\cos\theta, \\ \mathrm{B}_2 &= -\frac{2ma}{\alpha^4}\sin\theta(r^2 - a^2\cos^2\theta), \\ \mathrm{B}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Le raisonnement sera ici semblable, dans son principe, à celui mené précédemment. Nous sommes amenés à considérer l'intégrale :

$$\text{(II.22)} \qquad \int_s \operatorname{rot} \vec{\mathrm{B}}.\vec{\mathrm{N}}d\sigma.$$

La surface convexe S est limitée par un contour C.

L'expression (II.21) des composantes de $\vec{\mathrm{B}}$ montre que l'intégrant (II.22) est singulier si la surface S coupe la ligne Γ.

1 *Le contour C n'entoure pas la ligne singulière* Γ. La quantité rot $\vec{\mathrm{B}}$ est identiquement nulle sur la surface S, limitée par C, et le théorème de Stokes permet de conclure que la circulation de $\vec{\mathrm{B}}$, le long de C, est nulle.

2° *Le contour C entoure la ligne* Γ. La circulation de $\vec{\mathrm{B}}$ peut alors ne pas être nulle et elle ne dépend pas de la forme du contour C.

On fait le calcul en choisissant le contour indiqué par la figure ci-après.

On utilise les coordonnées r et θ comme paramètres. Nous avons ainsi :

$$\text{(II.23)} \qquad \oint \mathrm{B}_i dx^i = \underset{(\tilde{\theta}=0)}{\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{B}_i dx^i} + \underset{(\tilde{r}=\mathrm{R})}{\int_0^{\pi} \mathrm{B}_i dx^i} + \underset{(\tilde{\theta}=\pi)}{\int_{\mathrm{R}}^{0} \mathrm{B}_i dx^i}$$

Expression qui s'écrit d'une façon explicite :

$$\oint \mathrm{B}_i dx^i = -\int_0^{\mathrm{R}} \frac{mar\mathrm{R}}{(r^2 + a^2)} dr - \int_0^{\pi} 2am \frac{\mathrm{R}^2 - a^2 - 2a^2\cos^2\theta}{(\mathrm{R}^2 - a^2 + 2a^2\cos^2\theta)^2} \sin\theta d\theta.$$

Par intégration on aboutit à :

$$\oint B_i dx^i = -4\frac{m}{a} \tag{II.24}$$

Si l'on définit cette dernière quantité comme « intensité de courant de masse » alors on a l'énoncé suivant, tout à fait analogue au très classique théorème d'Ampère :

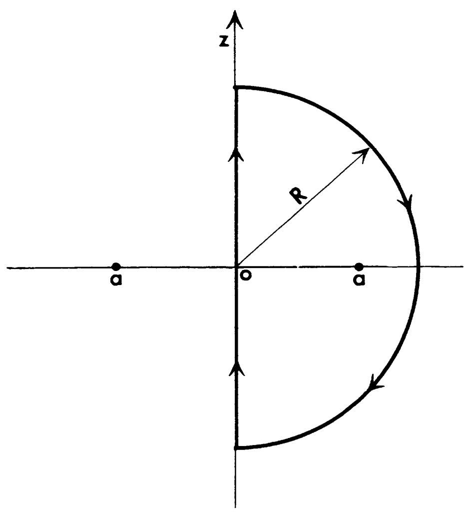

FIG. 2.

La circulation du vecteur gravitationnel $\vec{B}$ le long d'un contour C, entourant Γ, est égale à l'intensité $\left(-4\frac{m}{a}\right)$ du courant de masse parcourant ce circuit Γ.

7. **Structure multipolaire de la métrique de Kerr.**

Nous essayons maintenant de transposer au cas gravitationnel de la métrique de Kerr les notions de moments multipolaires électrique et magnétique. Notre analyse est liée au caractère asymptotiquement euclidien de la métrique ; en raison de ce fait nous utiliserons pour distance à l'origine la valeur de r.

a. *Moments multipolaires de masse.*

L'évaluation des contributions de chacun des termes composant $\vec{h}$ (II.12) permet de montrer que :

$$\vec{h} \simeq \overrightarrow{\text{grad}\ \xi} \leftrightarrow \text{rot}\ \vec{h} \simeq 0 \tag{II.25}$$

si l'on adopte pour expression de ξ (II.6) le développement limité suivant :

$$\xi(\tilde{r}, \tilde{\theta}) \simeq 1 - \frac{m}{\tilde{r}} - \frac{m^2}{2\tilde{r}^2} - \frac{m^3}{2\tilde{r}^3} + \frac{ma^2}{2\tilde{r}^3}(3\cos^2\tilde{\theta} - 1). \tag{II.26}$$

Les relations (II.25) montrent que $\vec{h}$ peut être considéré comme analogue du champ électrique $\vec{E}$ et $-(\xi - 1)$ de V le potentiel électrostatique.

Par ailleurs, de façon analogue à ce que l'on fait pour V, on peut écrire :

$$\xi - 1 \simeq -\sum_{l=0}^{2} A_l P_l (\cos\tilde{\theta})$$

où $P_l(\cos\tilde{\theta})$ est le polynome de Legendre d'ordre l.

Les moments multipolaires D_l étant définis par l'expression :

$$D_l = \lim_{\tilde{r}\to\infty} \tilde{r}^{l+1} A_l. \tag{II.27}$$

Compte tenu de cette définition, on constate l'existence *d'un terme monopolaire* (m) *et d'un terme quadrupolaire* (ma^2), il n'y a aucun terme dipolaire.

b. *Moment dipolaire de rotation.*

Si l'on se borne pour l'écriture de chaque composante de $\vec{B}$ (II.21) au terme principal en $\frac{1}{r}$ $\left(\text{ou } \frac{1}{\tilde{r}}\right)$, ceci revient à écrire en général :

$$B_k \simeq \frac{1}{2}\hat{\eta}_{kij}H^{ij} \tag{II.28}$$

et ainsi :

$$\hat{\text{div}}\ \vec{B} \simeq 0.$$

Relation aussi satisfaite par l'induction magnétique.

Les valeurs approchées des composantes de B, selon (II.28), sont :

$$(\text{II}.29) \qquad \left| \begin{array}{l} B_1 \simeq -\dfrac{4ma}{r^3}\cos\theta, \\[2ex] B_2 \simeq -\dfrac{2ma}{r^3}\sin\theta, \\[2ex] B_3 = 0. \end{array} \right.$$

Ces quantités sont tout à fait comparables aux composantes de l'induction magnétique créée par un dipole magnétique de moment M, à la condition de considérer comme analogues M et $-2ma$.

De ces considérations il ressort donc que $(-2ma)$ peut être noté « *moment dipolaire gravitationnel de rotation* ».

c. *Remarques.*

1. Nous avons dû poser la définition (II.27) des « moments multipolaires de masse » différente de celle qui est donnée habituellement en électromagnétisme, ceci en vue d'une interprétation correcte des divers termes du développement (II.26). Il faut noter en effet que les relations :

$$\widehat{\Delta}\xi \simeq 0,$$
$$\Delta V = 0$$

considérées comme analogues, diffèrent car l'opérateur $\widehat{\Delta}$ n'est pas linéaire.

2. Les notions de moment angulaire (chap. I-3), d'intensité de courant de masse et enfin de moment dipolaire de rotation sont bien cohérentes. Nous pourrions établir entre ces quantités les relations habituellement constatées en électromagnétisme (à un facteur 2π près lié aux unités).

III. — TRAJECTOIRES D'UNE PARTICULE D'ÉPREUVE DANS LE CHAMP DE KERR

1. Équations des trajectoires.

Nous savons qu'une particule d'épreuve soumise à un champ de gravitation se meut suivant les géodésiques de l'espace riemannien correspondant. Nous allons former les équations de ces lignes dans le cas de l'espace-temps de Kerr. Écrivons d'abord, pour ce faire, la fonction de Lagrange associée à la métrique de Kerr :

$$\text{(III.1)}\quad 2L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) \equiv \left[\frac{ds}{d\tau}\right]^2 = \alpha^2\left[\frac{\dot{r}^2}{r^2 + a^2 - \dfrac{2Gmr}{c^2}} + \dot{\theta}^2\right] + \left(r^2 + a^2 + 2G\frac{mra^2}{c^2\alpha^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\dot{\Phi}^2 + 4\frac{Gmra}{c^2\alpha^2}\sin^2\theta\dot{\Phi}\dot{t} - \left(1 - \frac{2Gm}{\alpha^2c^2}\right)c^2\dot{t}^2 = -1.$$

(τ est un paramètre affine particulier le temps propre ; la dérivation par rapport à τ est marquée par un point).

Écrivons ensuite les intégrales premières correspondant aux variables cycliques t et Φ :

$$\text{(III.2)}\quad p_0 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \frac{2Gmr}{\alpha^2c^3}a\sin^2\theta\dot{\Phi} - \left(1 - \frac{2Gmr}{\alpha^2c^2}\right)\dot{t} = -\frac{k}{c^2}\,;$$

$$\text{(III.3)}\quad p_3 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Gmr}{\alpha^2c^2}a^2\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\dot{\Phi} + \frac{2Gmr}{\alpha^2c^2}a\sin^2\theta\dot{t} = \frac{h}{c}$$

Ces intégrales premières expriment la constance des moments conjugués p_0 et p_3.

Enfin pour pouvoir déterminer complètement le mouvement il faut ajouter une équation de Lagrange, celle relative à θ :

$$\frac{d}{d\tau}(\alpha^2\dot{\theta}) - \left\{ -a^2\left(\frac{\dot{r}^2}{r^2 + a^2 - \dfrac{2Gmr}{c^2}} + \dot{\theta}^2\right) + \left[r^2 + a^2 + \frac{2Gm}{c^2}ra^2\sin^2\theta\left(\frac{2}{\alpha^2} + \frac{a^2\sin^2\theta}{\alpha^4}\right)\right]\dot{\Phi}^2 + 4\frac{Gmr}{\alpha^2c}a(r^2 + a^2)\dot{t}\dot{\Phi} + 2\frac{Gmr}{\alpha^4}a^2\dot{t}^2 \right\}\sin\theta\cos\theta = 0$$

Dans ces expressions on a rétabli G et c pour faciliter les comparaisons.

2. Étude des trajectoires planes.

Par inspection de l'équation (III.4) on constate que $\theta = \pi/2$ est solution particulière (Il faut supposer toutefois $r \neq 0$, c'est-à-dire $\tilde{r} \neq a$).

Il en résulte que, si initialement $\theta_0 = \pi/2$ et $\dot{\theta}_0 = 0$, le mouvement se fera selon $\theta = \pi/2$. L'utilisation des relations (I.6) reliant les coordonnées (r, θ) aux coordonnées $(\tilde{r}, \tilde{\theta})$, permet de montrer que les conditions initiales $\theta_0 = \pi/2$; $\dot{\theta}_0 = 0$ et $\tilde{\theta}_0 = \pi/2$, $\dot{\tilde{\theta}}_0 = 0$ sont équivalentes. Ainsi il est possible d'énoncer :

Si initialement la particule d'épreuve se trouve dans le plan XOY (plan de la singularité Γ) avec une vitesse initiale dirigée suivant ce plan, son mouvement tout entier se déroulera dans ce plan.

Remarque.

Nous allons étudier les trajectoires de façon approchée. L'étude dans le cas $GM/c^2a \ll 1$ conduirait à un résultat identique à celui qui serait obtenu en utilisant la métrique de Lense et Thirring (chap. I-3), aussi nous nous placerons dans l'hypothèse $Gm/c^2a \gg 1$.

Nous menons les calculs en développant les divers termes au premier ordre en a.

a) A partir des équations (III.2) et (III.3), il est possible d'éliminer τ et ainsi d'obtenir la relation suivante, comparable à la loi des aires classique :

$$(\text{III}.5) \quad r^2 \frac{d\Phi}{dt} \simeq \frac{hc}{k}\left(1 - \frac{2Gm}{\tilde{r}c^2}\right) - \frac{2Gma}{\tilde{r}c^2} - \frac{2Gma}{\tilde{r}^3 c}\left(\frac{h}{k}\right)^2 + \left(\frac{2Gm}{\tilde{r}^2c^2}\right)^2 ac\left(\frac{h}{k}\right)^2$$

Faisant a nul, on retrouve l'expression qui serait déduite de la métrique de Schwarzshild.

b) *Équation des trajectoires planes.*

Cette équation est obtenue en substituant dans (III.1), à $\dot{\Phi}$ et $\dot{t}$ leurs valeurs tirées de (III.2) et (III.3). On aboutit ainsi à l'équation exacte :

$$(\text{III}.6) \quad \frac{1}{r^2 + a^2 - \dfrac{2Gmr}{c^2}} \left\{ \left(\frac{rdr}{d\Phi}\right)^2 \left[\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)\frac{h}{c} - \frac{2Gma}{rc^3}k\right]^2 \right.$$
$$\left. + \left[\left(1 - \frac{2Gm}{c^2r}\right)\frac{h^2}{c^2} - 4\frac{Gma}{rc^4}hk - \left(r^2 + a^2 + \frac{2Gma^2}{c^2r}\right)\frac{k^2}{c^2}\right] \right\} + 1 = 0.$$

Comme on le conçoit facilement l'étude de cette relation exacte est peu aisée. Nous poursuivons en développant (III.6) au premier ordre en a et en posant :

$$\frac{1}{\tilde{r}} = u \quad \text{et} \quad \tilde{r}^2 = r^2 + a^2 \quad \text{pour} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

Après réarrangement des termes nous obtenons :

$$\text{(III.7)} \quad \left(\frac{du}{d\Phi}\right)^2 \simeq \frac{2GM}{c^2}u^3 - \left[1 - 2\left(\frac{2Gm}{c^2}\right)^2\left(\frac{k}{h}\right)^3 a\right]u^2 + \frac{2Gm}{h^2}\left[1 + 2a\frac{k}{h}\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right)\right]u + \frac{c^2}{h^2}\left(\frac{k^2}{c^2} - 1\right) \equiv f(u),$$

et

$$f(u) = \frac{2Gm}{c^2}(u - u_1)(u - u_2)(u - u_3)$$

où u_1, u_2, u_3 sont les racines de $f(u)$. Parvenu à ce stade du calcul nous constatons que le polynôme $f(u)$ est très semblable à celui qui serait obtenu en partant de la métrique de Schwarzschild ($a = 0$), et nous nous proposons d'appliquer à (III.7) la méthode donnée par Synge [5] dans ce cas.

Nous supposons ainsi $u_1 < u_2 < u_3$ si ces racines sont toutes réelles. Si nous nous restreignons à l'étude des orbites à périhélie, en ce point nous avons :

$$\text{(III.8)} \qquad \frac{du}{d\Phi} = 0 \rightarrow f(u) = 0.$$

Il ressort de (III.7) que $f(u)$ doit être positive pour des valeurs de u appartenant à l'orbite, car $(du/d\Phi)^2$ l'est nécessairement. En outre le coefficient de u^3 étant positif, $f(u)$ est positive pour les grandes valeurs de u. De ceci on peut conclure que les racines u_2 et u_3 sont positives, u_2 correspondant au périhélie. Il reste deux possibilités : u_1 positif, il s'agit d'une orbite de type elliptique dont u_1 est l'aphélie ; u_1 est négatif, il s'agit d'une orbite de type hyperbolique.

La résolution de l'équation (III.7) par quadrature et inversion, toujours suivant Synge, permet d'arriver aux conclusions suivantes :

(1) Toutes les orbites géodésiques ayant un périhélie satisfont

$$\text{(III.9)} \qquad u - u_1 = (u_2 - u_1)sn^2\left[\frac{\Phi}{2}\sqrt{\frac{2Gm}{c^2}(u_3 - u_1)} + \delta\right]$$

Cette expression conduit par approximation, à :

$$u - u_1 \simeq (u_2 - u_1)\sin^2\left(\frac{\Phi}{2} + \delta\right).$$

On retrouve ainsi les orbites newtoniennes, ellipses ou hyperboles suivant que $u_1 > 0$ ou $u_1 < 0$.

(2) L'évaluation de l'écart $\Delta\Phi$ entre deux périhélies successifs se fait à partir de la période 4 T de la fonction elliptique sn^2 (III.9). On obtient :

$$\Delta\Phi = \frac{4T}{\sqrt{2\frac{Gm}{c^2}(u_3 - u_1)}} \tag{III.10}$$

et

$$T = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - K^2y^2)}}, \tag{III.11}$$

où l'on a posé :

$$y = \sqrt{\frac{u - u_1}{u_2 - u_1}} \quad , \quad K = \sqrt{\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}} \tag{III.12}$$

Les relations entre les racines u_1, u_2, u_3 de $f(u)$ (III.7) permettent l'élimination de u_3 de l'expression de K et ensuite, compte tenu du fait que K est petit, on calcule T comme suit, en négligeant K^4 :

$$T = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}\left(1 + \frac{1}{2}K^2\right)dy = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}K^2\right)$$

Finalement on obtient le résultat suivant, concernant cet écart :

$$\varepsilon \equiv \Delta\Phi - 2\pi = \underline{3\pi\frac{GM}{c^2}(u_1 + u_2)} + \underline{2\pi a\left(\frac{2Gm}{c^2}\right)^2\left(\frac{k}{h}\right)^3} \tag{III.13}$$

Le premier terme de ε, $3\pi Gm/c^2(u_1 + u_2)$ qui ne dépend pas de a, serait obtenu en partant de la métrique de Schwarzshild.

Le terme complémentaire est lié à a, c'est-à-dire au mouvement du corps central.

La valeur du rapport (k/h) pourrait être obtenue en fonction de u_1 et u_2, par utilisation des relations liant les racines u_1, u_2, u_3 aux coefficients du polynôme $f(u)$ (III.7). Il convient de noter toutefois qu'il subsiste une indétermination quant au signe de (k/h), ce signe serait obtenu en considérant la vitesse de rotation initiale de la particule $\dot{\Phi}_0$ et les valeurs des autres quantités m et a caractérisant le corps.

3. **Mouvements selon** *oz.*

Ils correspondent au cas $\tilde{\theta} = 0 (\leftrightarrow \theta = 0)$. Nous devons donc prendre les valeurs de L (III.1), p_0 (III.2) et p_3 (III.3) en faisant $\theta = 0$. Nous avons ainsi :

$$\text{(III.14)}\quad (2\mathrm{L}) \equiv \frac{r^2 + a^2}{r^2 + a^2 - 2\dfrac{\mathrm{G}mr}{c^2}}\dot{r}^2 - \left[1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right]c^2\dot{t}^2 = -1$$

$$\text{(III.15)}\quad p_0 \equiv -\left[1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right]\dot{t} = -\frac{k}{c^2},$$

$$p_3 = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{r} = r.$$

Éliminant $\dot{t}$, entre (III.14) et (III.15), nous obtenons, en posant $r' = dr/dt$:

$$\text{(III.16)}\quad r'^2 = c^2\left[1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right]^2\left[1 - \frac{c^2}{k^2}\left(1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right)\right].$$

Et en dérivant une fois par rapport à t, nous trouvons l'accélération r'' :

$$\text{(III.17)}\quad r'' = \mathrm{G}m\left[1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right]\left[2 - \frac{3c^2}{k^2}\left(1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right)\right]\frac{r^2 - a^2}{(r^2 + a^2)^2}.$$

L'étude du mouvement se fait selon les procédés de la mécanique classique, à l'aide de ces expressions r' et r''. On doit exiger que le second membre de (III.16) soit positif, les racines de cette expression fixant des limites aux mouvements possibles. Il faut aussi que (chap. I-3) :

$$\text{(III.18)}\qquad -(g_{00})_{\theta=0} = \left[1 - \frac{2\mathrm{G}mr}{c^2(r^2 + a^2)}\right] > 0.$$

Les résultats obtenus peuvent être résumés ainsi qu'il suit :

a) $$\underline{\frac{\mathrm{G}m}{c^2 a} < 1.}$$

$$\text{(1)}\qquad \left[\frac{dr}{dt}\right]_{t_0} > \left[1 - \frac{2\mathrm{G}mr_0}{c^2(r_0^2 + a^2)}\right]\left[\frac{2\mathrm{G}mr_0}{r_0^2 + a^2}\right]^{1/2} \equiv \mathrm{V_L}.$$

Pour des vitesses initiales assez importantes, supérieures à une vitesse limite $\mathrm{V_L}$, la particule d'épreuve peut atteindre des ordonnées de valeurs quelconques ; pratiquement, elle peut s'affranchir du champ du corps central.

(2) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t_0} < V_L$$

Pour des vitesses initiales assez faibles, inférieures à V_L, la particule décrit un mouvement oscillatoire entre r_1 et r_2 — (r_1 et r_2 sont les racines du second facteur du membre droit de (III.16) pour lesquelles $r' = 0$).

b) $$\frac{Gm}{c^2a} > 1$$

(1) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t_0} > V_L$$

Pour des vitesses initiales assez élevées ($> V_L$) la particule peut atteindre des ordonnées de valeurs quelconques.

(2) $$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t_0} < V_L$$

Pour des vitesses initiales assez faibles ($< V_L$) la particule atteint une ordonnée maximum r_1 puis revient, en un mouvement asymptotique, vers le corps central.

c) $$\frac{Gm}{c^2a} = 1$$

L'étude de ce cas limite conduirait à des conclusions sensiblement équivalentes aux précédentes.

Notons enfin que dans le cas de la métrique de Schwarzschild, on aurait pour V_L :

$$V_L = \left(1 - \frac{2Gm}{c^2r_0}\right)\left(\frac{2Gm}{r_0}\right)^{1/2}$$

CONCLUSIONS

A l'issue de ce travail, visant à préciser la structure de la métrique de Kerr et la situation physique qu'elle traduit, nous voudrions dégager les points principaux.

A. — L'examen des domaines de validité de la métrique et l'étude des composantes du tenseur de courbure, ont montré l'existence d'une circonférence singulière Γ, de rayon a, et de surfaces singulières S_1, S_2 dont la forme et la situation varient selon les valeurs relatives des constantes m et a.

B. — L'écriture des équations du champ, dans un système de coordonnées adapté au caractère stationnaire de la métrique, conduit à des relations de conservation. L'exploitation de ces relations sous forme intégrale permet d'obtenir *m comme flux de vecteur* $\vec{h}$ — *c'est le théorème de Gauss* — et — $(-4m/a)$ *comme circulation de* $\vec{\mathbf{B}}$ — *c'est le théorème d'Ampère* —. Il en résulte que l'interprétation de m comme masse du corps central et celle de $-4m/a$ comme « intensité de courant de masse » le parcourant se trouvent convenablement justifiées.

C. — Enfin nous avons examiné quelques trajectoires particulières. Nous avons pu montrer la possibilité de mouvements se déroulant complètement dans le plan de la singularité Γ et, dans ce cas particulier, mener des calculs approchés permettant d'obtenir un terme complémentaire lié à a par rapport au résultat issu de la métrique de Schwarzchild.

Enfin l'étude d'un second cas particulier, celui des mouvements ayant lieu le long de l'axe de symétrie oz conduit encore à distinguer trois cas suivant que :

$$m > a, \qquad m < a \quad \text{ou} \quad m = a.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. P. KERR, *Phys. Rev. Letter*, **11**, 1965, 237. Proceedings of the First Texas Conference on Gravitational Collapse. Dallas, déc. 1963, Chicago Press.
R. P. KERR et A. SCHILD, *A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations*. IV. Centenario Della Nascita di Galileo Galilée, Florence, 9-12 septembre 1964.

[2] L. BEL, *Cahiers de Physique*, n° 138, février 1962, p. 59-81. Théorème de Goldberg-Sachs. Séminaire Physique-Mathématique, 16 janvier 1965, Collège de France.

[3] E. T. NEWMAN et A. I. JANIS, *Journal of Math. Physics*, **6**, 1965, 902 ; 1965, 915.

[4] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la Gravitation et de l'Électromagnétisme*. Masson, Paris, 1955.

[5] J. L. SYNGE, *Relativity. The General Theory*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1960.

Publications récentes sur le sujet :

R. M. BOYER, *Camb. Phil. Soc.*, **61**, 1965, 527.
R. M. BOYER and T. G. PRICE, *Camb. Phil. Soc.*, **61**, 1965, 531.
BRANDON-CARTER, *Phys. Rev.*, **141**, 4, 1966, 1242.

Manuscrit reçu le 19 mai 1967.