ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ JOLIVET

Sur les interactions dans les équations d'ondes des particules à spin

Annales de l'I. H. P., section A, tome 13, nº 4 (1970), p. 345-362
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1970__13_4_345_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XIII, nº 4, 1970, p. 345-362.

Section A :
Physique théorique.

Sur les interactions dans les équations d'ondes des particules à spin

par

André JOLIVET
Collège Scientifique Universitaire, Angers.

RÉSUMÉ. — Étude des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles et de rang fini, invariants par rapport au groupe orthochrone propre de Lorentz et décrivant des particules à spin en interaction avec des champs macroscopiques.

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des particules relativistes à spin en interaction. Pour cela nous introduisons tout d'abord les tenseurs irréductibles covariants et contravariants par rapport au groupe orthochrone propre de Lorentz que nous notons B_γ et B^γ; $\gamma = a_0$, v caractérise une représentation irréductible propre de Lorentz, a est le poids d'une représentation irréductible du groupe des rotations d'espace.

Nous introduisons ensuite les opérateurs tensoriels irréductibles généralisant au groupe de Lorentz propre ces grandeurs introduites par Racah pour le groupe des rotations spatiales.

Ces opérateurs notés $T_\gamma^{a\rho}$ satisfont à des relations de commutation. En particulier, ces opérateurs sont des opérateurs tensoriels par rapport au groupe des rotations d'espace. Les éléments de matrices $(\alpha k v \mid T_\gamma^{a\rho} \mid \alpha' k' v')$ s'expriment donc en fonction des éléments de matrices réduits $(\alpha k \mid T_\gamma^{a} \mid \alpha' k')$ par une formule classique.

Les relations de commutation permettent d'effectuer une deuxième réduction qui exprime les $(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k')$ en fonctions d'éléments de matrices ne dépendant pas de k, de k' et de a. Ces éléments de matrice que nous notons $(\alpha \mid T_\gamma \mid \alpha')$ définissent complètement les éléments de matrice de l'opérateur tensoriel irréductible par rapport au groupe propre de Lorentz.

Nous appliquons ensuite ces résultats aux systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles et de rang fini invariants par rapport au groupe orthochrone propre de Lorentz et décrivant des particules à spin en interaction avec des champs macroscopiques.

L'invariance des équations d'ondes impose aux matrices associées au champ d'interaction d'être des composantes d'opérateurs tensoriels par rapport au groupe orthochrone propre de Lorentz.

Nous appliquons ensuite ces résultats au cas particulier de la théorie de la fusion et nous déterminons complètement les matrices associées à une interaction de type vectoriel.

Dans toute cette étude l'espace de la représentation est somme directe de sous-espaces irréductibles invariants par rapport au groupe des rotations d'espaces.

NOTATIONS EMPLOYÉES

Nous appellerons groupe de Lorentz homogène l'ensemble des transformations linéaires, homogènes, biunivoques et à coefficients réels $x'^\mu = \sum_{\mu=0}^{3} L_\nu^\mu x^\nu$ des variables $x_0 = ct, x_1, x_2, x_3$, qui laissent invariante la forme quadratique réelles $-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Le groupe de Lorentz orthochrone $(L_0^0 \geqslant 1)$ est noté $\mathfrak{L}^\uparrow$.

Le groupe orthochrone propre de Lorentz $(L_0^0 \geqslant 1, \text{dét} \mid L_\nu^\mu \mid > 0)$ est noté $\mathfrak{L}_+^\uparrow$.

Il nous sera commode d'utiliser au lieu de la variable $x^0 = ct$ une nouvelle variable $x^4 = ix^0 = i\,ct$.

La transformation de Lorentz s'écrit : $x'^\mu = \sum_{\nu=1}^{4} L_\nu^\mu x^\nu$ les L_4^4, L_q^p étant réels $(p, q = 1, 2, 3)$ et L_4^p, L_p^4 imaginaires purs.

On montre que les opérateurs infinitésimaux fondamentaux A_k et B_k de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ $(k = 1, 2, 3)$ vérifient les relations de commutation :

$$
\begin{array}{ll}
[A_i, A_j] = \varepsilon_{ijk} A_k & [A_i, B_j] = \varepsilon_{ijk} B_k \\
[B_i, B_j] = -\varepsilon_{ijk} A_k & [B_i, A_j] = \varepsilon_{ijk} B_k \\
 & [A_i, B_i] = 0
\end{array}
$$

où les A_k sont les opérateurs infinitésimaux fondamentaux du groupe des rotations d'espace. ε_{ijk} est une permutation circulaire de (1, 2, 3). A l'aide de ces relations de commutation on cherche les représentations irréductibles, du groupe propre de Lorentz $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ telles que les espaces de ces représentations irréductibles soient somme directe des espaces des représentations irréductibles par rapport au groupe des rotations.

On obtient le résultat suivant [*1*] :

Les représentations finies irréductibles du groupe de Lorentz propre sont définies par deux nombres (k_0, c), k_0 étant un nombre entier ou demi-entier et c un nombre positif tel que $c^2 = (k_0 + n)^2$ pour un certain entier n.

Deux tels nombres (k_0, c) étant donnés, la représentation irréductible qui leur correspond est fournie, pour un choix convenable de la base f_v^k par les formules (1, A)

$$H_+ f_v^k = [(k+v+1)(k-v)]^{\frac{1}{2}} f_{v+1}^k$$

$$H_- f_v^k = [(k+v)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} f_{v-1}^k \qquad H_3 f_v^k = v f_v^k$$

$$\begin{aligned} F_+ f_v^k = {} & [(k-v)(k-v-1)]^{\frac{1}{2}} C_k f_{v+1}^{k-1} - [(k-v)(k+v+1)]^{\frac{1}{2}} A_k f_{v+1}^k \\ & + [(k+v+1)(k+v+2)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1} f_{v+1}^{k+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_- f_v^k = {} & -[(k+v)(k+v-1)]^{\frac{1}{2}} C_k f_{v-1}^{k-1} - [(k+v)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} A_k f_{v-1}^k \\ & - [(k-v+1)(k-v+2)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1} f_{v-1}^{k+1} \end{aligned}$$

$$F_3 f_v^k = [(k-v)(k+v)]^{\frac{1}{2}} C_k f_v^{k-1} - v A_k f_v^k - [(k+v+1)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1} f_v^{k+1}$$

$$k = |k_0|, |k_0+1|, \ldots, c-1; \quad A_k = \frac{i k_0 c}{k(k+1)}; \quad C_k = \frac{i}{k}\left[\frac{(k^2-k_0^2)(k^2-C^2)}{4k^2-1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

k défini univoquement, une représentation irréductible par rapport au groupe des rotations on l'appelle poids de la représentation. L'espace de la représentation correspondant à un tel nombre k est à $2k + 1$ dimensions. v prend les valeurs $-k$, $-k+1$, …, k. On appelle base canonique la base $f_{-k}^k, f_{-k+1}^k, \ldots, f_k^k$.

Les opérateurs H_+, H_-, H_3 F_+, F_-, F_3 sont définis par :

$$H_+ = iA_1 - A_2 \qquad H_- = iA_1 + A_2 \qquad H_3 = iA_2$$

$$F_+ = iB_1 - B_2 \qquad F_- = iB_1 + B_2 \qquad F_3 = iB_2$$

Nous notons $g \to D(g)$ une représentation de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$.

Nous notons par la lettre D les opérateurs infinitésimaux fondamentaux de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$.

I. TENSEUR IRRÉDUCTIBLE PAR RAPPORT A $\mathfrak{L}_+^\uparrow$

Nous commencerons tout d'abord par introduire la notion de tenseurs irréductibles covariants et contravariants par rapport au groupe de Lorentz propre.

Tenseur irréductible covariant :

Nous appellerons tenseur irréductible covariant un être mathématique, noté B_γ, dont les composantes $B_\gamma^{a\rho}$ (($\gamma = a_0, v$) définit une représentation irréductible du groupe propre de Lorentz $\mathfrak{L}_+^\uparrow$; a prend les valeurs $|a_0|$, $|a_0+1|, \ldots, v-1$; les valeurs de ρ étant $a, a-1, \ldots, -a$) lors d'une transformation g de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ se transforment en :

$$B_\gamma^{\prime a\rho} = \sum_{a=a_0}^{v-1} \sum_{\rho=-a}^{a} B_\gamma^{a'\rho'} D^{-1}_{(g)a'a,\rho'\rho} \tag{1,1}$$

où $D_{(g)}$ est la représentation irréductible du groupe propre de Lorentz définie par $\gamma = (a_0, v)$ et telle que les opérateurs infinitésimaux de cette représentation irréductible soient donnés par les formules (1, A).

Le tenseur B_γ irréductible par rapport à $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ est caractérisé par γ et a $(v^2 - a_0^2)$ composantes.

Pour γ et a fixés, les $B_\gamma^{a\rho}$ sont les composantes d'un tenseur irréductible covariant par rapport au groupe des rotations d'espace, tenseur que nous notons B_γ^a. En effet pour g appartenant au groupe des rotations d'espace qui est un sous-groupe de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ on a en raison du choix des vecteurs de base des représentations irréductibles de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$:

$$B_\gamma^{\prime a\rho} = \sum_{\rho'=-a}^{a} B_\gamma^{a\rho'} D^{-1}_{(g)aa,\rho'\rho}$$

où $D_{(g)a}$ est la représentation irréductible du groupe des rotations d'espace, représentation de poids a. C'est la définition du tenseur irréductible covariant par rapport au groupe des rotations d'espace.

Tenseur irréductible contravariant :

Considérons l'expression $I = \sum_{a=a_0}^{v-1} \sum_{\rho=-a}^{a} B_\gamma^{a\rho} T_{a\rho}^\gamma$ où B_γ est un tenseur irréductible covariant par rapport à $\mathfrak{L}_+^\uparrow$. Nous cherchons à quelles conditions I est un invariant par rapport à $\mathfrak{L}_+^\uparrow$. C'est-à-dire, à quelles conditions on a : $I = \Sigma B_\gamma^{a\rho} T_{a\rho}^\gamma = \Sigma B_\gamma'^{a\rho} T_{a\rho}'^\gamma$, B_γ' et T'^γ étant les tenseurs transformés de B_γ et T^γ lors d'une transformation de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$.

Nous avons :

$$I = \sum_{a\rho} B_\gamma^{a\rho} T_{a\rho}^\gamma = \sum_{aa'\rho\rho'} B_\gamma'^{a'\rho'} D_{(g)a'a;\rho'\rho}^\gamma T_{a\rho}^\gamma$$

Nous déduisons la condition (2,1) :

$$T_{a'\rho'}'^\gamma = \Sigma D_{(g)a'a;\rho'\rho} T_{a\rho}^\gamma \tag{2,1}$$

Un être mathématique dont les composantes se transforment suivant cette relation est appelé tenseur contravariant et est noté T^γ. Nous notons $T_{a\rho}^\gamma$ les composantes.

Passage d'un tenseur covariant à un tenseur contravariant :

Considérons la forme quadratique

$$G = \sum_{a=a_0}^{v-1} \sum_{\rho=-a}^{a} (-1)^\rho B_\gamma^{a\rho} T_\gamma^{a,-\rho}$$

Nous en déduisons que c'est une constante pour chaque groupe à un paramètre donc que G est un invariant.

Nous voyons qu'il existe deux manières d'exprimer le tenseur contravariant à partir du tenseur covariant et réciproquement.

$$1. \quad B_{a,-\rho}^\gamma = (-1)^\rho B_\gamma^{a\rho} \qquad 2. \quad T_{a,-\rho}^\gamma = (-1)^{-\rho} T_\gamma^{a,-\rho}$$

ceci à une constante près, soit c cette constante indépendante de a et de ρ.

Nous choisissons la relation 1 associée à la constante $c = 1$, par suite :

Le tenseur contravariant T^γ est défini à partir du tenseur covariant T_γ par la relation :

$$T_{a\rho}^\gamma = (-1)^{-\rho} T_\gamma^{a,-\rho}$$

réciproquement le tenseur covariant T_γ s'exprime à partir du tenseur contravariant T^γ par la relation :

$$T_\gamma^{a\rho} = (-1)^{-\rho} T_{a,-\rho}^\gamma$$

II. OPÉRATEURS TENSORIELS IRRÉDUCTIBLES PAR RAPPORT A $\mathfrak{L}_+^\uparrow$

Nous dirons que les $(v^2 - a_0^2)$ opérateurs $T_\gamma^{a\rho}$ sont les composantes d'un opérateur tensoriel irréductible par rapport à $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ si elles satisfont aux relations :

$$[D^\alpha, T_\gamma^{a'\rho'}] = \sum_{a'\rho'} T_\gamma^{a'\rho'} D^\gamma_{a'a,\rho'\rho}$$

Cette définition généralise au groupe $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ la définition des opérateurs tensoriels irréductibles par rapport au groupe des rotations d'espace introduite par Racah et Wigner.

Relations de récurrence :

Écrivons explicitement ces relations de commutation avec les opérateurs H_+, H_-, H_3, F_+, F_-, F_3 définis précédemment (1, A) et qui s'expriment à partir des opérateurs infinitésimaux $D^\beta = A_1^\beta, A_2^\beta, A_3^\beta, B_1^\beta, B_2^\beta, B_3^\beta$

$$a\left\{\begin{aligned}
&[H_+^\alpha, T_\gamma^{a\rho}] = T_\gamma^{a,\rho+1} H^\gamma_{+aa,\rho+1,\rho}\\
&[H_-^\alpha, T_\gamma^{a\rho}] = T_\gamma^{a,\rho-1} H^\gamma_{-aa,\rho-1,\rho}\\
&[H_3^\alpha, T_\gamma^{a\rho}] = T_\gamma^{a\rho} H^\gamma_{3aa,\rho\rho}
\end{aligned}\right.
\qquad
b\left\{\begin{aligned}
&[F_+^\alpha, T_\gamma^{a\rho}] = \sum_{a'} T_\gamma^{a',\rho+1} F^\gamma_{+a'a,\rho+1,\rho}\\
&[F_-^\alpha, T_\gamma^{a\rho}] = \sum_{a'} T_\gamma^{a',\rho-1} F^\gamma_{-a'a,\rho-1,\rho}\\
&[F_3^\alpha, T_\gamma^{a\rho}] = \sum_{a'} T_\gamma^{a'\rho} F^\gamma_{3a'a,\rho\rho}
\end{aligned}\right.$$

Le groupe de relations (a) définit les $T_\gamma^{a\rho}$ comme étant des opérateurs tensoriels par rapport au groupe des rotations. Ce qui donne sur les éléments de matrices de $T_\gamma^{a\rho}$ les relations bien connues [2] [3] :

$$\left\{\begin{aligned}
&(\alpha k v \mid T_\gamma^{a\rho} \mid \alpha' k' v') = (-1)^{k'-v'}(2a+1)^{-\frac{1}{2}}\langle kvk' - v' \mid kk'a\rho\rangle (\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k')\\
&(\alpha k v \mid T_\gamma^{a\rho} \mid \alpha' k' v') = (-1)^{k-v}\begin{pmatrix} k & a & k' \\ -v & \rho & v'\end{pmatrix}(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k')
\end{aligned}\right.$$

avec $v = v' + \rho$; $k - a \leqslant k' \leqslant k + a$.

Les $\langle kvk'v' \mid kk'a\rho\rangle$ sont les coefficients de couplage vectoriels ou coefficients de Clebsch-Gordan. Nous prenons pour ces coefficients la convention de Condon et Schortley.

Les $\begin{pmatrix} k & a & k' \\ v & \rho & v' \end{pmatrix}$ sont les coefficients de Wigner (symbole à trois j), ils sont liés aux coefficients de Clebsch-Gordan par la relation :

$$\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (-1)^{k_1 - k_2 - v_3}(2k_3 - 1)^{\frac{1}{2}} \langle k_1 v_1 k_2 v_2 \mid k_1 k_2 k_3 - v_3 \rangle$$

Les $(\alpha k \mid T_\gamma^{a\rho} \mid \alpha' k')$ ne dépendent ni de v ni de v' ni de ρ. On les appelle « éléments de matrices réduits ».

Examinons maintenant les relations (b).

Après de longs calculs, nous trouvons entre les $(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k')$ les relations de récurrence suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} & (2k+1)[(k-k'+a+1)(-k+k'+a)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1}^{\alpha}(\alpha k+1 \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k') \\ & \quad -(2k'+1)[(k-k'+a)(-k+k'+a+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k'+1}^{\alpha'}(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k'+1) \\ & \quad +[k' A_{k'}^{\alpha'} - k A_k^{\alpha} + (k-k') A_a^{\gamma}][(k+k'-a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}}(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k') \\ & \quad = -[(k-k'+a+1)(-k+k'+a+1)(k+k'-a+1)(k+k'-a)]^{\frac{1}{2}} C_{a+1}^{\gamma} \\ & \qquad\qquad (\alpha k \mid T_\gamma^{a+1} \mid \alpha' k') \\ & \quad +[(k-k'+a)(-k+k'+a)(k+k'+a+2)(k+k'+a+1)]^{\frac{1}{2}} C_a^{\gamma} \\ & \qquad\qquad (\alpha k \mid T_\gamma^{a-1} \mid \alpha' k') \end{aligned}\right.$$

avec $| k - k' | \leqslant a$.

$$\left\{\begin{aligned} & [(k-k'+a+1)(k-k'+a)(-k+k'+a+1)(-k+k'+a)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1}^{\alpha} \\ & \qquad\qquad (\alpha k+1 \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k) \\ & \quad +[(k+k'-a)(k+k'-a+1)(k+k'+a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}} C_k^{\alpha} \\ & \qquad\qquad (\alpha k-1 \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k') \\ & \quad +(A_a^{\gamma} - A_k^{\alpha})[(k-k'+a)(-k+k'+a+1)(k+k'-a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}} \\ & \qquad\qquad (\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k') \\ & \quad -[(2k'+1)(2k'+2)] C_{k'+1}^{\alpha'}(\alpha k \mid T_\gamma^a \mid \alpha' k'+1) \\ & \quad =[(k-k'+a)(k-k'+a+1)(k+k'-a)(k+k'-a+1)]^{\frac{1}{2}} C_{a+1}^{\gamma} \\ & \qquad\qquad (\alpha k \mid T_\gamma^{a+1} \mid \alpha' k') \\ & \quad +[(-k+k'+a)(-k+k'+a+1)(k+k'+a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}} C_{a-1}^{\gamma} \\ & \qquad\qquad (\alpha k \mid T_\gamma^{a-1} \mid \alpha' k') \end{aligned}\right.$$

avec $- a \leqslant k - k' \leqslant a + 1$.

$$[(-k+k'+a+1)(-k+k'+a)(k-k'+a+1)(k-k'+a)]^{\frac{1}{2}}C_{k'+1}$$
$$(\alpha k\,|\,T^{a}_{\gamma}\,|\,\alpha' k'+1)$$
$$+[(k+k'-a)(k+k'-a+1)(k+k'+a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}}C^{\alpha'}_{k'}$$
$$(\alpha k\,|\,T^{a}_{\gamma}\,|\,\alpha' k'-1)$$
$$+(A^{\gamma}_{a}-A^{\alpha'}_{k'})[(-k+k'+a)(k-k'+a+1)(k+k'-a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}}$$
$$(\alpha k\,|\,T^{a}_{\gamma}\,|\,\alpha' k')$$
$$-(2k+1)(2k+2)C^{\alpha}_{k+1}(\alpha k+1\,|\,T^{a}_{\gamma}\,|\,\alpha' k')$$
$$=-[(-k+k'+a)(-k+k'+a+1)(k+k'-a)(k+k'-a+1)]^{\frac{1}{2}}C^{\gamma}_{a+1}$$
$$(\alpha k\,|\,T^{a+1}_{\gamma}\,|\,\alpha' k')$$
$$-[(k-k'+a)(k-k'+a+1)(k+k'+a+1)(k+k'+a+2)]^{\frac{1}{2}}C^{\gamma}_{a}$$
$$(\alpha k\,|\,T^{a-1}_{\gamma}\,|\,a' k')$$

avec $-a \leqslant k'-k \leqslant a+1$.

A l'aide de ces relations de récurrence nous montrons le résultat suivant :

Pour que les éléments de matrices ne soient pas nuls, il faut :

$$k_0 - v + 1 \leqslant k_0' \leqslant k_0 + v + 1 \quad ; \quad c - v + 1 \leqslant c' \leqslant c + v - 1$$

nous montrons alors :

$$(\alpha k \mid T^{a}_{\gamma} \mid \alpha' k') = g(\alpha\alpha'\gamma k k' a)(\alpha \mid T_{\gamma} \mid \alpha')$$

les éléments de matrice $(\alpha \mid T_{\gamma} \mid \alpha')$ dépendent seulement de α, α' et γ, les coefficients $g(\alpha\alpha'\gamma kk'a)$ étant complètement déterminés à l'aide des relations de récurrence.

Relations de symétrie entre les coefficients :

Posons

$$h\big(k_0 c k_0' c' a_0 v k k' a\big) = g(\alpha\alpha'\gamma k k' a)$$

Nous remarquons que les relations de récurrence obtenues avec k_0, c, k_0', c' sont identiques à celles obtenues avec $-k_0$, $-c$, $-k_0'$, $-c'$. Nous avons donc

$$h\big(k_0 c k_0' c' a_0 v k k' a\big) = h\big(-k_0 - c - k_0' - c' a_0 v k k' a\big)$$

$$h(k_0, c, k_0-\beta, c-\delta, a_0, v, k, k', a) = k(k_0, c, -k_0+\beta, -c+\delta, a_0, v, k, k', a).$$

Soit $\alpha = k_0, c$; posons $\dot{\alpha} = -k_0, c$. Les relations de récurrence correspondant à α, α' et γ sont les mêmes que celles obtenues avec $\dot{\alpha}$, $\dot{\alpha}'$ et $\dot{\gamma}$ à la condition de remplacer

$$(ak \mid T_{\gamma}^{a} \mid \alpha' k') \qquad \text{par} \qquad (-1)^{k+k'+a}(\dot{\alpha} k \mid T_{\dot{\gamma}}^{a} \mid \dot{\alpha}' k')$$

donc

$$g(\alpha\alpha'\gamma kk'a) = (-1)^{k+k'+a} g(\dot{\alpha}\dot{\alpha}'\dot{\gamma} kk'a)$$

III. SYSTÈMES LINÉAIRES ET DE RANG FINI D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES INVARIANTES PAR RAPPORT AU GROUPE ORTHOCHRONE PROPRE DE LORENTZ ET DÉCRIVANT DES PARTICULES EN INTERACTION AVEC DES CHAMPS MACROSCOPIQUES

Soit $g \to D_{(g)}$ une certaine représentation de rang fini de $\mathfrak{L}_{+}^{\uparrow}$, R l'espace de cette représentation.

Nous admettons qu'une particule libre est décrite par le système d'équations irréductibles :

$$(p_{\mu}\Gamma_{\mu} - i M_0 c)\psi = 0 \qquad \left(p_{\mu} = -i\frac{\partial}{\hbar \partial x^{\mu}}\,;\, x^{\mu} = x^1, x^2, x^3, x^4\right)$$

où ψ est une fonction vectorielle des variables x^{μ} à valeurs dans R, M_0 est un nombre réel non nul et Γ_{μ} des opérateurs linéaires dans R et tel que les Γ_{μ} soient définis sur R et R est invariant par rapport à chacun d'entre eux.

Nous envisageons maintenant cette même particule en interaction avec des champs macroscopiques.

Dans la théorie de l'électron à spin de Dirac les équations d'ondes représentant la particule en interaction s'écrivent :

$$(p_{\mu}\Gamma_{\mu} + I - i M_0 c)\psi = 0$$

Le terme interaction I est formé à partir des composantes des champs et de matrices de même rang que les Γ_{μ}.

Nous introduisons les interactions dans les équations d'ondes de la particule libre de spin quelconque de la même façon que pour l'électron à spin. Les équations d'ondes de la particule en interaction s'écrivent (1, III) :

$$(p_{\mu}\Gamma_{\mu} + I - i M_0 c)\psi = 0$$

où I est le terme interaction et s'écrit $I = \sum_{l} H_e \Delta_l$, les H_e étant formés à partir des composantes des champs. Ce sont des fonctions des variables x. Les Δ_e sont des produits de fonctions ou d'opérateurs dépendant des variables x_μ par des matrices de même rang que les Γ_μ. Nous écrivons I sous forme $I = \sum_e K_e M_e$ où les K_e sont des fonctions dépendant des variables x_μ, les M_e sont des matrices de même rang que les Γ_μ.

Nous excluons de ce schéma les termes interactions où les K_e contiennent des termes en $\frac{\partial^m}{\partial x^m}$ $(m > 1)$ de manière à ce que la particule en interaction soit décrite par un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Nous postulons que les équations d'ondes décrivant les particules en interaction sont invariantes par rapport au groupe propre de Lorentz. Nous supposons que les champs ainsi que l'être mathématique, de composantes K_e, sont des tenseurs par rapport à ce groupe. Les conditions d'invariance imposées déterminent en partie les matrices M_e. C'est cette détermination que nous proposons de réaliser maintenant.

Écrivons le terme interaction sous la forme :

$$I = \sum_e K_e M_e = \sum_p \sum_\gamma \sum_{a=a_0}^{v-1} \sum_{\rho=-a}^{a} (B^\gamma_{a\rho} T^{a\rho}_\gamma)_p$$

Les $B^\gamma_{a\rho}$ sont des tenseurs irréductibles contravariants, les composantes B_a sont des fonctions des x_μ. Les $T^{a\rho}_\gamma$ ne sont pas les composantes d'un tenseur.

L'indice p indexe éventuellement des représentations identiques du groupe propre de Lorentz caractérisé par le même $\gamma = a_0, v$.

Le quadrivecteur p_μ est un tenseur irréductible par rapport à $\mathfrak{L}^\uparrow_+$. Ce tenseur est caractérisé par $\gamma = (a_0, v) = (0,2)$. On a :

$$p_\mu \Gamma_\mu = \sum_{a=0}^{1} \sum_{\rho=-a}^{a} B^\gamma_{a\rho} T^{a\rho}_\gamma$$

Dans les calculs que nous effectuons par la suite intervient seulement la variance de B^γ ce qui nous permet de considérer pour ces calculs le terme différentiel

$$p_\mu \Gamma_\mu = \sum_{a=0}^{1} \sum_{\rho=-a}^{a} B^{(0,2)}_{a\rho} T^{a\rho}_{(0,2)}$$

comme une restriction du terme interaction.

L'équation d'ondes s'écrit alors :

$$[\Sigma(B^{\gamma}_{a\rho}T^{a\rho}_{\gamma})_p - iM_0c]\psi = 0$$

de cette façon nous déterminons en même temps les matrices Γ_μ et les matrices de l'interaction. L'invariance par rapport à $\mathfrak{L}^{\uparrow}_{+}$ nous donne la relation

$$[D^{\alpha}, T^{a\rho}_{\gamma}] = \Sigma T^{a'\rho'}_{\gamma} D^{\gamma}_{a'a\rho'\rho}$$

Les $T^{a\rho}_{\gamma}$ associés au champ d'interaction sont donc les composantes d'opérateurs tensoriels irréductibles par rapport à $\mathfrak{L}^{\uparrow}_{+}$.

Grandeurs tensorielles associées aux $T^{a\rho}_{\gamma}$ *:*

Densités de valeurs moyennes.

Nous supposons qu'il existe dans l'espace des ψ de la représentation une forme bilinéaire hermétique non dégénérée et continue, notée (Φ, ψ) qui soit invariante par rapport à la représentation. C'est-à-dire telle que :

$$(D_{(g)}\Phi, D_{(g)}\psi) = (\Phi, \psi)$$

On montre à partir de cette hypothèse que :

$$(\Phi', T^{a\rho}_{\gamma}\psi') = (\Phi, T^{a'\rho'}_{\gamma}\psi)(D^{-1}_{(g)})^{\gamma}_{a'a\rho'\rho}$$

ainsi $(\Phi, T^{a\rho}_{\gamma}\psi)$ est un tenseur covariant.

Les $(\psi, T^{a\rho}_{\gamma}\psi)$ sont appelés densités de valeurs moyennes.

IV. THÉORIE DE LA FUSION

La méthode dite de la fusion de Louis de Broglie, généralisée par Kramers, Belinfante, Lubanski, représente les particules élémentaires possédant le spin total maximum $n\frac{\hbar}{2}$ et la masse propre minimum m_0 par le système d'équations d'ondes de la forme (1,IV)

$$\left(p_\mu\Gamma_\mu - i\frac{nm_0c}{2}\right)\psi_{i_1\ldots i_n} = 0$$

dans lequel :

$$p_\mu = i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,; \qquad \mu = 1, 2, 3, 4\,; \quad x^4 = ict$$

et où les matrices Γ_μ sont des matrices construites à partir des matrices γ_μ de Dirac, écrite dans la même représentation, par le procédé général de « fusion des matrices » ou produit tensoriel symétrisé (Jordan). On a

$$(\Gamma_\mu)_{i_1 \ldots i_n, l_1 \ldots l_n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \delta_{i_1 l_1}, \ldots (\gamma_\mu)_{i_r l_r} \ldots \delta_{i_n l_n}.$$

Les composantes $\psi_{i_1} \ldots i_n$ sont au nombre de 4^n.

Les matrices infinitésimales fondamentales des représentations $g \to \mathrm{T}g$ dans R du groupe de Lorentz (R espace des représentations pour la fonction d'ondes) sont :

$$\mathrm{A}_p = -\frac{i}{2} \sum_{r=1}^{n} \delta_{i_1 l_1} \ldots (\sigma_p)_{i_r l_r} \ldots \delta_{i_n l_n}$$

$$\mathrm{B}_p = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \delta_{i_1 l_1} \ldots (\alpha_p)_{i_r l_r} \ldots \delta_{i_n l_n}$$

Les σ_p sont les matrices de Pauli suivant Dirac $(\sigma_p)^{\mathrm{Dirac}}_{il,\,jm} = (\sigma)^{\mathrm{Pauli}}_{ij} \delta_{lm}$. Les α_p sont les matrices de Dirac.

Le système d'équations (1,IV) est réductible pour $n > 1$. Nous cherchons les systèmes d'équations irréductibles déduits de (1,IV) et tel que l'espace de la représentation pour la fonction d'ondes soit somme directe des espaces des représentations irréductibles par rapport au groupe des rotations d'espaces.

Les matrices A_p, B_p, Γ_μ vérifient les relations de commutation (2,IV)

$$\begin{aligned}
&[\mathrm{A}_p, \mathrm{A}_q] = \varepsilon_{pqr}\mathrm{A}_r \quad ; \quad &&[\mathrm{B}_p, \mathrm{B}_q] = -\varepsilon_{pqr}\mathrm{A}_r \\
&[\mathrm{B}_p, \mathrm{A}_q] = \varepsilon_{pqr}\mathrm{B}_r \quad ; \quad &&[\Gamma_p, \mathrm{A}_q] = \varepsilon_{pqr}\Gamma_r \\
&[\Gamma_4, \mathrm{B}_p] = i\Gamma_p \quad ; \quad &&[[\Gamma_4, \mathrm{B}_p], \mathrm{B}_p] = \Gamma_4 \\
&[\Gamma_p, \Gamma_q] = -\varepsilon_{pqr}\mathrm{A}_r \quad ; \quad &&[\Gamma_4, \Gamma_p] = -i\mathrm{B}_p
\end{aligned}$$

Les systèmes d'équations irréductibles issues de l'équation (1,IV) sont construits avec les systèmes irréductibles de matrices Γ_μ vérifiant les relations de commutation (2,IV).

Les matrices A_p et B_p vérifiant (2,IV) sont par hypothèse

$$\mathrm{A}_p = \oplus \mathrm{A}_p^k \quad ; \quad \mathrm{B}_p = \oplus \mathrm{B}_p^{(k_0, c)}$$

Les A_p^k sont matrices infinitésimales fondamentales de la représentation irréductible (de poids k) du groupe des rotations d'espace. Elles sont données par les formules (1,A).

Les $B_p^{k_0,c}$ sont les matrices infinitésimales fondamentales de la représentation irréductible (k_0, c) du groupe de Lorentz propre, elles sont données par les formules (1,A).

Lubanski [4] a montré que

$$B_p = \bigoplus_{c=s+1}^{r} \bigoplus_{k_0=-s}^{s} B_p^{k_0 c}$$

r et s étant deux nombres entiers ou demi-entiers.

La donnée de ces deux nombres r et s détermine univoquement un système irréductible des matrices B_p, A_p. Les équations d'ondes décrivant la particule libre sont donc complètement déterminées par la donnée de r et s.

Pour la méthode de la fusion, nous classons les particules à l'aide de ces deux nombres r et s.

Nous appelons particule (r, s) la particule décrite par un système d'équation d'ondes irréductible tel que les matrices infinitésimales fondamentales de la représentation de $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ dans l'espace de la fonction d'onde soient :

$$B_p = \bigoplus_{c=s+1}^{r} \bigoplus_{k_0=-s}^{s} B_p^{(k_0,c)}$$

L'espace $R^{k_0,c}$ de la représentation $D^{(k_0,c)}$ irréductible par rapport à $\mathfrak{L}_+^\uparrow$ est somme directe des espaces R^k des représentations D^k irréductibles par rapport au groupe des rotations soit $R^{(k_0;c)} = \bigoplus_{k=k_0}^{c-1} R^k$.

On a donc :

$$A_p = \bigoplus_{c=s+1}^{r} \bigoplus_{k_0=-s}^{s} \bigoplus_{k=k_0}^{c-1} A_p^k$$

Nous cherchons maintenant à déterminer complètement Γ_4.

Nous posons

$$(\Gamma_4)_{kk;\nu\nu}^{\alpha\alpha'} = \Lambda_k^{\alpha\alpha'},$$

nous pouvons écrire

$$\Lambda_k^{\alpha\alpha'} = \left| \Lambda_k^{\alpha\alpha'} \right| e^{i\varphi(\alpha\alpha')}$$

Nous déterminons tout d'abord les $| \Lambda_k^{\alpha\alpha'} |$.

Nous montrons ensuite que si l'on pose $\varphi(\alpha\alpha') = \theta(\alpha) - \theta(\alpha')$ nous trouvons que les relations de commutation (2,IV) sont vérifiées par les $| \Lambda_k^{\alpha\alpha'} | e^{i[\theta(\alpha)-\theta(\alpha')]}$ quelle que soit la fonction θ si les $| \Lambda_k^{\alpha\alpha'} |$ sont les éléments précédemment calculés.

Nous prenons comme fonction θ, la fonction identiquement nulle, alors tous les éléments de matrice de Γ_4 sont réels et nous trouvons que les seuls éléments non nuls de Γ_4 sont donnés par :

$$(\Gamma_4)_{kk;vv}^{k_0c;kc+1} = (\Gamma_4)_{kk;vv}^{k_0,c+1;k,c}$$
$$= \left[\frac{(r-c)(r+c+1)(c+s+1)(c-s)(c+k+1)(c-k)}{4(c+k_0+1)(c+k_0)(c-k_0+1)(c-k_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(\Gamma_4)_{kk;vv}^{k_0c;k_0-1,c} = (\Gamma_4)_{kk,vv}^{k_0-1,c;k_0c}$$
$$= \left[\frac{(s+k_0)(s-k_0+1)(r+k_0)(r-k_0+1)(k+k_0)(k-k_0+1)}{4(c+k_0)(c-k_0+1)(c+k_0-1)(c-k_0)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour les particules $(r, r-1)$ et $(r, 0)$ nous avons les formes simplifiées suivantes pour la matrice Γ_4 :

1) Particule $(r, r-1)$.

On a

$$c = r, \qquad (\Gamma_4)_{kk,vv}^{k_0c;k_0,c+1} = 0$$

$$(\Gamma_4)_{kk;vv}^{k_0,r;k_0-1,r} = \frac{1}{2}[(k+k_0)(k-k_0+1)]^{\frac{1}{2}}$$

2) Particule $(r, 0)$.

On a

$$k_0 = s = 0, \qquad (\Gamma_4)_{kk;vv}^{k_0,c;k_0-1,c} = 0$$

$$(\Gamma_4)_{kk;vv}^{0,c;0,c+1} = \left[\frac{(r-c)(r+c+1)(c+k+1)(c-k)}{4c(c+1)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Les matrices Γ_p sont donnés par la relation :

$$\Gamma_p = -i(\Gamma_4, B_p)$$

Nous avons donc complètement déterminé les matrices Γ_v dans une représentation telle que l'espace de la représentation de la fonction d'onde soit somme directe d'espaces irréductibles et invariants par rapport au groupe de Lorentz propre chacun de ces espaces étant lui-même somme directe de sous-espaces irréductibles et invariants par rapport au groupe des rotations d'espace.

Ecriture des matrices Γ_μ dans une autre représentation :

Écrivons les relations de commutation qui permettent le calcul des A_p, B_p et Γ_4

$$[A_p, A_q] = \varepsilon_{pqr}A_r \quad ; \quad [B_p, B_q] = -\varepsilon_{pqr}A_r \quad ; \quad [B_p, A_q] = \varepsilon_{pqr}B_r$$
$$\Gamma_4 = [[\Gamma_4, B_p], B_p] \quad ; \quad B_p = [\Gamma_4, [\Gamma_4, B_p]]$$

Écrivons maintenant les relations de commutation qui permettent de calculer les A_p, Γ_p et Γ_4

$$[A_p, A_q] = \varepsilon_{pqr}A_r \quad ; \quad [\Gamma_p, \Gamma_q] = -\varepsilon_{pqr}A_r \quad ; \quad [\Gamma_p, A_q] = \varepsilon_{pqr}\Gamma_r$$
$$\Gamma_4 = [[\Gamma_4, \Gamma_p], \Gamma_p] \quad ; \quad \Gamma_p = [\Gamma_4, [\Gamma_4, \Gamma_p]]$$

Nous voyons que ces relations de commutation sont les mêmes dans les deux cas, par conséquent nous pouvons choisir une représentation notée (2) telle que : $(\Gamma_4)_2 = (\Gamma_4)_1$; $(\Gamma_p)_2 = (B_p)_1$ où $(E)_2$ est un opérateur dans la représentation (2) et $(E)_1$ de même opérateur dans la représentation (1) envisagée au début de ce chapitre.

Si nous considérons maintenant les relations :

$$i\Gamma_p = (\Gamma_4, B_p) \qquad \text{et} \qquad -iB_p = (\Gamma_4, \Gamma_p)$$

nous voyons que nous pouvons écrire :

$$(B_p)_2 = -(\Gamma_p)_1$$

Nous passons donc des matrices de la représentation (1) aux matrices de la représentation (2) par les formules (3,4) :

$$(\Gamma_4)_2 = (\Gamma_4)_1 \quad ; \quad (\Gamma_p)_2 = (B_p)_1 \quad ; \quad (B_p)_2 = -(\Gamma_p)_1$$

Dans cette dernière représentation les matrices Γ^μ ont une forme particulièrement simple. Nous garderons dans cette représentation les mêmes indices $\alpha = (k_0, c)$ bien que ces indices n'aient plus la même signification, ils n'indexent plus des représentations irréductibles par rapport à $\mathfrak{L}_+^\uparrow$.

V. ÉQUATIONS D'ONDES DE LA PARTICULE $(r, r-1)$ DANS LA REPRÉSENTATION Γ_4 DIAGONALE

Dans ce chapitre nous déterminons les matrices A_p, B_p, Γ_p, Γ_4 $(p = 1, 2, 3)$ dans la représentation où Γ_4 est diagonale.

Lubanski [*4*] a déterminé Γ_4 dans cette représentation

$$(\Gamma_4)^{k_0c;k_0'c'}_{kk';\nu\nu'} = \delta_{k_0k}\delta_{cc'}\delta_{kk'}\delta_{\nu\nu'}\, k_0$$

Nous obtenons à partir des relations (2,IV)

$$\begin{aligned} iF_+f^{k_0}_{k\nu} = & -[(k-\nu)(k-\nu-1)]^{\frac{1}{2}}C^{k_0+1,k_0}_{k+1,k}f^{k_0+1}_{k-1,\nu-1} \\ & \qquad -[(k-\nu)(k+\nu+1)]^{\frac{1}{2}}C^{k_0+1,k_0}_{kk}f^{k_0+1}_{k,\nu+1} \\ & -[(k+\nu+1)(k+\nu+2)]^{\frac{1}{2}}C^{k_0+1,k_0}_{k+1,k}f^{k_0+1}_{k+1,\nu+1} \\ & \qquad +[(k-\nu)(k-\nu-1)]^{\frac{1}{2}}C^{k_0-1,k_0}_{k,k}f^{k_0-1}_{k-1,\nu+1} \\ & -[(k-\nu)(k+\nu+1)]^{\frac{1}{2}}C^{k_0+1,k_0}_{k-1,k}f^{k_0+1}_{k,\nu+1} \\ & \qquad +[(k+\nu+1)(k+\nu+2)]^{\frac{1}{2}}C^{k_0-1,k_0}_{k+1,k}f^{k_0-1}_{k+1,\nu+1} \end{aligned}$$

$$-iF_{-}f_{kv}^{k_0}=-[(k+v)(k+v-1)]^{\frac{1}{2}}C_{k-1,k}^{k_0+1,k_0}f_{k-1,v-1}^{k_0+1} + [(k+v)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}}C_{kk}^{k_0+1,k_0}f_{k,v-1}^{k_0+1}$$
$$-[(k-v+1)(k-v+2)]^{\frac{1}{2}}C_{k+1,k}^{k_0+1,k_0}f_{k+1,v-1}^{k_0+1} + [(k+v)(k+v-1)]^{\frac{1}{2}}C_{k-1,k}^{k_0-1,k_0}f_{k-1}^{k_0-1}$$
$$+[(k+v)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}}C_{kk}^{k_0-1,k_0}f_{k,v-1}^{k_0-1} + [(k-v+1)(k-v+2)]^{\frac{1}{2}}C_{k+1,k}^{k_0-1,k_0}f_{k+1,v-1}^{k_0-1}$$

$$-iF_3 f_{kv}^{k_0}=[(k-v)(k+v)]^{\frac{1}{2}}C_{k-1,k}^{k_0+1,k_0}f_{k-1,v}^{k_0+1}+vC_{kk}^{k_0+1,k_0}f_{kv}^{k_0+1}$$
$$-[(k+v+1)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}}C_{k+1,k}^{k_0+1,k_0}f_{k+1,v}^{k_0+1} - [(k-v)(k+v)]^{\frac{1}{2}}C_{k-1,k}^{k_0-1,k_0}f_{k-1,v}^{k_0-1}$$
$$+vC_{k,k}^{k_0-1,k_0}f_{k+1,v}^{k_0-1}+[(k+v+1)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}}C_{k+1,k}^{k_0-1,k_0}f_{k+1,v}^{k_0-1}$$

les $C_{k,k'}^{k_0,k'_0}$ vérifient les relations de récurrence suivantes (1,V)

$$\frac{k_0}{2}=k^2\left|C_{k,k-1}^{k_0,k_0-1}\right|^2+(k+1)^2\left|C_{k,k+1}^{k_0,k_0-1}\right|^2-k^2\left|C_{k,k-1}^{k_0,k_0+1}\right|^2-(k+1)^2\left|C_{k,k+1}^{k_0,k_0+1}\right|^2$$
$$0=\left|C_{k,k-1}^{k_0,k_0-1}\right|^2-\left|C_{k,k}^{k_0,k_0-1}\right|^2+\left|C_{k,k+1}^{k_0,k_0-1}\right|^2-\left|C_{k,k-1}^{k_0,k_0+1}\right|^2 + \left|C_{k,k}^{k_0,k_0+1}\right|^2-\left|C_{kk+1}^{k_0,k_0+1}\right|^2$$
$$1=(2k-1)\left|C_{k,k-1}^{k_0,k_0-1}\right|^2+\left|C_{k,k}^{k_0,k_0-1}\right|^2-(2k+3)\left|C_{k,k+1}^{k_0,k_0-1}\right|^2 +(2k-1)\left|C_{k,k-1}^{k_0,k_0+1}\right|^2+\left|C_{k,k}^{k_0,k_0+1}\right|^2-(2k+3)\left|C_{k,k+1}^{k_0,k_0+1}\right|^2$$
$$0=(k+2)C_{k,k+1}^{k_0,k_0-1}C_{k+1,k+1}^{k_0-1,k_0-2}-kC_{k,k}^{k_0,k_0-1}C_{k,k+1}^{k_0-1,k_0-2}$$
$$0=(k+2)C_{k,k+1}^{k_0,k_0+1}C_{k+1,k+2}^{k_0+1,k_0+2}-kC_{k,k}^{k_0,k_0+1}C_{k,k+1}^{k_0+1,k_0+2}$$

Si nous posons

$$C_{kk'}^{k_0k'_0}=\left|C_{kk'}^{k_0k'_0}\right|e^{i\varphi(k_0k'_0kk')}$$

nous trouvons que les relations de commutation sont satisfaites en prenant tous les $\varphi(k_0k'_0kk')$ nuls. Par la suite nous prendrons donc tous les coefficients $C_{kk'}^{k_0k'_0}$ réels.

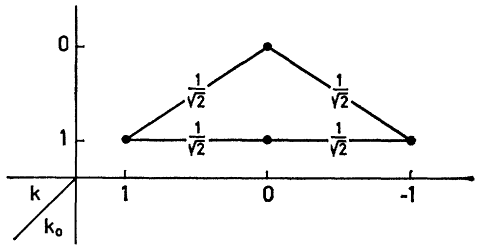
Nous avons calculé ces coefficients pour les particules (2,1) et (3,2).

Particule (2,1) *de spin 1 :*

On trouve (2,V)

$$C_{10}^{10}=C_{01}^{01}=C_{11}^{10}=C_{11}^{01}=C_{10}^{-10}=C_{01}^{0-1}=C_{11}^{-10}=C_{11}^{0-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nous représentons les $C_{kk'}^{k_0k_0'}$ à l'aide du schéma ci-dessous qui permet une lecture commode. La valeur de $C_{kk'}^{k_0k_0'}$ est écrite sur la ligne joignant le point (k_0, k) au point (k_0', k')



Particule (3,2) *de spin 2 :*

On trouve (3,V)

$$C_{22}^{21} = C_{22}^{12} = \frac{1}{2} \qquad C_{22}^{21} = C_{12}^{12} = \frac{1}{2}$$

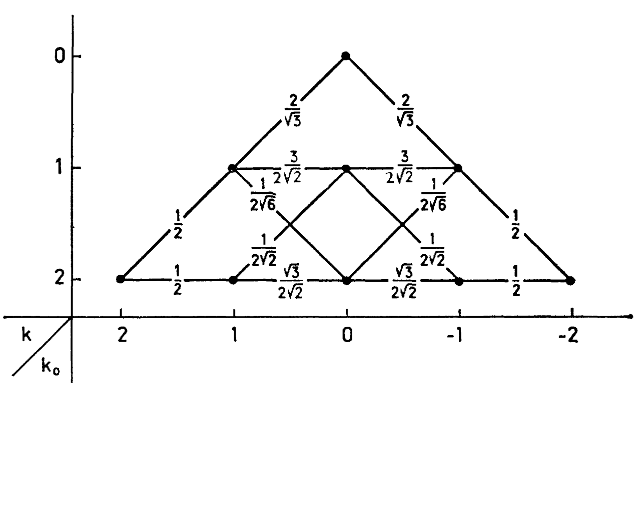
$$C_{12}^{10} = C_{21}^{01} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad C_{21}^{10} = C_{12}^{01} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad C_{12}^{10} = C_{21}^{01} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$C_{11}^{10} = C_{11}^{01} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \qquad C_{10}^{10} = C_{01}^{01} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$C_{22}^{-10} = C_{22}^{0-1} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad C_{21}^{-10} = C_{12}^{0-1} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad C_{12}^{-10} = C_{21}^{0-1} = \frac{1}{2\sqrt{6}}$$

$$C_{11}^{-10} = C_{11}^{01} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \qquad C_{10}^{-10} = C_{10}^{0-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$C_{22}^{-2-1} = C_{22}^{-1-2} = \frac{1}{2} \qquad C_{21}^{-2-1} = C_{12}^{-1-2} = \frac{1}{2}$$



les Γ_p sont déterminés par la relation $\Gamma_p = -i[\Gamma_4, B_p]$ ce qui donne (4,V)

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_1 + i\Gamma_2)f_{kv}^{k_0} = {} & i[(k-v)(k-v-1)]^{\frac{1}{2}} C_{k-1,k}^{k_0+1,k_0} f_{k-1,v+1}^{k_0+1} \\
& + i[(k-v)(k+v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k,k}^{k_0+1,k_0} f_{k,v+1}^{k_0+1} \\
& + i[(k+v+1)(k+v+2)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1,k}^{k_0+1,k_0} f_{k+1,v+1}^{k_0+1} \\
& + i[(k-v)(k-v-1)]^{\frac{1}{2}} C_{k-1,k}^{k_0-1,k_0} f_{k-1,v+1}^{k_0-1} \\
& - i[(k-v)(k+v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k,k}^{k_0-1,k_0} f_{k,v+1}^{k_0-1} \\
& + i[(k+v+1)(k+v+2)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1,k}^{k_0-1,k_0} f_{k+1,v+1}^{k_0-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\Gamma_1 - i\Gamma_2)f_{kv}^{k_0} = {} & i[(k+v)(k+v-1)]^{\frac{1}{2}} C_{k-1,k}^{k_0+1,k_0} f_{k-1,v-1}^{k_0+1} \\
& - i[(k+v)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k,k}^{k_0+1,k_0} f_{k,v-1}^{k_0+1} \\
& + i[(k-v+1)(k-v+2)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1,k}^{k_0+1,k_0} f_{k+1,v-1}^{k_0+1} \\
& + i[(k+v)(k+v-1)]^{\frac{1}{2}} C_{k-1,k}^{k_0-1,k_0} f_{k-1,v-1}^{k_0-1} \\
& + i[(k+v)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{kk}^{k_0-1,k_0} f_{k,v-1}^{k_0-1} \\
& + i[(k-v+1)(k-v+2)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1,k}^{k_0-1,k_0} f_{k+1,v-1}^{k_0-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_3 f_{kv}^{k_0} = {} & -i[(k-v)(k+v)]^{\frac{1}{2}} C_{k-1,k}^{k_0+1,k_0} f_{k-1,v}^{k_0+1} - ivC_{k,k}^{k_0+1,k_0} f_{kv}^{k_0+1} \\
& + i[(k+v+1)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1,k}^{k_0+1,k_0} f_{k+1,v}^{k_0+1} \\
& - i[(k-v)(k+v)]^{\frac{1}{2}} C_{k-1,k}^{k_0-1,k_0} f_{k-1,v}^{k_0-1} \\
& + ivC_{k,k}^{k_0-1,k_0} f_{kv}^{k_0-1} + i[(k+v+1)(k-v+1)]^{\frac{1}{2}} C_{k+1,k}^{k_0-1,k_0} f_{k-1,v}^{k_0-1}
\end{aligned}
$$

CONCLUSION

Nous pensons avoir choisi des représentations susceptibles de conduire à des simplifications notables dans la résolution des équations d'ondes représentant des particules en interaction.

Ainsi dans un prochain article nous étudierons les interactions à symétries sphériques et le choix que nous avons fait pour les représentations nous permet d'écrire directement les équations radiales pour une particule relativiste de spin quelconque pour une interaction ayant une variance tensorielle quelconque.

RÉFÉRENCES

[1] M. A. NAIMARK, *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, Paris, 1962.

[2] G. RACAH, Theory of complex spectra II, *Phys. Rev.*, t. **62**, 1942, p. 438.

[3] E. P. WIGNER, *On the matrices with reduce the Kronecker products of simply reducible groups*, Princeton, 1951.

[4] LUBANSKI, Sur la théorie des particules élémentaires de spin quelconque, I, II, *Physica*, t. **9**, n° 3, 1942, p. 310.

(Manuscrit reçu le 22 mai 1970).