

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

MAHDY CISSOKO

Ondes de détonation en magnétohydrodynamique relativiste

Annales de l'I. H. P., section A, tome 17, n° 1 (1972), p. 43-57

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1972__17_1_43_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Ondes de détonation en magnétohydrodynamique relativiste

par

Mahdy CISSOKO

Laboratoire de Physique mathématique, Collège de France

RÉSUMÉ. — Des hypothèses de compressibilité relativistes et de combustion on déduit : 1° une étude des propriétés des ondes de détonation magnétohydrodynamiques et de leurs différentes vitesses; 2° un théorème d'existence et d'unicité d'une solution non triviale des équations des détonations.

INTRODUCTION

Les ondes de choc de la magnétohydrodynamique ont fait l'objet de nombreux travaux. Mais les chocs relativistes ont été étudiés par Hoffman et Teller [1], M^{me} Y. Choquet-Bruhat [2], Pham Mau Quan [3], I. S. Shikin [4]; c'est A. Lichnerowicz qui leur a consacré une étude complète et rigoureuse.

La théorie relativiste se révèle sous certains aspects plus simple que la théorie classique, et dans certains cas, il est plus commode de substituer à l'approche classique l'approximation classique de la théorie relativiste.

Le problème des ondes de détonation dans un fluide dans le cas d'un champ magnétique perpendiculaire à la direction de propagation a été examiné par Larish et Shekhtman [5] et Lyubimov [6].

Le présent travail est consacré à l'étude des propriétés des ondes de détonation en magnétohydrodynamique au moyen de la théorie générale de A. Lichnerowicz des chocs relativistes. Nous montrons, moyennant les hypothèses de compressibilité et de combustion, que les propriétés des ondes de détonation en magnétohydrodynamique relativiste sont similaires à celle des ondes de détonation en hydrodynamique classique.

I. — FLUIDE PARFAIT RELATIVISTE

a. Suivant le schéma de Taub et de Lichnerowicz [(7), (8)], un fluide parfait est décrit dans un domaine de l'espace-temps (V_i, g) par un tenseur d'impulsion-énergie

$$(1) \quad T^{\alpha\beta} = (\rho + p) u^\alpha u^\beta - p g^{\alpha\beta},$$

où p est la pression, u^α les composantes du vecteur unitaire du fluide et ρ sa densité totale d'énergie définie par

$$\rho = c^2 r \left(1 + \frac{\varepsilon}{c^2} \right),$$

où r est la densité matérielle propre du fluide et ε son énergie interne spécifique, c la vitesse de la lumière dans le vide.

b. A. Lichnerowicz a introduit l'indice f du fluide [9] :

$$f = 1 + \frac{i}{c^2}, \quad \text{avec } i = \varepsilon + p V \quad \left(V = \frac{1}{r} \right),$$

i et V désignant respectivement l'enthalpie et le volume spécifiques.

La température propre θ et l'entropie spécifique S du fluide sont données par la relation différentielle

$$(2) \quad c^2 df = \theta dS + V dp.$$

On substitue souvent au volume spécifique la variable $\tau = fV$ mieux adaptée au cas relativiste.

Les variables ρ , p , r , θ , ε sont supposées strictement positives. Nous prendrons dans la suite p et S comme variables fondamentales de base, toutes les autres variables thermodynamiques seront des fonctions données de p et S . La relation $\tau = \tau(p, S)$ définit alors une équation d'état pour le fluide supposé obéir aux hypothèses de compressibilité relativistes suivantes [9] :

$$(H_1) : \quad \frac{\partial \tau}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial S} > 0;$$

$$(H_2) : \quad \frac{\partial^2 \tau}{\partial p^2} > 0 \quad (\text{condition de convexité})$$

qui se réduisent à l'approximation classique aux hypothèses de H. Weyl [10]. J. C. Lucquiaud a établi [11] que les hypothèses (H_1) et (H_2) de même que les inégalités

$$(H_3) : \quad \frac{\partial \theta}{\partial p} > 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial S} > 0$$

sont conséquences des statistiques classiques et quantiques. Ces hypothèses ont un caractère général, elles sont vérifiées par un fluide parfait relativiste quelconque.

II. — LES ÉQUATIONS DE LA MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE ([12], [13])

a. Supposons que le fluide envisagé de perméabilité magnétique μ (constante donnée) soit plongé dans un champ électromagnétique décrit par deux tenseurs antisymétriques dont l'un H est le tenseur champ électrique-induction magnétique. Si $*H$ est le tenseur dual, les vecteurs orthogonaux à la direction temporelle u :

$$e_\beta = u^\alpha H_{\alpha\beta}, \quad b_\beta = u^\alpha (*H)_{\alpha\beta}$$

sont respectivement le vecteur champ électrique et le vecteur induction magnétique. Le vecteur champ magnétique h et le vecteur b sont liés par la relation $b_\alpha = \mu h_\alpha$. Le courant J est défini par

$$J^\beta = \Lambda u^\beta + \sigma e^\beta,$$

où Λ est la densité de charge électrique et σ la conductivité du fluide.

La magnétohydrodynamique est ici l'étude des propriétés d'un fluide parfait relativiste de conductivité infinie $\sigma = \infty$. On a dans ce cas nécessairement $e = 0$, et le champ électromagnétique se réduit par rapport au fluide au champ magnétique.

On obtient ainsi pour le tenseur d'impulsion-énergie complet

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} T^{\alpha\beta} = (c^2 r f + \mu |h|^2) u^\alpha u^\beta - q g^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta \\ \quad \quad \quad \left(\text{avec } q = p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right), \end{array} \right.$$

où $|h|^2 = -h_\rho h^\rho \geq 0$.

b. Le système différentiel de la magnétohydrodynamique est fourni par le postulat de la conservation de la matière

$$(4) \quad \nabla_\alpha (r u^\alpha) = 0,$$

les équations de Maxwell se réduisant ici à

$$(5) \quad \nabla_\alpha (u^\alpha h^\beta - u^\beta h^\alpha) = 0$$

et les équations de la dynamique relativiste

$$(6) \quad \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0,$$

∇ étant l'opérateur de dérivation covariante.

c. Dans le domaine Ω de V_4 occupé par le fluide, supposons continues les variables magnétohydrodynamiques, leurs dérivées premières étant discontinues. Soit $\varphi = 0$ (avec $l = d\varphi$) l'équation locale d'une hypersurface Σ régulièrement plongée dans Ω . Σ partage Ω en deux domaines Ω_0 et Ω_1 correspondant respectivement à $\varphi < 0$ et $\varphi > 0$. Sur chacun des domaines Ω_0 et Ω_1 , si T est l'une des variables magnétohydrodynamiques, nous supposons que T est de classe C^1 et que lorsque φ tend vers zéro par valeurs négatives (resp. positives) T et sa dérivée covariante ∇T convergent uniformément vers des fonctions définies sur Σ . On montre [12] qu'il existe un tenseur-distribution noté δT tel que l'on ait

$$(7) \quad \bar{\delta} [\nabla T] = l \delta T,$$

$\bar{\delta}$ est la mesure de Dirac définie par φ , de support Σ , $[Q]$ désigne la discontinuité $Q_1 - Q_0$ d'une quantité à la traversée de Σ .

L'étude des conditions pour que l'une au moins des distributions δS , δp , δu^{β} et δh^{β} ne soit pas nulle conduit aux trois cas d'hypersurfaces caractéristiques (ou ondes) du système différentiel.

1° Les ondes tangentielles ($l_{\alpha} u^{\alpha} = 0$) ou ondes d'entropie, elles sont engendrées par des lignes de courant.

2° Les ondes magnétosoniques, solutions de

$$(8) \quad P(l) \equiv c^2 r f (\gamma - 1) (l_{\alpha} u^{\alpha})^4 + (c^2 r f + \mu |h|^2 \gamma) (l_{\alpha} u^{\alpha})^2 l_{\rho} l^{\rho} - \mu (l_{\alpha} h^{\alpha})^2 l_{\rho} l^{\rho} = 0.$$

Dans (8) on a posé $\gamma = c^2 r'_{\rho} f$, γ étant donné à partir de l'équation d'état par

$$(9) \quad c^2 \tau'_{\rho} = -V^2 (\gamma - 1) \quad (\tau'_{\rho} < 0 \Leftrightarrow \gamma > 1).$$

3° Les ondes d'Alfvén, solution de

$$(10) \quad D(l) \equiv (c^2 r f + \mu |h|^2) (l_{\alpha} u^{\alpha})^2 - \mu (l_{\alpha} h^{\alpha})^2 = 0,$$

elles sont engendrées par les trajectoires de deux champs de vecteurs orientés dans le temps :

$$A^{\alpha} = \beta u^{\alpha} + h^{\alpha}, \quad B^{\alpha} = \beta u^{\alpha} - h^{\alpha} \quad \left[\text{avec } \beta = \sqrt{\frac{c^2 r f + \mu |h|^2}{\mu}} \right].$$

d. La vitesse v^Σ d'une hypersurface Σ par rapport au fluide est donnée par ([2], [9]) :

$$(11) \quad y^\Sigma = \left(\frac{v^\Sigma}{c} \right)^2 = \frac{(l_x u^\alpha)^2}{(l_x u^\alpha)^2 - l_x l^x}.$$

Sous l'hypothèse $\tau'_p < 0$, (8) définit deux vitesses que nous notons y^{M+} , y^{M-} et qui sont appelées respectivement la vitesse magnétosonique rapide et la vitesse magnétosonique lente; (10) définit une seule vitesse y^A . Ces trois vitesses vérifient les inégalités

$$0 \leq y^{M-} \leq y^A \leq y^{M+} < 1.$$

III. — ONDES DE DÉTONATION EN MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE RELATIVISTE

1° Hypothèses de base

a. Considérons un fluide parfait relativiste de perméabilité magnétique μ plongé dans un champ électromagnétique. Supposons qu'une onde de choc formant un front d'onde de détonation transforme le fluide en un plasma de conductivité infinie.

Nous notons g l'énergie spécifique de combustion et nous introduisons l'énergie interne spécifique totale $\bar{\varepsilon}$ et l'enthalpie spécifique totale \bar{i} définies par

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon + g, \quad \bar{i} = \bar{\varepsilon} + p V.$$

Nous définissons l'indice total \bar{f} du fluide par la relation

$$\bar{f} = 1 + \frac{\bar{i}}{c^2} = f + \frac{g}{c^2}$$

et introduisons la variable thermodynamique $\bar{\tau} = \bar{f} V$. Nous supposons que les variables $\bar{\varepsilon}$, \bar{i} , \bar{f} et $\bar{\tau}$ sont des fonctions données de p et S .

b. Nous considérons ici une combustion comme une réaction exothermique se produisant dans une zone d'épaisseur infiniment petite.

Comme en théorie classique nous supposons que l'énergie spécifique de combustion g est indépendante des variables caractérisant le fluide

$$(C) : \quad dg = 0,$$

ce qui entraîne

$$c^2 d\bar{f} = c^2 df = \theta dS + V dp.$$

c. Nous adoptons pour notre fluide l'hypothèse (H₃) et les conditions de compressibilité suivantes portant sur la fonction $\bar{\tau}(p, S)$:

$$\begin{aligned} (\bar{H}_1) : \quad & \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial p} < 0, \quad \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial S} > 0; \\ (\bar{H}_2) : \quad & \frac{\partial^2 \bar{\tau}}{\partial p^2} > 0 \quad (\text{condition de convexité}). \end{aligned}$$

Les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) sont vérifiées sous (H₁), (H₂), (H₃) et (C). En effet, on a d'après la relation

$$\bar{\tau} = \tau + \frac{g}{c^2 r},$$

$$(12) \quad c^2 \bar{\tau}'_p = c^2 \tau'_p - g (V f'_p - \tau'_p) < 0,$$

$$(13) \quad c^2 \bar{\tau}'_s = c^2 \tau'_s - g V^2 r'_s.$$

On déduit de (2) la relation

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial p} \right)_s = - V^2 \left(\frac{\partial r}{\partial S} \right)_p,$$

(13) devient alors

$$(14) \quad c^2 \bar{\tau}'_s = c^2 \tau'_s + g \theta'_p > 0.$$

En dérivant une seconde fois (12) par rapport à p à S constant on obtient

$$(15) \quad c^2 \bar{\tau}''_{p^2} = c^2 \tau''_{p^2} + \frac{g}{f} \left(\tau''_{p^2} - \frac{2 g f'_p}{c^2 f} \tau'_p - V f''_{p^2} + \frac{2 V}{c^2 f} (f'_p)^2 \right) > 0.$$

2° Équations générales des détonations

a. D'après les hypothèses de base, le fluide envisagé admet le tenseur d'impulsion-énergie total

$$(16) \quad T^{\alpha\beta} = (\bar{c}^2 r f + \mu |h|^2) u^\alpha u^\beta - q g^{\alpha\beta} - \mu h^\alpha h^\beta$$

satisfaisant

$$(17) \quad \nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0.$$

Le système différentiel fondamental est alors fourni par (4), (5) et (17).

b. « L'histoire » d'une onde de détonation dans V_4 est une hypersurface Σ de discontinuité pour les vecteurs u^β , h^β ou pour l'une au moins des variables thermodynamiques. Dans le domaine Ω de V_4 occupé par le fluide, soit $\varphi = 0$ (avec $l = d\varphi$) l'équation locale de Σ supposée régulière et partageant Ω en deux domaines Ω_0 ($\varphi < 0$) et Ω_1 ($\varphi > 0$).

Le système différentiel, constitué par (4), (5) et (17), intégré sur Ω au sens des distributions impose

$$(18) \quad l_\alpha [ru^\alpha] = 0, \quad l_\alpha [h^\alpha u^\beta - h^\beta u^\alpha] = 0, \quad l_\alpha [T^{\alpha\beta}] = 0.$$

(18) constitue le système fondamental des ondes de détonation magnétohydrodynamiques.

c. Soit y un état du fluide et du champ en $x \in \Sigma$ défini par p, S, u^β et h^β . Nous notons y_0 l'état du fluide avant combustion et y_1 son état après combustion. Dans toute la suite nous appellerons fluide (0) et fluide (1) respectivement le fluide avant combustion et le fluide après combustion.

Il résulte de (18) que le scalaire

$$a(y) = rl_\alpha u^\alpha,$$

le vecteur tangent à Σ ,

$$V^\beta(y) = (l_\alpha h^\alpha) u^\beta - \frac{a}{r} h^\beta$$

et le vecteur

$$W^\beta(y) = \left(c^2 \bar{\tau} + \mu \frac{|h|^2}{r^2} \right) ar u^\beta - ql^\beta - \mu (l_\alpha h^\alpha) h^\beta$$

sont invariants à la traversée de Σ .

d. En écartant le cas $a = 0$, les divers invariants conduisent aux cinq relations scalaires suivantes vérifiées par les deux variables thermodynamiques et par les trois scalaires $|h|^2, l_\alpha h^\alpha, l_\alpha u^\alpha$:

$$(19) \quad r_1 l_\alpha u_1^\alpha = r_0 l_\alpha u_0^\alpha = a,$$

$$(20) \quad \bar{f}_1 l_\alpha h_1^\alpha = \bar{f}_0 l_\alpha h_0^\alpha = b,$$

$$(21) \quad \frac{(l_\alpha h_1^\alpha)^2}{a^2} - \frac{|h_1|^2}{r_1^2} = \frac{(l_\alpha h_0^\alpha)^2}{a^2} - \frac{|h_0|^2}{r_0^2} = H,$$

$$(22) \quad \bar{q}_1 - \frac{c^2 a^2}{l_\alpha l^\alpha} \bar{\tau}_1 = \bar{q}_0 - \frac{c^2 a^2}{l_\alpha l^\alpha} \bar{\tau}_0 = M,$$

$$(23) \quad \chi_1 \bar{\alpha}_1^2 = \chi_0 \bar{\alpha}_0^2 = L,$$

où

$$q = p + \frac{\mu}{2} \chi, \quad \chi = |h|^2 + \frac{a^2 H}{l_\alpha l^\alpha}, \quad \bar{\alpha} = c^2 \bar{\tau} - \mu H = \frac{\bar{D}(l)}{a^2},$$

$$\bar{D}(l) = (c^2 r \bar{f} + \mu |h|^2) (l_\alpha u^\alpha)^2 - \mu (l_\alpha h^\alpha)^2.$$

Nous écartons dans la suite $\bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_1 = 0$, il définit un choc d'Alfvén. On montre [13] que pour qu'un choc non d'Alfvén soit compatible avec

les ondes d'Alfvén, il faut et il suffit que $\bar{\alpha}_0 \bar{\alpha}_1 > 0$. On obtient alors deux types de chocs : les chocs rapides pour lesquels $0 < \bar{\alpha}_1 < \bar{\alpha}_0$ et les chocs lents pour lesquels $\bar{\alpha}_1 < \bar{\alpha}_0 < 0$.

3° La courbe d'Hugoniot de détonation et la droite de Michelson

a. On déduit de l'expression de W^β le scalaire invariant suivant :

$$(24) \quad K = c^2 \bar{f}^2 - \frac{c^2 \alpha^2}{l_\alpha l^\alpha} \bar{\tau}^2 + 2 \mu \chi \bar{\tau} - \frac{\mu^2 H}{c^2} \chi.$$

Un état y_0 du fluide (0) étant donné en $x \in \Sigma$, nous considérons dans la suite les états y du fluide (1) vérifiant les conditions

$$(25) \quad H(y_0) = H(y) = H, \quad L(y_0) = L(y) = L.$$

Sous ces conditions, un état thermodynamique $(\bar{\tau}, p)$ du fluide (1) définit un point \bar{z} du plan $(\bar{\tau}, \bar{q})$ et inversement.

De (22) et (24) il suit que pour un état thermodynamique donné $(\bar{\tau}_0, p_0)$ du fluide (0) l'état thermodynamique $(\bar{\tau}_1, p_1)$ du fluide (1) est sur la courbe d'Hugoniot :

$$(26) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}_1) &= c^2 (\bar{f}_1^2 - \bar{f}_0^2) - (\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_0) (p_1 - p_0) \\ &+ \frac{\mu}{2} \left(\chi_1 + \chi_0 - 2 \chi_0 \frac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}_1} \right) = 0. \end{aligned}$$

DÉFINITION 1. — On appelle détonations des processus de combustion engendrés par des chocs et s'opérant avec croissance d'entropie.

La courbe \mathcal{H} d'Hugoniot correspondante sera appelée adiabatique de détonation. Nous supposons que la pression p croît indéfiniment le long de \mathcal{H} .

b. Représentons dans le plan $(\bar{\tau}, \bar{q})$ l'adiabatique de choc [13] et l'adiabatique de détonation.

La variation de l'état de la matière dans l'onde de détonation a lieu le long d'une droite Δ du plan $(\bar{\tau}, \bar{q})$ joignant \bar{z}_0 à $z \in \mathcal{H}$. Cette droite est appelée droite de Michelson.

c. Introduisons la fonction d'Hugoniot $\mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z})$, fonction de \bar{z} pour un point initial donné \bar{z}_0 ,

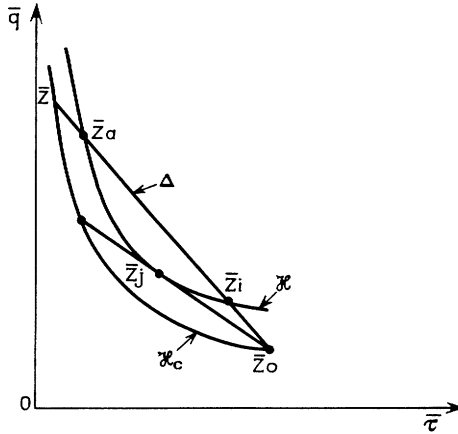
$$(27) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}) &= c^2 (\bar{f}^2 - \bar{f}_0^2) - (\bar{\tau} + \bar{\tau}_0) (p - p_0) \\ &+ \frac{\mu}{2} (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) \left(\chi + \chi_0 - 2 \chi_0 \frac{\bar{\alpha}_0}{\bar{\alpha}} \right). \end{aligned}$$

En différentiant $\mathcal{E}(\bar{z}_0, \bar{z})$ on obtient d'après la relation

$$c^2 d\bar{f} = c^2 df = \theta dS + V dp,$$

$$(28) \quad d\mathcal{E} = 2\bar{f}\theta dS + (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) d\bar{q} - (\bar{q} - \bar{q}_0) d\bar{\tau}.$$

Soit m la pente d'une droite Δ du plan $(\bar{\tau}, \bar{q})$ d'équation $\bar{q} - \bar{q}_0 = m(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)$.



L'adiabatique de choc \mathcal{E}_c et l'adiabatique de détonation \mathcal{E} dans le plan $(\bar{\tau}, \bar{q})$.

La relation (28) peut alors s'écrire

$$(29) \quad d\mathcal{E} = 2\bar{f}\theta dS + (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)^2 dm,$$

le long de Δ on obtient d'après (28) ou (29) :

$$(30) \quad d\mathcal{E} = 2\bar{f}\theta dS.$$

Si Δ est la droite (\bar{z}_0, \bar{z}_1) on obtient comme dans le cas des ondes de choc [13] :

$$(31) \quad \bar{\alpha}^2 \bar{\tau}'_s dS = \frac{\bar{\alpha} \bar{P}(l)}{a^2 l_\alpha l^2} d\bar{\tau} = \frac{\bar{\alpha} \bar{P}(l)}{c^2 a^4} d\bar{q},$$

$\bar{P}(l)$ désigne le premier membre de l'équation aux ondes magnétosoniques :

$$(32) \quad \bar{P}(l) = c^2 r\bar{f}(\bar{\gamma} - 1)(l_\alpha u^\alpha)^4$$

$$+ (c^2 r\bar{f} + \mu |h|^2 \bar{\gamma})(l_\alpha u^\alpha)^2 l_o l^o - \mu (l_\alpha h^\alpha)^2 l_\rho l^\rho,$$

où $\bar{\gamma} = c^2 \bar{r}'_p$, $\bar{\gamma}$ étant donné par la relation

$$(33) \quad c^2 \bar{\tau}'_p = -V^2 (\bar{\gamma} - 1) \quad (\bar{\tau}'_p < 0 \Leftrightarrow \bar{\gamma} > 1).$$

d. De l'étude de la variation de l'entropie S le long de la droite Δ il résulte [13] :

LEMME. — *Il existe sur Δ sous les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) un maximum unique de S.*

Il résulte du lemme précédent d'après (30).

THÉORÈME I. — *Sous les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) , toute droite Δ issue de \bar{z}_0 a au plus deux points d'intersection avec \mathcal{X} .*

Désignons par \bar{z}_i et \bar{z}_a les deux points d'intersection de Δ avec \mathcal{X} (voir fig.) Au point \bar{z}_i correspond une détonation faible et au point \bar{z}_a , une détonation forte. Pour le type de combustion que nous étudions le point \bar{z}_i est inaccessible pour la matière.

e. En dérivant $\bar{q} = \bar{q}(\bar{\tau}, S)$ deux fois par rapport à $\bar{\tau}$ à S constant on obtient

$$(34) \quad \frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \bar{\tau}^2} = - \left(\frac{N}{\bar{\tau}^3} \right) \quad (\text{avec } N = \bar{\tau}'_p - 3 \mu c^4 \frac{k^2}{\alpha^2} \bar{\tau}'_p{}^3).$$

Ainsi $\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \bar{\tau}^2} > 0$ sous les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) .

Le long de \mathcal{X} on obtient d'après (28) :

$$(35) \quad \Pi \left(\frac{dS}{d\bar{\tau}} \right) = - (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) \left\{ \frac{\partial \bar{q}}{\partial \bar{\tau}} - \frac{\bar{q} - \bar{q}_0}{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0} \right\},$$

où $\Pi = 2 \bar{f} \theta + (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) \frac{\partial \bar{q}}{\partial S} > 0$ le long de \mathcal{X} .

Sur (35) on voit qu'au point de tangence d'une droite issue de \bar{z}_0 avec la courbe \mathcal{X} on a $dS = 0$.

Supposons de \bar{z}_0 qu'on puisse mener deux tangentes à \mathcal{X} . Il résulte alors de (35) que $\frac{\partial^2 \bar{q}}{\partial \bar{\tau}^2}$ doit changer de signe, ce qui d'après (34) est contradictoire avec nos hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) .

THÉORÈME II. — *Sous les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) , il existe une droite et une seule de \bar{z}_0 tangente à la courbe \mathcal{X} définie pour des valeurs arbitrairement grandes de p.*

Soit \bar{z}_j le point de contact de la tangente mené de \bar{z}_0 à \mathcal{X} . Ce point qui est unique d'après le théorème précédent est appelé point de Jouguet. Si m_j est la pente de cette tangente, toutes les droites Δ de pente $m < m_j < 0$ rencontrent \mathcal{X} en deux points.

DÉFINITION 2. — Par rapport à la valeur de la variable thermodynamique $\bar{\tau}$ caractérisant le fluide (1) un front de combustion est dit :

- détonation forte si $\bar{\tau} < \bar{\tau}_j$;
- détonation Jouguet si $\bar{\tau} = \bar{\tau}_j$;
- détonation faible si $\bar{\tau} > \bar{\tau}_j$.

On sait que seule la partie de la courbe \mathcal{H} qui est telle que $\bar{\tau} \leq \bar{\tau}_j$ convient physiquement pour le processus de combustion envisagé.

f. Considérons un choc $\bar{z}_0 \rightarrow z \in \mathcal{H}_0$ et supposons que ce choc soit suivi par une déflagration, c'est-à-dire un front de combustion pour lequel $[\bar{\tau}] > 0$. Soit $\bar{\mathcal{H}}(z, \bar{z}_1) = 0$ la courbe d'Hugoniot relative à z . Les points d'intersection de la droite (\bar{z}_0, z) avec \mathcal{H} et $\bar{\mathcal{H}}$ coïncident. Il en résulte :

THÉORÈME III. — Une détonation forte (resp. faible) est équivalente à un choc suivi par une déflagration faible (resp. forte).

4° Orientation des ondes de détonation

Sous les hypothèses (\bar{H}_1) on montre qu'on a $l_x l^x \geq 0 \Rightarrow \bar{P}(l) > 0$, \bar{z} étant alors positif, on déduit de (31) que $\frac{dS}{d\bar{\tau}}$ et $\frac{dS}{d\bar{q}}$ sont positifs le long de Δ . Or comme

$$\mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}_1) = \mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}_a),$$

la fonction \mathcal{H} est stationnaire en un point au moins du segment (\bar{z}_1, \bar{z}_a) et il en est de même pour S d'après (30), ce qui implique contradiction.

Ainsi nécessairement $l_x l^x < 0$.

THÉORÈME IV. — Sous les hypothèses (\bar{H}_1) toute onde de détonation Σ est nécessairement orientée dans le temps. Si V_0^Σ et V_1^Σ sont les vitesses de Σ par rapport au fluide (0) et au fluide (1), on a $V_0^\Sigma < c$, $V_1^\Sigma < c$.

Du théorème précédent on déduit que la quantité χ est positive. On pose $\chi = k^2$ et (23) s'écrit $k_1 \bar{z}_1 = k_0 \bar{z}_0$. Il en résulte que dans un choc rapide le champ magnétique est amplifié et affaibli dans un choc lent.

La relation (26) d'Hugoniot peut s'écrire alors

$$(36) \quad \mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}_1) = c^2 (\bar{f}_1^2 - \bar{f}_0^2) - (\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_0) (p_1 - p_0) + \frac{\mu}{2} (\bar{\tau}_1 - \bar{\tau}_0) (k_1 - k_0)^2 = 0.$$

5° *Thermodynamique des détonations*

a. En introduisant la fonction $p = p(\bar{\tau}, S)$, les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) deviennent

$$(37) \quad p'_{\bar{\tau}} < 0, \quad p'_S > 0 \quad \text{et} \quad p''_{\bar{\tau}^2} > 0.$$

Il résulte de ces hypothèses et de la définition 1 :

$$[p] > 0, \quad [\bar{\tau}] < 0.$$

On déduit alors de la relation (36) que $[\bar{f}] > 0$, ce qui conduit avec $[\bar{\tau}] < 0$ à $[r] > 0$.

THÉORÈME V. — *A la traversée d'une onde de détonation Σ on a*

$$[p] > 0, \quad [\bar{\tau}] < 0, \quad [\bar{f}] > 0, \quad [r] > 0.$$

b. Le long de \mathcal{X} on a, d'après (28) :

$$2\bar{f}\theta dS = - \{ (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) d\bar{q} - (\bar{q} - \bar{q}_0) d\bar{\tau} \}.$$

Au point Jouguet \bar{z}_j , $dS = 0$ et

$$\left(\frac{d^2 S}{d\bar{\tau}^2} \right)_j = - \left\{ \frac{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)}{2\bar{f}\theta} \frac{d^2 \bar{q}}{d\bar{\tau}^2} \right\} > 0.$$

Il en résulte d'après (29), $\left(\frac{d^2 m}{d\bar{\tau}^2} \right)_j > 0$.

THÉORÈME VI. — *Pour les fronts Jouguet l'entropie S du fluide (1) et le flux de particules sont stationnaires, ils sont minimaux par rapport aux autres détonations pouvant avoir lieu à partir du même état thermodynamique du fluide (0).*

6° *Vitesses des ondes de détonation magnétohydrodynamiques*

a. De l'expression de y^Σ :

$$y^\Sigma = \frac{(l_x u^\alpha)^2}{(l_x u^\alpha)^2 - l_x l^\alpha} = \frac{a^2}{a^2 - r^2 l_x l^\alpha},$$

on déduit que

$$[y^\Sigma] = \frac{a^2 (r_0 + r_1) l_x l^\alpha}{(a^2 - r_1^2 l_x l^\alpha) (a^2 - r_0^2 l_x l^\alpha)} [r] < 0.$$

Ainsi, à la traversée d'une onde de détonation on a $[y^\Sigma] < 0$.

b. Considérons la relation suivante équivalente à (11) :

$$(1 - y^\Sigma) (l_x u^\alpha)^2 = - y^\Sigma l_x l^\alpha,$$

ce qui donne

$$c^2 y_0^\Sigma = - \frac{a^2}{r_0^2 l_\alpha l_\alpha^2}.$$

Supposons que le point \bar{z} décrive le segment (\bar{z}_0, \bar{z}_1) , on obtient alors

$$c^2 y_0^\tau = - \frac{1}{r_0^2} \frac{\bar{q} - \bar{q}_0}{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)}$$

et

$$c^2 dy_0^\Sigma = - \frac{1}{r_0^2} \frac{(1 - y_0^\Sigma)^2}{(\bar{\tau} - \bar{\tau}_0)^2} \{ (\bar{\tau} - \bar{\tau}_0) d\bar{q} - (\bar{q} - \bar{q}_0) d\bar{\tau} \}.$$

Au point Jouguet ceci donne $dy_0^\Sigma = 0$; en dérivant une seconde fois on obtient en ce point :

$$c^2 \frac{d^2 y_0^\Sigma}{d\bar{\tau}^2} = - \frac{1}{r_0^2} \frac{(1 - y_0^\Sigma)^2}{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0} \left(\frac{d^2 \bar{q}}{d\bar{\tau}^2} \right) > 0.$$

Pour les fronts Jouguet la vitesse y_0^Σ de l'onde de détonation Σ par rapport au fluide (0) est stationnaire; elle est minimale par rapport aux autres détonations pouvant avoir lieu à partir du même état thermodynamique de ce fluide.

c. Considérons la droite Δ rencontrant la courbe \mathcal{H} en \bar{z}_i et \bar{z}_a . En ces points la fonction de Hugoniot a même valeur, elle est donc stationnaire en un point au moins du segment (\bar{z}_i, \bar{z}_a) qui est un maximum pour \mathcal{H} sur Δ . Il résulte de (30) que ce point correspond aussi à un maximum pour S et qu'il est unique. On déduit que $dS > 0$ en \bar{z}_i et \bar{z}_0 , $dS < 0$ en \bar{z}_a , ce qui entraîne, la variable $\bar{\tau}$ décroissant

$$\left(\frac{dS}{d\bar{\tau}} \right)_i < 0, \quad \left(\frac{dS}{d\bar{\tau}} \right)_0 < 0, \quad \left(\frac{dS}{d\bar{\tau}} \right)_a > 0.$$

Si Δ est la droite (\bar{z}_0, \bar{z}_1) , il vient

$$\bar{\alpha}^2 \bar{\tau}_s \left(\frac{dS}{d\bar{\tau}} \right) = \frac{\bar{\alpha} \bar{P}(l)}{a^2 l_\alpha l_\alpha^2}.$$

En interprétant les signes de $\bar{\alpha}$ et de $\bar{P}(l)$, on obtient

THÉORÈME VII. — *Sous les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) , les vitesses V_0^Σ et V_1^Σ d'une onde de détonation magnétohydrodynamique par rapport au fluide (0) et au fluide (1) vérifient les inégalités suivantes :*

1. Pour un choc rapide :

$$V_0^A < V_0^{M+} < V_0^\Sigma, \quad \begin{cases} V_1^A < V_1^\Sigma < V_1^{M+} & \text{pour une détonation forte,} \\ V_1^A < V_1^{M+} < V_1^\Sigma & \text{pour une détonation faible.} \end{cases}$$

2. Pour un choc lent :

$$V_0^{M-} < V_0^\Sigma < V_0^A, \quad \begin{cases} V_1^\Sigma < V_1^{M-} < V_1^A & \text{pour une détonation forte,} \\ V_1^{M-} < V_1^\Sigma < V_1^A & \text{pour une détonation faible.} \end{cases}$$

Dans le cas d'une détonation de Jouguet on a $dS = 0 \Rightarrow \bar{P}(l) = 0$. Il en résulte qu'on a pour un choc rapide $V_j^\Sigma = V_j^{M+}$ et pour un choc lent $V_j^\Sigma = V_j^{M-}$.

THÉORÈME VIII. — *Après combustion les fronts Jouguet se propagent à la vitesse magnéto-sonique rapide (resp. lente) pour un choc rapide (resp. lent).*

Dans le cas d'un champ magnétique perpendiculaire à la direction de propagation ($l_\alpha h^\alpha = 0$), on obtient

$$V^A = V^{M-} = 0, \quad V_0^{M+} < V_0^\Sigma, \\ V_j^\Sigma = V_j^{M+} = \frac{1}{\bar{\gamma}_j} + \frac{\bar{\gamma}_{j-1}}{\bar{\gamma}_j} \frac{\mu |h_j|^2}{c^2 r_j \bar{f}_j + \mu |h_j|^2}.$$

7° Théorème d'existence et d'unicité des équations des détonations

a. Considérons un choc $\bar{z}_0 \rightarrow z_1 \in \mathcal{H}_c$. Soient Δ la droite (\bar{z}_0, z_1) et m sa pente. Du théorème I, il résulte qu'il correspond au cours de ce choc deux points \bar{z}_1 de la courbe \mathcal{H} , représentant une détonation forte et une détonation faible. Pour chaque type de détonations le point \bar{z}_1 est unique et satisfait $\mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}_1) = 0$. Si $m = m_j$ la droite Δ est tangente à \mathcal{H} en un point \bar{z}_j unique. Pour $m = \frac{c^2 a^2}{l_\alpha l^\alpha}$, \bar{z}_1 satisfait (22) et $\mathcal{H}(\bar{z}_0, \bar{z}_1) = 0$, \bar{z}_1 étant connu, $\bar{\tau}_1$ et p_1 le sont et \bar{f}_1 est donné par la relation de Hugoniot. On déduit de (23) la valeur de $|h_1|^2$, de (19) celle de $l_\alpha u_1^\alpha$ et de (20) celle de $l_\alpha h_1^\alpha$. Les équations générales des détonations admettent ainsi une solution non triviale telle que $\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0 > 0$.

THÉORÈME IX. — *Si la fonction $S(p, \bar{\tau})$ satisfait les hypothèses (\bar{H}_1) et (\bar{H}_2) pour $\bar{\tau} \leq \bar{\tau}_0$ et pour des valeurs arbitrairement grandes de p , à tout état y_0 du fluide (0) vérifiant $\bar{\alpha}_0 \bar{P}(l)_0 > 0$ correspond au cours d'un choc une solution non triviale unique des équations générales des détonations telle que $\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_0 > 0$.*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HOFFMAN et TELLER, *Phys. Rev.*, vol. 80, 1950, p. 692-702.
- [2] M^{me} Y. CHOQUET-BRUHAT, *Astron. Acta*, vol. 6, 1960, p. 354-365.
- [3] PHAM MAU QUAN, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 2, 1965, p. 151-165.
- [4] I. S. SHIKIN, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 11, 1969, p. 343-372.
- [5] E. LARISH et I. SHEKHTMAN, *Zhur. Eksp. i Teoret. Fiz.*, vol. 35, 1958, p. 203.
- [6] G. A. LYUBIMOV, *Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R.*, vol. 126, 1959, p. 532.
- [7] A. H. TAUB, *Phys. Rev.*, vol. 74, 1948, p. 328-334.
- [8] A. LICHNEROWICZ, *Comm. Math. phys.*, vol. 1, 1966, p. 328-373.
- [9] A. LICHNEROWICZ, *Relativistic hydrodynamics and Magnetohydrodynamics*, New-York, Benjamin, 1967.
- [10] H. WEYL, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 2, 1909, p. 103-122.
- [11] J. C. LUCQUIAUD, *C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 270, série A, 1970, p. 85-89 et t. 271, série A, 1970, p. 1089-1092.
- [12] A. LICHNEROWICZ, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. 7, 1967, p. 271-302.
- [13] A. LICHNEROWICZ, *Comm. Math. phys.*, vol. 12, 1969, p. 145-174.

(Manuscrit reçu le 28 février 1972.)
