ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

E. MOURRE

Quelques résultats dans la théorie algébrique de la diffusion

Annales de l'I. H. P., section A, tome 18, nº 3 (1973), p. 215-226
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1973__18_3_215_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XVIII, n° 3, 1973, p. 215-226.

Section A :
Physique théorique.

Quelques résultats dans la théorie algébrique de la diffusion

par

E. MOURRE (*)

RÉSUMÉ. — Nous allons démontrer quelques résultats concernant le formalisme de la théorie de la diffusion dépendant du temps, tel qu'il a été présenté récemment par plusieurs auteurs : J. M. Combes [1], W. O. Amrein, Ph. A. Martin et B. Misra [2], R. B. Lavine [3]. Les hypothèses que nous prenons pour énoncer les résultats sont proches de celles préconisées dans [2], à la différence près que nous imposons la condition asymptotique à une algèbre d'observable $\mathcal{A}$ agissant sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, plus petite. Soit H_0 l'hamiltonien libre sur $\mathcal{H}$ et $H = H_0 + V$ l'hamiltonien en présence d'un potentiel V. Nos démonstrations sont essentiellement basées sur les propriétés de convergence des mesures spectrales associées aux vecteurs $e^{-iHt}\psi$, ψ étant un état de diffusion.

Nous montrons (théorème 2), que les opérateurs d'ondes $\Omega^{\pm}$ vérifient :

$$\Omega^{\pm} g = \underset{t \to \pm\infty}{\text{s.}\lim}\, e^{+iHt}\, T_t\, g \quad (^1), \tag{1}$$

où g appartient à un ensemble de vecteurs $\mathcal{D}$ dense dans $\mathcal{H}$ et où T_t est une famille d'opérateurs bornés de $\mathcal{A}$.

Nous donnons ensuite (théorème 3) une condition nécessaire et suffisante pour que les opérateurs $\Omega^{\pm}$ existent et que l'on puisse choisir dans (1) les opérateurs T_t unitaires.

1. FORMALISME DE LA THÉORIE ALGÉBRIQUE DE LA DIFFUSION ET ALGÈBRE DE VON NEUMANN

a. Hypothèses asymptotiques

A la suite des travaux de Dollard [4] qui a montré que la théorie de la diffusion dépendant du temps telle qu'elle a été formulée par exemple dans [5], n'est plus applicable au potentiel coulombien, plusieurs

(*) Stagiaire de Recherche (C. N. R. S.).

(^{1}) s. lim désignera toujours la limite forte d'une suite de vecteurs de $\mathcal{H}$.

auteurs ([1], [2], [3]) ont proposé un formalisme plus général. Les hypothèses asymptotiques ne concernent plus des états mais des observables constantes du mouvement libre. Nous adopterons ici un système d'hypothèses inspiré des articles [1] et [2].

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et H_0 l'hamiltonien libre d'un système quantique, $H_0 + V$ celui du système en présence du potentiel. Notons par V_t le groupe e^{-iHt}. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de von Neumann maximale abélienne sur $\mathcal{H}$ contenue dans le commutant de H_0, et $\mathcal{M}$ un sous-espace de Hilbert de $\mathcal{H}$, invariant sous le groupe V_t. Si P désigne le projecteur sur $\mathcal{M}$ nous avons donc :

$$\mathcal{A} \subset H'_0 \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}),$$
$$\mathcal{A} = \mathcal{A}',$$
$$[P, V_t] = 0.$$

Faisons les hypothèses asymptotiques suivantes :

$$\text{Hypothèse A} \begin{cases} (1) & \exists \ \underset{t \to \pm\infty}{\text{s. lim}} V_t^* A V_t P = A^{\pm}, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \\ (2) & [P, A^{\pm}] = 0; \end{cases}$$

$$\text{Hypothèse B} : \quad A^+ = 0 \iff A = 0 \iff A^- = 0.$$

Ces hypothèses diffèrent de celles de l'article [2] par le fait que la condition A est imposée à une algèbre maximale abélienne $\mathcal{A} \subset H'_0$ et non à tout le commutant de H_0. Cette condition est inspirée de l'article de J. M. Combes [1]. Il est en effet intéressant de ne considérer qu'une algèbre de von Neumann maximale abélienne, car elles seules ne contiennent que les renseignements que l'on peut obtenir par une série d'expériences simultanées.

Nous aurons besoin par la suite des résultats suivants :

b. Algèbre de von Neumann et mesures spectrales

Proposition 1. — *Soit une algèbre de von Neumann maximale abélienne $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{H}$ séparable. Il existe un espace compact* X, *une mesure positive de norme* 1 *définie sur la tribu borélienne* B (X), *une étoile isomorphisme isométrique* A *de* $\mathcal{L}^\infty(X, B(X), \nu)$ *sur* $\mathcal{A}$ *et un opérateur unitaire* U *de* $\mathcal{H}$ *dans* $\mathcal{L}^2(X, B(X), \nu)$ *tels que si* π *désigne la représentation canonique de* $\mathcal{L}^\infty$ *sur* $\mathcal{L}^2$, *on ait*

$$A_f = U^{-1} \pi(f) U. \tag{1.1}$$

$\mathcal{L}^\infty(X, B(X), \nu)$ désigne l'ensemble des fonctions de X dans **C**, ν mesurables et ν essentiellement bornées dans lequel on identifie deux fonctions égales presque partout.

$\mathcal{L}^2(X, B(X), \nu)$ désigne l'espace de Hilbert des fonctions de X dans $\mathbf{C}$ de module carré intégrable où l'on identifie encore les fonctions égales presque partout. Le produit scalaire de deux éléments f et g de $\mathcal{L}^2(X, B(X), \nu)$ étant défini par

$$\langle g \mid f \rangle = \int_X f \bar{g} \, d\nu. \tag{1.2}$$

De plus la représentation canonique π associe à tout $h \in \mathcal{L}^\infty(X, B(X), \nu)$ l'opérateur défini sur $\mathcal{L}^2(X, B(X), \nu)$ par

$$\pi(h)[f] = hf, \qquad \forall f \in \mathcal{L}^2(X, B(X), \nu). \tag{1.3}$$

Nous abrégerons les notations $\mathcal{L}^2(X, B(X), \nu)$ par $\mathcal{L}^2(X, \nu)$ et $\mathcal{L}^\infty(X, B(X), \nu)$ par $\mathcal{L}^\infty(X, \nu)$, ou encore si la mesure ν est précisée on utilisera respectivement les notations $\mathcal{L}^2(X)$ et $\mathcal{L}^\infty(X)$.

Démonstration. — $\mathcal{A}$ étant une algèbre de von Neumann maximale abélienne sur $\mathcal{H}$ séparable, elle admet un vecteur ω_0 à la fois cyclique et séparateur; $\mathcal{A}$ contient l'identité. Il existe alors ([6], § 7) un espace X compact, une mesure positive ν de norme 1 tel que $\mathcal{A}$ soit isomorphe par la structure de C*-algèbre à $\mathcal{L}^\infty(X, \nu)$:

$$A : \ f \to A_f, \qquad \forall f \in \mathcal{L}^\infty(X, \nu).$$

De plus, nous avons par construction :

$$\int_X f \, d\nu = \langle \omega_0 \mid A_f \, \omega_0 \rangle. \tag{1.4}$$

L'isomorphisme A est continu si l'on munit $\mathcal{L}^\infty(X, \nu)$ de la topologie faible de dual de $\mathcal{L}^1(X, B(X), \nu)$ et $\mathcal{A}$ de la topologie faible des opérateurs sur $\mathcal{H}$.

Construction de l'opérateur U : ν étant une mesure finie $\mathcal{L}(X, \nu)$ est inclus dans $\mathcal{L}^2(X, \nu)$ et est dense dans $\mathcal{L}^2(X, \nu)$. Associons à tout vecteur de la forme $A_f \, \omega_0$ dans $\mathcal{H}$ la fonction $f \in \mathcal{L}^2(X, \nu)$:

$$U : \ A_f \, \omega_0 \ \to \ f \in \mathcal{L}^\infty(X, \nu) \subset \mathcal{L}^2(X, \nu). \tag{1.5}$$

Nous avons de plus :

$$\langle A_g \, \omega_0 \mid A_f \, \omega_0 \rangle = \langle \omega_0 \mid A_{\bar{g}f} \, \omega_0 \rangle = \int_X \bar{g} f \, d\nu. \tag{1.6}$$

U s'étend donc en un opérateur unitaire de $\mathcal{H}$ sur $\mathcal{L}^2(X, \nu)$. D'autre part nous avons

$$A_f(A_g \, \omega_0) = U^{-1}(fg) = U^{-1} \pi(f) \, U(A_g \, \omega_0). \tag{1.7}$$

Cette formule s'étend par continuité à tout vecteur de $\mathcal{H}$.

DÉFINITION. — Pour tout $\Delta \in \mathrm{B}(\mathrm{X})$, $\mathrm{E}(\Delta)$ désigne le projecteur spectral sur $\mathcal{H}$ correspondant par l'isomorphisme A à la fonction caractéristique X_Δ du borélien Δ.

Soit ξ et $\eta \in \mathcal{H}$, $\mu_{\xi\eta}$ désigne la mesure spectrale définie par

$$(1.8) \qquad \mu_{\xi\eta}(\Delta) = \langle \xi \mid \mathrm{E}(\Delta)\, \eta \rangle.$$

Notons que les mesures spectrales $\mu_{\xi\eta}$ sont des mesures absolument continues par rapport à la mesure $\nu = \mu_{\omega_0 \omega_0}$, ω_0 étant un vecteur séparateur (*voir* [6], § 7). Pour simplifier, on notera $\mu_{\xi,\xi}$ par μ_ξ.

PROPOSITION 2. — *Soit* B *une algèbre de von Neumann abélienne sur* $\mathcal{H}$, ω *un vecteur séparateur. Soit* X *un espace localement compact tel que* B *soit isométriquement isomorphe à* $\mathcal{L}^\infty(\mathrm{X}, \mathrm{B}(\mathrm{X}), \nu)$, ν *étant la mesure spectrale associée au vecteur* ω (*voir* [6], § 7). *Alors toute mesure positive finie* μ *continue par rapport à* ν *est une mesure spectrale.*

En effet, selon le théorème de Radon-Nikodym il existe une fonction

$$(1.9) \quad f \in \mathcal{L}^1(\mathrm{X}, \mathrm{B}(\mathrm{X}), \nu) \qquad \text{telle que} \quad \mu(\Delta) = \int_\Delta f\, d\nu, \qquad \forall\, \Delta \in \mathrm{B}(\mathrm{X}).$$

Prenons alors une fonction positive de X dans R représentant f que nous confondons avec f; et soit la suite de fonctions $g_n : \mathrm{X} \to \mathrm{R}^+$ définie par

$$(1.10) \qquad \begin{cases} g_n(x) = f^{1/2}(x) & \text{si} \quad f(x) < n, \\ g_n(x) = 0 & \text{si} \quad f(x) \geqq n. \end{cases}$$

Nous confondons g_n avec une fonction égale presque partout et ν mesurable qui existe toujours (*voir* par exemple [7], III.6, lemme 9).

$g_n \in \mathcal{L}^\infty(\mathrm{X}, \nu)$ converge presque partout vers $f^{1/2}$ et g_n est majorée par $f^{1/2}$. Selon, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue [7], g_n converge en norme $\mathcal{L}^2$ vers $f^{1/2}$. Pour les mêmes raisons g_n^2 converge en norme $\mathcal{L}^1$ vers f.

D'autre part :

$$(1.11) \qquad \| \mathrm{A}_{g_n}\omega - \mathrm{A}_{g_m}\omega \| = \int_\mathrm{X} | g_n - g_m |^2\, d\nu,$$

ce qui montre que $\mathrm{A}_{g_n}\omega$ converge vers un certain vecteur $\xi \in \mathcal{H}$ tel que

$$(1.12) \qquad \forall\, \Delta \in \mathrm{B}(\mathrm{X}) : \quad \mu_\xi(\Delta) = \langle \xi \mid \mathrm{E}(\Delta)\, \xi \rangle$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \langle \mathrm{A}_{g_n}\omega \mid \mathrm{E}(\Delta)\, \mathrm{A}_{g_n}\xi \rangle$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \int_\Delta | g_n |^2\, d\nu = \int_\Delta f\, d\nu.$$

C. Q. F. D.

c. Conséquences des hypothèses asymptotiques A et B

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre des hypothèses du paragraphe 1 *a*. L'algèbre $\mathcal{A}$ est fixée, ainsi que le vecteur cyclique ω_0 de mesure spectrale notée ν, et satisfont à la proposition 1. Nous nous restreindrons au cas t tendant vers plus l'infini.

Désignons par μ_ξ^t la mesure spectrale associée au vecteur $V_t\xi$ pour tout $\xi \in \mathcal{M}$,

$$(1.13) \qquad \mu_\xi^t(\Delta) = \langle \xi \mid V_t^* \, E(\Delta) \, V_t \, P \, \xi \rangle, \qquad \forall \, \Delta \in B(X).$$

PROPOSITION 3. — *La famille de mesure* $(\mu_\xi^t)_{t \in \mathbf{R}^+}$ *est une famille de mesures equi-continues par rapport à la mesure* $\nu = \mu_{\omega_0}$ *et il existe une mesure* μ_ξ^+, ν *continue telle que*

$$(1.14) \qquad \mu_\xi^+(\Delta) = \lim_{t \to +\infty} \mu_\xi^t(\Delta)$$

et

$$(1.15) \qquad \langle \xi \mid A_f^+ \xi \rangle = \int_X f \, d\mu_\xi^+ .$$

Démonstration. — L'hypothèse A.1 entraîne l'existence de la limite dans l'expression (1.14) pour chaque Δ. Toutes les mesures μ_ξ^t étant absolument continues par rapport à la mesure basique ν, l'existence de la mesure μ_ξ^+ est une conséquence directe du théorème de Vitali-Hahn-Saks.

Assimilons à l'aide du théorème de Radon-Nikodym chaque mesure μ_ξ^t à une fonction $h_t \in \mathcal{L}^1(X, B(X), \nu)$ et μ_ξ^+ à h_ξ^+.

Nous avons donc par hypothèse :

$$(1.16) \qquad \int_\Delta h_t \, d\nu \to \int_\Delta h^+ \, d\nu \qquad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

Selon ([7], IV, théorème 7) la famille h_t converge faiblement ves h^+, c'est-à-dire

$$(1.17) \qquad \forall f \in \mathcal{L}^\infty(X, \nu), \quad \int_X f h_t \, d\nu \to \int_X f h^+ \, d\nu \qquad \text{lorsque} \quad t \to +\infty.$$

D'autre part nous avons

$$(1.18) \qquad \lim_{t \to +\infty} \int_X f h_t \, d\nu = \lim_{t \to +\infty} \langle \xi \mid V_t^* \, A_f \, V_t \, P \, \xi \rangle = \langle \xi \mid A_f^+ \xi \rangle,$$

ce qui démontre la formule (1.15). En outre la famille $(h_t)_t$ est faiblement sous-compacte. En effet une suite quelconque t_n admet un point d'accumulation t_0 ou tend vers l'infini. Si t_n tend vers $+\infty$; h^+ est la limite faible de la suite $h\,t_n$. Si t_n tend vers t_0, le groupe V_t étant fortement continu, il est facile de voir que la suite $h\,t_n$ admet aussi un point limite faible.

L'équicontinuité des mesures μ_ξ^t par rapport à la mesure ν découle alors de ([7], IV, corollaire 1.1).

Le théorème suivant est démontré dans [2] sous l'hypothèse $\mathcal{A} = H'_0$. Nous donnons ici une démonstration directe de la continuité faible de l'isomorphisme.

THÉORÈME 1. — *Sous les hypothèses* A *et* B *l'application* Φ *qui à tout* $A \in \mathcal{A}$ *associe* $A^+ \in \mathcal{L}(\mathcal{M})$ *est une étoile homomorphisme isométrique de* $\mathcal{A}$ *dans* $\mathcal{L}(\mathcal{M})$. *De plus, il est faiblement continu et* $\mathcal{A}^+ = \Phi(\mathcal{A})$ *est une algèbre de von Neumann sur* $\mathcal{M}$.

Le fait que Φ soit une $\bigstar$-homomorphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ est une conséquence de A_1 et A_2 (*voir* [2]).

Montrons que Φ est faiblement continue :

Soit un voisinage faible de $\Phi(A_f) = A_f^+$ défini par $\xi \in \mathcal{M}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\mathcal{V}(A_f^+, \xi, \varepsilon) = \{ A_g^+ \mid g \in \mathcal{L}^\infty(X, \nu) \tag{1.19}$$

et tels que $\langle \xi \mid (A_f^+ - A_g^+ \xi) \rangle \mid < \varepsilon \}$.

Selon la proposition 3, nous avons

$$\langle \xi \mid A_f^+ - A_g^+ \xi \rangle = \int_X (f - g)\, d\mu_\xi^+, \tag{1.20}$$

la mesure μ_ξ^+ étant ν-continue, il existe d'après la proposition 2, un vecteur $\xi' \in \mathcal{H}$ tel que

$$\int_X (f - g)\, d\mu_\xi^+ = \langle \xi' \mid A_f - A_g \xi' \rangle, \tag{1.21}$$

de sorte que l'on a

$$\Phi(\mathcal{V}(A_f, \xi', \varepsilon)) = \mathcal{V}(A_f^+, \xi, \varepsilon),$$

ce qui prouve la continuité faible de Φ.

En utilisant l'hypothèse B, on montre facilement que Φ est isométrique (*cf.* par exemple dans [6] la démonstration de la proposition 1, § 7). $\mathcal{A}_1^+$ la boule unité de $\mathcal{A}^+$ est donc l'image par l'application faiblement continue Φ de la boule unité $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ qui est faiblement compacte, de sorte que $\mathcal{A}_1^+$ est faiblement fermée et par conséquent $\mathcal{A}^+$ [5].

2. OPÉRATEURS D'ONDES : Ω^+

PROPOSITION 4. — *Il existe un vecteur* $\omega \in \mathcal{M}$ *tel que* μ_ω^+ *soit égale à* ν.

En effet, $\mathcal{A}^+$ est isométriquement isomorphe à $\mathcal{L}^\infty(X, B(X), \nu)$ puisque ces deux algèbres sont isométriquement isomorphe à $\mathcal{A}$. L'isormophisme associe à toute fonction caractéristique χ_Δ le projecteur $E^+(\Delta)$. La mesure ν peut donc être considérée comme une mesure sur $\mathcal{A}^+$. Il suffit donc de démontrer conformément à la proposition 2 que la mesure ν sur $\mathcal{A}^+$ est absolument continue, par rapport à une mesure spectrale $\mu^+_{\omega'}$ induite sur $\mathcal{A}^+$ par un vecteur ω' séparateur.

Soit donc ω' séparateur pour $\mathcal{A}^+$. On a donc :

$$\langle \omega' \mid E^+(\Delta)\,\omega' \rangle = 0 \;\Rightarrow\; E^+(\Delta) = 0 \;\Rightarrow\; E(\Delta) = 0 \quad \text{(par hypothèse),}$$

ce qui entraîne $\nu(\Delta) = 0$.

Il existe un vecteur $\omega \in \mathcal{M}$ tel que

$$\langle \omega \mid E^+(\Delta)\,\omega \rangle = \nu(\Delta) = \langle \omega_0 \mid E(\Delta)\,\omega_0 \rangle. \tag{2.1}$$

Il est clair que ce vecteur ω est aussi séparateur pour $\mathcal{A}^+$.

Dans le but de construire un opérateur d'onde Ω^+, on doit utiliser l'hypothèse supplémentaire suivante :

HYPOTHÈSE C : *$\mathcal{A}^+$ est une algèbre de von Neumann maximale abélienne sur $\mathcal{M}$.*

PROPOSITION 5. — *Les hypothèses* A, B, C *étant satisfaites, alors il existe un opérateur Ω^+ sur $\mathcal{H}$ tel que*

$$\Omega^+\,\Omega^{+*} = P \qquad \text{et} \qquad \Omega^{+*}\,\Omega^+ = 1, \tag{2.2}$$

$$A^+ = \Omega^+\,A\,\Omega^{+*}. \tag{2.3}$$

Il suffit de définir Ω sur les vecteurs de $\mathcal{H}$ de la forme $A_f\,\omega_0$ de la façon suivante :

$$\Omega^+(A_f\,\omega_0) = A_f^+\,\omega, \qquad A_f^+ = \Phi(A_f). \tag{2.4}$$

Il est facile de voir que l'opérateur s'étend alors en une isométrie de support initial $\mathcal{H}$ et de support final $\mathcal{M}$ qui vérifie (2.3).

THÉORÈME 2. — *Il existe, sous les hypothèses* A, B, C, *une famille d'opérateurs bornés appartenant à $\mathcal{A}$ telle que*

$$\Omega^+ h = \underset{t \to +\infty}{\text{s. lim}}\; V_t^*\,T_t\,h. \tag{2.5}$$

Pour un ensemble $\mathcal{D}$ de vecteur h dense dans $\mathcal{H}$.

La démonstration repose sur le théorème de Vitali-Hahn-Saks.

Démonstration. — Soit $\omega = \Omega^+\,\omega_0$.

Considérons

$$U(V_t\,\omega) = f_t \in \mathcal{L}^2(X, \nu) \qquad \text{et} \qquad U(\omega_0) = 1 \in \mathcal{L}^2(X, \nu).$$

Soit M_t une fonction positive de t tendant vers l'infini lorsque $t \to \infty$. Posons

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} f'_t(x) &= f_t(x) \quad \text{si} \quad |f_t(x)| \leqq M_t \\ &= 0 \quad \text{si} \quad |f_t(x)| \geqq M_t. \end{aligned}$$

Posons alors :

$$(2.7)\qquad T_t = A_{f'_t}.$$

Montrons que

$$(2.8)\qquad (a) \quad \lim_{t \to +\infty} \| V_t^* T_t \omega_0 - \omega \| = \| T_t \omega_0 - V_t \omega \| = 0.$$

En effet :

$$(2.9)\qquad \| A_{f'_t} \omega_0 - V_t \omega \| = \int_X | f'_t - f_t |^2 d\nu = \int_{\Delta_t} | f_t |^2 d\nu,$$

$$(2.10)\qquad \Delta_t = \left\{ x \in X \;\middle|\; | f_t(x) | > M_t \right\},$$

V_t étant un opérateur unitaire, on a

$$\int_X | f_t |^2 d\nu = 1 \geqq \int_{\Delta_t} | f_t |^2 d\nu \geqq M_t^2 \, \nu(\Delta t),$$

ce qui montre que la mesure $\nu(\Delta t) \leqq \frac{1}{M_t^2}$ tend vers zéro quand $t \to \infty$.

La famille μ_ω^t étant équicontinue par rapport à ν (proposition 3), les termes de la formule (2.9) tendent bien vers zéro lorsque $t \to +\infty$. Montrons maintenant :

$$(2.11)\qquad (b) \quad \lim_{t \to +\infty} \| V_t^* T_t A_f \omega_0 - \Omega^+ A_f \omega_0 \| = 0, \qquad \forall\, A_f \in \mathfrak{A}.$$

En effet, en utilisant la définition de A^+ nous voyons que

$$(2.12)\qquad \begin{aligned} \lim_{t \to +\infty} \| T_t A_f \omega_0 - V_t A_f^+ \omega \| &= \lim_{t \to +\infty} \| T_t A_f \omega_0 - A_f V_t \omega \| \\ &\leqq \lim_{t \to +\infty} \| A_f \| . \| T_t \omega_0 - V_t \omega \|. \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Remarquons que pour la formule (2.5) puisse être valable pour tout vecteur de $\mathcal{H}$, il est nécessaire et suffisant que les opérateurs T_t soient uniformément bornés.

Ce théorème présente une amélioration par rapport à celui exposé dans [8] où les opérateurs T_t sont alors des opérateurs non bornés sur $\mathcal{H}$.

Il reste cependant insatisfaisant; il ne fait pas intervenir tous les vecteurs de $\mathcal{H}$. D'autre part dans les exemples physiques que l'on connaît actuellement les opérateurs T_t sont unitaires. Nous discutons ce cas dans le théorème suivant ;

THÉORÈME 3. — *Supposons les hypothèses* A *et* B *satisfaites. Alors les propositions suivantes sont équivalentes* :

(i) *Pour chaque vecteur* $\xi \in \mathcal{M}$ *les valeurs suivantes* $\mu_\xi(\Delta)$ *convergent vers* $\mu_\xi^+(\Delta)$ *uniformément en* Δ *lorsque* $t \to +\infty$.

(ii) *Pour chaque* $\xi \in \mathcal{M}$ *les mesures* μ_ξ^t *convergent en norme vers* μ_ξ^+.

(iii) *L'algèbre* $\mathcal{A}^+$ *est maximale abélienne et les opérateurs* Ω^+ *vérifient*

$$\Omega^+ = \underset{t \to +\infty}{\text{s.}\lim}\, V_t^* T_t, \tag{2.5}$$

où T_t*est une famille d'opérateurs unitaires dans* $\mathcal{A}$.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) : La norme d'une mesure μ définie sur le couplet $(X, B(X))$ est définie par la valeur que prend la variation totale de la mesure μ sur X (*voir* [7]) :

$$|\mu| = \mathcal{V}(\mu, X). \tag{2.13}$$

Les inégalités suivantes :

$$\sup_{\Delta \in B(X)} |\mu(\Delta)| \leq \mathcal{V}(\mu, X) = |\mu| \leq 4 \sup_{\Delta \in B(X)} |\mu(\Delta)| \tag{2.14}$$

montre qu'une suite de mesure μ^n converge en norme vers zéro si et seulement si la convergence de $\mu^n(\Delta)$ vers zéro est uniforme en $\Delta \in B(X)$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Ω^+ est un opérateur isométrique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{M}$. Soit $\xi \in \mathcal{M}$ et $\xi' = \Omega^{+*}\xi$. Nous avons

$$\|\xi\| = \|\xi'\| = \|T_t^* V_t \xi\|.$$

D'autre part, la suite de vecteurs $T_t^* V_t \xi$ converge faiblement vers ξ' donc la suite converge fortement :

$$\underset{t \to +\infty}{\text{s.}\lim}\, T_t^* V_t \xi = \Omega^{+*}\xi, \qquad \forall \xi \in \mathcal{M}. \tag{2.15}$$

De sorte que lorsque $t \to +\infty$, l'expression suivante :

$$\langle V_t \xi \mid E(\Delta) V_t \xi \rangle = \langle T_t^* V_t \xi \mid E(\Delta) T_t^* V_t \xi \rangle \tag{2.16}$$

converge uniformément en Δ.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) :

a. Montrons que $\mathcal{A}^+$ est maximale abélienne. Pour cela il suffit de montrer que le vecteur ω (de la proposition 4) est cyclique pour $\mathcal{A}^+$. Soit $\eta \in \mathcal{M}$. Posons

$$g_t = U(V_t \eta) \qquad \text{et} \qquad f_t = U(V_t \omega).$$

Supposons que

$$\langle \eta \mid \mathcal{A}^{+} \omega \rangle = 0 \iff \langle \eta \mid E^{+}(\Delta) \omega \rangle = 0, \qquad \forall \Delta \in B(X),$$

c'est-à-dire

(2.17) $$\langle \eta \mid E^{+}(\Delta) \omega \rangle = \mu^{+}_{\eta\omega}(\Delta) = 0, \qquad \forall \Delta \in B(X).$$

L'hypothèse (ii) entraîne donc que

(2.18) $$\lim_{t \to +\infty} \mid \mu^{t}_{\eta\omega} \mid = 0 = \lim_{t \to +\infty} \int_{X} \mid g_t f_t \mid d\nu.$$

Pour la même raison la mesure μ^{t}_{ω} converge en norme vers la mesure ν, c'est-à-dire

(2.19) $$\lim_{t \to +\infty} \int \mid \mid f_t \mid^2 - 1 \mid d\nu = 0.$$

Montrons alors que

(2.20) $$\lim_{t \to +\infty} \int_{X} \mid g_t \mid d\nu = 0.$$

En effet :

(2.21) $$\int_{X} \mid g_t \mid d\nu = \int_{X} \mid g_t f_t \mid d\nu + \int_{X} \mid g_t \mid (1 - \mid f_t \mid) \, d\nu,$$

de plus en utilisant l'inégalité de Schwartz et le fait que V_t est unitaire nous avons

(2.22) $$\int_{X} \mid g_t \mid (1 - \mid f_t \mid) \, d\nu \leq \left(\int_{X} \mid g_t \mid^2 d\nu \right)^{1/2} \left(\int_{X} (1 - \mid f_t \mid)^2 d\nu \right)^{1/2} \leq \| \eta \| \int_{X} \mid 1 - \mid f_t \mid^2 \mid d\nu.$$

Les expression (2.18), (2.19) et (2.21) démontre donc la formule (2.20). Montrons maintenant que

(2.23) $$\lim_{t \to +\infty} \int_{X} \mid g_t \mid^2 d\nu = 0 = \| \eta \|,$$

soit

(2.24) $$X_t = \{ x \in X \, \big| \, \mid g_t(x) \mid > 1 \},$$

(2.25) $$\nu(X_t) \leq \int_{X_t} \mid g_t \mid d\nu \leq \int_{X} \mid g_t \mid d\nu,$$

$\nu(V_t)$ tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini et à cause de l'équicontinuité des mesures μ^{t}_{η} nous avons

(2.26) $$\lim_{t \to +\infty} \int_{X_t} \mid g_t \mid^2 d\nu = 0.$$

D'autre part nous pouvons écrire :

$$(2.27)\qquad \int_X |g_t|^2 d\nu = \int_{X_t} |g_t|^2 d\nu + \int_{X'_t} |g_t|^2 d\nu, \qquad X'_t = C_X X_t,$$

$$\leq \int_{X_t} |g_t|^2 d\nu + \int_X |g_t| d\nu,$$

ce qui démontre (2.23) et par conséquent $\mathcal{A}^+$ est maximale abélienne.

b. Construction des opérateurs T_t unitaires satisfaisant l'équation (2.5).

Soit toujours $f_t = U(V_t \omega)$, $f_t \in \mathcal{L}^2(X, \nu)$.

Il existe une famille fonction mesurable de module égal à 1 presque partout que nous noterons $e^{i\alpha_t}$ telles que

$$(2.28)\qquad f_t = e^{+i\alpha_t} |f_t|.$$

Définissons alors la famille d'opérateurs T_t par

$$(2.29)\qquad T_t = A\, e^{i\alpha_t}.$$

Nous avons alors :

$$(2.30)\qquad \lim_{t\to+\infty} \| V_t^* T_t \omega_0 - \omega \| = \lim_{t\to+\infty} \| T_t \omega_0 - V_t \omega \|,$$

$$(2.31)\qquad = \lim_{t\to+\infty} \int_X | e^{i\alpha_t} - f_t |^2 d\nu \leq \int_X | 1 - |f_t|^2 | d\nu,$$

Ces limites sont bien nulles en vertu de (2.22).

Nous avons donc bien :

$$(2.32)\qquad \mathrm{s.}\lim_{t\to+\infty} V_t^* T_t \omega_0 = \Omega^+ \omega_0.$$

D'autre part, cette formule s'étend à tous les vecteurs de $\mathcal{H}$ de la forme $A_f \omega_0$ de la même façon que dans le théorème 2. De plus les opérateurs T_t étant unitaires, elle s'étend ici à tous les vecteurs de $\mathcal{H}$.

C. Q. F. D.

REMERCIEMENTS

Je remercie M. J. M. Combes pour m'avoir suggérer ce travail et pour les encouragements et les conseils qu'il m'a prodigués tout au long de son achèvement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. M. Combes, *An Algebraic Approach to Quantum Scattering Theory*, Preprint, Marseille, 1969, p. 315.

[2] W. O. AMREIN, PH. MARTIN et B. MISRA, *Helv. Phys. Acta*, vol. 43, 1970, p. 313.
[3] R. B. LAVINE, *J. Funct. Analysis*, vol. 5, n° 3, juin 1970.
[4] J. D. DOLLARD, *J. Math. Phys.*, vol. 5, 1964, p. 729.
[5] J. M. JAUCH, *Helv. Phys. Acta*, vol. 31, 1958, p. 127.
[6] J. DIXMIER, *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
[7] N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, *Linear Operators*, I, Interscience, New York, 1963.
[8] W. O. AMREIN et PH. A. MARTIN, *Asymptotic Observables and Asymptotic States* (*Conférence on Mathematical Theory of Scattering*, Oberwolfach, Allemagne, juin 1971).

(*Manuscrit reçu le* 22 *janvier* 1973.)