

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

HÉLÈNE KERBRAT-LUNC

Champs de Yang et Mills variés

Annales de l'I. H. P., section A, tome 21, n° 4 (1974), p. 333-339

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1974__21_4_333_0

© Gauthier-Villars, 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Champs de Yang et Mills variés

par

Hélène KERBRAT-LUNC

Département de Mathématiques
de l'Université Claude-Bernard,
43, Boulevard du 11-Novembre-1918, 69100 Villeurbanne

RÉSUMÉ. — On calcule la variation du tenseur de courbure d'un champ de Yang et Mills défini sur l'espace-temps courbe V_4 . Les équations d'un champ de Yang et Mills varié sont mises en évidence et on évalue le commutateur d'un champ de Yang et Mills varié défini sur l'espace-temps de Minkowski.

1. CHAMP DE YANG ET MILLS CLASSIQUE.

RAPPELS [1]

Soit V_4 l'espace-temps de la Relativité Générale et $\mathcal{E}(V_4)$ l'espace fibré principal des repères orthonormés de V_4 . Son groupe structural est le groupe de Lorentz homogène complet $L(4)$.

Soit G un groupe de Lie linéaire de dimension N d'automorphismes d'un espace vectoriel K de dimension n . Nous supposons qu'il existe un homomorphisme h du groupe G sur le groupe $L(4)$.

Soit $E(V_4, G, p)$ un espace fibré principal de groupe structural le groupe de Lie G , de base l'espace-temps V_4 . Nous introduisons un homomorphisme H de $E(V_4, G, p)$ sur $\mathcal{E}(V_4)$ associé à l'homomorphisme h ainsi qu'une connexion infinitésimale Ω sur l'espace fibré principal $E(V_4, G, p)$. Un champ de Yang et Mills associé à la connexion infinitésimale Ω est défini de la manière suivante.

Soit $\{G_I\}$ une base de l'algèbre de Lie du groupe structural G . Les $G_I (I = 1, \dots, N)$ sont les générateurs infinitésimaux de G . La matrice de la connexion Ω s'écrit dans cette base : $\Omega = A^I G_I$ ou bien $\Omega_\mu = A^I_\mu G_I^a$

où $\mu = 0, \dots, 3$ est l'indice de l'espace-temps V_4 et $a, b = 1, \dots, n$ l'indice de l'espace vectoriel K .

Les coefficients A^I_μ sont appelés composantes locales du champ de Yang et Mills associé au groupe de Lie G sur l'espace-temps V_4 . La connexion infinitésimale Ω décrit le potentiel du champ. Le champ de Yang et Mills est défini par les composantes du tenseur de courbure associé à la connexion Ω , c'est-à-dire par :

$$(1.1) \quad R^a_{b\lambda\mu} = \partial_\lambda \Omega^a_{b\mu} - \partial_\mu \Omega^a_{b\lambda} + \Omega^a_{c\lambda} \Omega^c_{b\mu} - \Omega^a_{c\mu} \Omega^c_{b\lambda}.$$

Les équations du champ peuvent être calculées en partant d'un principe variationnel. La densité du Lagrangien sera définie par la formule :

$$(1.2) \quad \mathcal{L} = \frac{1}{4} R^a_{b\lambda\mu} R_a{}^{b\lambda\mu} \quad \text{où} \quad a, b = 1, \dots, n \quad \text{et} \quad \lambda, \mu = 0, \dots, 3.$$

Ce lagrangien utilisé par Yang et Mills en 1954 [2] est adopté par analogie avec la théorie du champ électromagnétique. C'est l'invariant le plus simple qui puisse être construit à partir du potentiel du champ défini par la connexion infinitésimale Ω sur l'espace-temps V_4 . Par un calcul simple nous obtenons les équations du champ de Yang et Mills sur l'espace-temps courbe V_4 sous la forme suivante :

$$(1.3) \quad \nabla_\lambda R^b{}_a{}^{\lambda\mu} + \Omega^b_{c\lambda} R^c{}_a{}^{\lambda\mu} - \Omega^c_{a\lambda} R^b{}_c{}^{\lambda\mu} = 0$$

où ∇_λ définit la dérivation covariante par rapport à la métrique de l'espace-temps V_4 .

L'étude des bicaractéristiques indique que le système (1.3) est sous-déterminé. Il apparaît nécessaire d'ajouter une condition supplémentaire (1) que nous écrivons sous la forme covariante suivante :

$$(1.4) \quad \hat{\nabla}^\lambda (\Omega^a_{b\lambda} - \Omega^a_{(0)b\lambda}) = 0.$$

$\Omega_{(0)}$ est la connexion obtenue par extension triviale de la connexion riemannienne [1].

$\hat{\nabla}$ indique la dérivation covariante sur les tenseurs $(\Omega - \Omega_{(0)})$ par rapport à la connexion $\Omega_{(0)}$ et la connexion riemannienne Γ_0 . Nous donnons en appendice les expressions explicites des dérivations ∇ et $\hat{\nabla}$ en coordonnées locales.

La condition (1.4) est l'analogie de la condition de Lorentz pour le champ électromagnétique.

2. LE CHAMP DE YANG ET MILLS VARIÉ

Comme nous l'avons rappelé dans le paragraphe précédent le champ de Yang et Mills classique, macroscopique, est décrit par un système d'équations différentielles (1.3) du second ordre, fortement non linéaires.

Pour la quantification de la théorie nous allons étudier le champ microscopique décrit par des équations du champ de Yang et Mills varié. Le

procédé de variation des équations classiques, fréquemment employé dans les théories physiques, permet de linéariser les équations du champ en passant d'un potentiel Ω considéré comme un point d'une variété à son vecteur tangent $\delta\Omega$. Nous nous trouvons alors devant un problème infinitésimal à la place d'une théorie globale. Physiquement, les équations d'un champ varié décrivent une perturbation autour d'une solution donnée des équations du champ macroscopique.

3. VARIATION DU TENSEUR DE COURBURE D'UN CHAMP DE YANG ET MILLS

Pour établir les équations du champ varié nous calculons tout d'abord la variation du tenseur de courbure d'un champ de Yang et Mills associé à un groupe de Lie linéaire G sur l'espace-temps courbe V_4 .

Considérons une variation infinitésimale arbitraire de la connexion Ω . Nous notons cette variation :

$$(3.1) \quad \delta\Omega_{b\mu}^a = \omega_{b\mu}^a \quad \text{où} \quad \mu = 0, \dots, 3 \quad \text{et} \quad a, b = 1, \dots, n.$$

ω est un tenseur, section d'un fibré vectoriel produit

$$\Gamma = F \otimes F \otimes T^*V_4$$

où $F(V_4, K, \pi)$ est le fibré vectoriel associé au fibré principal $E(V_4, G, p)$. F^* est le fibré dual de F et T^*V_4 le dual du fibré tangent à la variété V_4 .

$\omega_{b\mu}^a$ sont les composantes de ω dans une trivialisatation donnée d'une section du fibré vectoriel Γ .

Pour μ fixé, $\omega_{b\mu}^a dx^\mu$ est une 1-forme tensorielle locale sur V_4 à valeurs dans l'algèbre de Lie $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ du groupe structural G .

La dérivée covariante de ω par rapport à la connexion Ω s'écrit en coordonnées locales :

$$(3.2) \quad D_\alpha \omega_{b\mu}^a = \nabla_\alpha \omega_{b\mu}^a + \Omega_{c\alpha}^a \omega_{b\mu}^c - \Omega_{b\alpha}^c \omega_{c\mu}^a$$

$$\text{où} \quad \nabla_\alpha \omega_{b\mu}^a = \partial_\alpha \omega_{b\mu}^a - \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu \omega_{b\mu}^a$$

est la dérivation covariante par rapport à la métrique de l'espace-temps V_4 ($\Gamma_{\alpha\lambda}^\nu$ sont les symboles de Christoffel associés à V_4).

D'autre part la variation du tenseur de courbure (1.1) s'écrit en coordonnées locales :

$$(3.3) \quad \delta R^a_{b\lambda\mu} = \partial_\alpha \omega_{b\mu}^a - \partial_\mu \omega_{b\lambda}^a + \omega_{c\mu}^a \Omega_{b\lambda}^c - \Omega_{c\lambda}^a \omega_{b\mu}^c.$$

Compte tenu de (3.2) la variation du tenseur de courbure s'exprime par la formule suivante :

$$(3.4) \quad \delta R^a_{b\lambda\mu} = D_\lambda \omega_{b\mu}^a - D_\mu \omega_{b\lambda}^a.$$

Une expression analogue a été trouvée par A. Lichnerowicz [3] pour la variation du tenseur de courbure du champ de gravitation.

4. ÉQUATIONS DU CHAMP DE YANG ET MILLS VARIÉ

Nous varions les équations (1.3) d'un champ de Yang et Mills défini sur l'espace-temps courbe V_4 . La métrique de V_4 sera supposée fixée. Les équations du champ varié s'écrivent :

$$(4.1) \quad \nabla_\lambda \delta R^b{}_a{}^{\lambda\mu} + \omega_{c\lambda}^b R^c{}_a{}^{\lambda\mu} + \Omega_{c\lambda}^b \delta R^c{}_a{}^{\lambda\mu} - \omega_{a\lambda}^c R^b{}_c{}^{\lambda\mu} - \Omega_{a\lambda}^c \delta R^b{}_c{}^{\lambda\mu} = 0.$$

En abaissant les indices grecs du tenseur de courbure nous obtenons :

$$(4.2) \quad (\nabla_\lambda \delta R^b{}_{a\kappa\rho} + \omega_{c\lambda}^b R^c{}_{a\kappa\rho} + \Omega_{c\lambda}^b \delta R^c{}_{a\kappa\rho} - \omega_{a\lambda}^c R^b{}_{c\kappa\rho} - \Omega_{a\lambda}^c \delta R^b{}_{c\kappa\rho}) g^{\lambda\kappa} g^{\mu\rho} = 0.$$

En remplaçant le tenseur R et sa variation δR par les expressions (1.1) et (3.4) ainsi que les dérivées covariantes par (3.2), nous écrivons les équations du champ varié sous la forme suivante :

$$(4.3) \quad \left\{ \begin{aligned} & \partial_\lambda (D_\kappa \omega_{a\rho}^b - D_\rho \omega_{a\kappa}^b) - \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha (D_\alpha \omega_{a\rho}^b - D_\rho \omega_{a\alpha}^b) \\ & - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha (D_\kappa \omega_{a\alpha}^b - D_\alpha \omega_{a\kappa}^b) + \omega_{c\lambda}^b (\partial_\kappa \Omega_{a\rho}^c - \partial_\rho \Omega_{a\kappa}^c + \Omega_{d\kappa}^c \Omega_{a\rho}^d - \Omega_{d\rho}^c \Omega_{a\kappa}^d) \\ & + \Omega_{c\lambda}^b (D_\kappa \omega_{a\rho}^c - D_\rho \omega_{a\kappa}^c) - \omega_{a\lambda}^c (\partial_\kappa \Omega_{c\rho}^b - \partial_\rho \Omega_{c\kappa}^b + \Omega_{d\kappa}^c \Omega_{c\rho}^d - \Omega_{d\rho}^c \Omega_{c\kappa}^d) \\ & - \Omega_{a\lambda}^c (D_\kappa \omega_{c\rho}^b - D_\rho \omega_{c\kappa}^b) \} g^{\lambda\kappa} g^{\mu\rho} = 0 \end{aligned} \right.$$

Nous remplaçons également les dérivées covariantes $D\omega$ par les expressions (3.2). Les équations du champ varié sont alors du type :

$$(4.4) \quad \left\{ \begin{aligned} & \partial_\lambda \hat{c}_\kappa \omega_{a\rho}^b - \partial_\lambda \partial_\rho \omega_{a\kappa}^b + \text{termes en dérivée première de } \omega \\ & + \text{terme en } \omega \} g^{\lambda\kappa} g^{\mu\rho} = 0 \end{aligned} \right.$$

On trouvera l'expression explicite des équations (4.4) en annexe.

Nous nous proposons d'exprimer les équations (4.4) sous une forme covariante. Pour cela il nous faut écrire les formules explicites des dérivées covariantes secondes du tenseur ω . Un calcul direct donne :

$$(4.5) \quad \begin{aligned} D_\lambda D_\rho \omega_{a\kappa}^b &= \partial_\lambda \partial_\rho \omega_{a\kappa}^b - \Gamma_{\rho\kappa}^\nu \partial_\lambda \omega_{a\nu}^b - \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu \partial_\rho \omega_{a\nu}^b \\ & - \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \partial_\nu \omega_{a\kappa}^b + \Omega_{c\rho}^b \partial_\lambda \omega_{a\kappa}^c - \Omega_{a\rho}^c \partial_\lambda \omega_{c\kappa}^b + \Omega_{c\lambda}^b \partial_\rho \omega_{a\kappa}^c - \Omega_{a\lambda}^c \partial_\rho \omega_{c\kappa}^b - \partial_\lambda \Gamma_{\rho\kappa}^\nu \omega_{a\nu}^b \\ & + \partial_\lambda \Omega_{c\rho}^b \omega_{a\kappa}^c - \partial_\lambda \Omega_{a\rho}^c \omega_{c\kappa}^b + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \Gamma_{\nu\kappa}^\mu \omega_{a\mu}^b - \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \Omega_{c\nu}^b \omega_{a\kappa}^c + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \Omega_{a\nu}^c \omega_{c\kappa}^b \\ & + \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu \Gamma_{\rho\nu}^\mu \omega_{a\mu}^b - \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu \Omega_{c\rho}^b \omega_{a\nu}^c + \Gamma_{\lambda\kappa}^\nu \Omega_{a\rho}^c \omega_{c\nu}^b - \Gamma_{\rho\kappa}^\mu \Omega_{c\lambda}^b \omega_{a\mu}^c + \Omega_{c\lambda}^b \Omega_{d\rho}^c \omega_{a\mu}^d \\ & - \Omega_{c\lambda}^b \Omega_{a\rho}^c \omega_{d\kappa}^c - \Omega_{a\lambda}^c \Gamma_{\rho\kappa}^\mu \omega_{c\mu}^b - \Omega_{a\lambda}^c \Omega_{d\rho}^b \omega_{c\kappa}^d + \Omega_{a\lambda}^c \Omega_{c\rho}^d \omega_{d\kappa}^b. \end{aligned}$$

Nous avons également une expression analogue par $D_\lambda D_\kappa \omega_{a\rho}^b$ que nous n'écrivons pas.

Remarquons que l'équation de Ricci s'écrit ici :

$$(4.6) \quad R^b{}_{c\rho\lambda} \omega_{a\kappa}^c - R^c{}_{a\rho\lambda} \omega_{c\kappa}^b + \mathcal{R}^{\mu\kappa}{}_{\lambda\rho} \omega_{a\mu}^b = (D_\rho D_\lambda - D_\lambda D_\rho) \omega_{a\kappa}^b,$$

où $\mathcal{R}^{\mu\kappa}{}_{\lambda\rho}$ est le tenseur de courbure de l'espace-temps V_4 .

En substituant dans les équations (4.4) les formules (4.5) et en utilisant l'équation du Ricci (4.6) nous obtenons les équations du champ de Yang et Mills varié sous la forme covariante suivante :

$$(4.7) \quad \begin{aligned} D^\kappa D_\kappa \omega_{a\rho}^b - D_\rho D^\kappa \omega_{a\kappa}^b + R^b{}_{c\rho}{}^\kappa \omega_{a\kappa}^c - R^c{}_{a\rho\kappa} \omega_{c\kappa}^b \\ + R^c{}_{a\rho}{}^\kappa \omega_{c\kappa}^b - R^b{}_{c\rho}{}^\kappa \omega_{a\kappa}^c + \mathcal{R}^\mu{}_\rho \omega_{a\mu}^b = 0, \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}^\mu{}_\rho$ est le tenseur de Ricci de V_4 .

Nous définissons le laplacien « généralisé » [3] du tenseur ω par la formule :

$$(4.8) \quad \Delta \omega_{b\rho}^a = -D^\kappa D_\kappa \omega_{a\rho}^b + (R^b_{c\rho}{}^\kappa - R^b_{c\rho}{}^\kappa) \omega_{a\kappa}^c + (R^c_{a\rho}{}^\kappa - R^c_{a\rho}{}^\kappa) \omega_{c\kappa}^b - \mathcal{R}^\mu_\rho \omega_{a\kappa}^b.$$

L'opérateur Δ ainsi introduit est auto-adjoint.

En utilisant la formule (4.8) nous écrivons les équations d'un champ de Yang et Mills varié défini sur l'espace-temps V_4 .

$$(4.9) \quad \Delta \omega_{a\rho}^b + D_\rho D^\kappa \omega_{a\kappa}^b = 0.$$

Pour compléter ces équations nous ajoutons les conditions supplémentaires (1.4) variée qui s'écrit sous la forme :

$$(4.10) \quad \hat{\nabla}^\lambda (\omega_{b\lambda}^a - \omega_{(0)b\lambda}^a) = 0$$

où $\omega_{(0)}$ est une variation infinitésimale de la connexion $\Omega_{(0)}$, extension triviale de la connexion riemannienne de V_4 . L'expression explicite de la dérivée $\hat{\nabla}$ est donnée en annexe.

5. CHAMP DE YANG ET MILLS VARIÉ SUR L'ESPACE-TEMPS DE MINKOWSKI

Sur un espace-temps de Minkowski la condition supplémentaire (4.10) s'écrit :

$$(5.1) \quad D^\lambda \omega_{a\lambda}^b = 0.$$

En effet sur l'espace-temps plat la connexion riemannienne $\omega_{(0)}$ est nulle ainsi que son extension $\Omega_{(0)}$.

Par conséquent la dérivation covariante $\hat{\nabla}$ est dans ce cas égale à la dérivation covariante D .

Compte tenu de (5.1) les équations du champ de Yang et Mills varié défini sur l'espace-temps de Minkowski sont de la forme :

$$(5.2) \quad \Delta \omega_{a\lambda}^b = 0$$

où Δ est le laplacien généralisé (4.8) qui s'écrit ici

$$\Delta \omega_{b\rho}^a = -D^\kappa D_\kappa \omega_{a\rho}^b + (R^b_{c\rho}{}^\kappa - R^b_{c\rho}{}^\kappa) \omega_{a\kappa}^c + (R^c_{a\rho}{}^\kappa - R^c_{a\rho}{}^\kappa) \omega_{c\kappa}^b.$$

D'après une théorie établie par Lichnerowicz [3] nous savons qu'il existe pour l'équation (5.2) un noyau élémentaire $E^{(p)}(x, x')$ défini dans l'ouvert $U \times U$ de $(V_4 \times V_4)$. $E^{(p)}(x, x')$ est antisymétrique en x et x' dans $U \times U$ p est égal à l'ordre du tenseur ω . Le noyau $E^{(p)}(x, x')$ est unique (voir [3]). Le propagateur tensoriel $G(x, x')$ relatif à l'opérateur Δ (4.8) est dans ce cas égal au noyau $E(x, x')$. Il est donné par une expression du type :

$$G^{(p)}(x, x') = (\Lambda t) D_0^{(p)}(x, x')$$

où t est le bitenseur de transport défini par Lichnerowicz [3], et Λ est le produit antisymétrique d'ordre p .

ω étant le « potentiel vecteur » du champ de Yang et Mills varié, le commutateur $[\omega(x), \omega(x')]$ est un bi-tenseur distribution à valeurs scalaires, ayant pour chaque $x' \in U \subset V_4$ son support dans et sur le conoïde caractéristique $\Gamma_{x'}$ défini au point x' de la variété V_4 .

Ce commutateur est de plus antisymétrique en x et x' et il satisfait aux équations du champ varié (5.2). Il est de la forme :

$$(5.3) \quad [\omega_{b\lambda}^a(x), \omega_{b'\lambda'}^{a'}(x')] = K_{bb'\lambda\lambda'}^{aa'}(x, x') = A \cdot D_0(x, x')$$

où A est un coefficient qui dépend du choix du groupe structural G .

$D_0(x, x')$ est le propagateur scalaire associé à l'opérateur Δ sur l'espace-temps de Minkowski, appelé le propagateur de Jordan-Pauli [3].

Je remercie Monsieur Lichnerowicz pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée au cours de mes recherches.

RÉFÉRENCES

- [1] H. KERBRAT-LUNC, Contribution à l'étude des champs de Yang et Mills, *Annales de l'I. H. P.*, t. 13, n° 4, 1970.
- [2] C. N. YANG et MILLS, *Phys. Rev.*, t. 96, 1954, p. 191.
- [3] A. LICHNEROWICZ, *Commutateurs et propagateurs en Relativité Générale*, Publications IHES, n° 10, 1960.

(Manuscrit reçu le 22 juillet 1974).

ANNEXE 1

FORMULES EXPLICITES DE DÉRIVATIONS COVARIANTES

1. $\hat{\nabla}_\mu(\Omega_{b\lambda}^a - \Omega_{(0)b\lambda}^a) = \nabla_\mu(\Omega_{b\lambda}^a - \Omega_{(0)b\lambda}^a) + \Omega_{(0)c\mu}^a(\Omega_{b\lambda}^c - \Omega_{(0)b\lambda}^c) - \Omega_{(0)b\mu}^c(\Omega_{c\lambda}^a - \Omega_{(0)c\lambda}^a)$
2. $\nabla_\mu(\Omega_{b\mu}^a - \Omega_{(0)b\mu}^a) = \partial_\mu(\Omega_{b\mu}^a - \Omega_{(0)b\mu}^a) - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu(\Omega_{b\mu}^a - \Omega_{(0)b\mu}^a)$.

ANNEXE 2

FORME EXPLICITE DES ÉQUATIONS (4.4)

$$\begin{aligned}
 & [\partial_\lambda \partial_\kappa \omega_{a\rho}^b - \partial_\lambda \partial_\rho \omega_{a\kappa}^b - \Gamma_{\kappa\rho}^\nu \partial_\lambda \omega_{a\nu}^b + \Gamma_{\rho\kappa}^\nu \partial_\lambda \omega_{a\nu}^b - \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \partial_\alpha \omega_{a\rho}^b + \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \partial_\rho \omega_{a\alpha}^b - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \partial_\kappa \omega_{a\alpha}^b + \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \partial_\alpha \omega_{a\kappa}^b \\
 & - \Omega_{a\kappa}^c \partial_\lambda \omega_{c\rho}^b - \Omega_{c\rho}^b \partial_\lambda \omega_{a\kappa}^c + \Omega_{a\rho}^c \partial_\lambda \omega_{c\kappa}^b + \Omega_{c\lambda}^b \partial_\kappa \omega_{a\rho}^c - \Omega_{c\lambda}^b \partial_\rho \omega_{a\kappa}^c - \Omega_{a\lambda}^c \partial_\kappa \omega_{c\rho}^b + \Omega_{a\lambda}^c \partial_\rho \omega_{c\kappa}^b \\
 & - \partial_\lambda \Gamma_{\kappa\rho}^\nu \omega_{a\nu}^b + \partial_\lambda \Gamma_{\rho\kappa}^\nu \omega_{a\nu}^b + \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \Gamma_{\alpha\rho}^\nu \omega_{a\nu}^b - \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \Gamma_{\rho\alpha}^\nu \omega_{a\nu}^b + \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \Gamma_{\kappa\alpha}^\nu \omega_{a\nu}^b - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \Gamma_{\alpha\kappa}^\nu \omega_{a\nu}^b - \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \Omega_{c\alpha}^b \omega_{a\rho}^c \\
 & + \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \Omega_{a\alpha}^b \omega_{c\rho}^c + \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \Omega_{c\alpha}^b \omega_{a\kappa}^c - \Gamma_{\lambda\rho}^\alpha \Omega_{a\alpha}^b \omega_{c\kappa}^c - \Gamma_{\kappa\rho}^\alpha \Omega_{c\lambda}^b \omega_{a\nu}^c + \Gamma_{\rho\kappa}^\alpha \Omega_{c\lambda}^b \omega_{a\nu}^c + \Gamma_{\kappa\rho}^\alpha \Omega_{a\lambda}^b \omega_{c\nu}^c - \Gamma_{\rho\kappa}^\alpha \Omega_{a\lambda}^b \omega_{c\nu}^c \\
 & + \partial_\lambda \Omega_{c\kappa}^d \omega_{a\rho}^b - \partial_\lambda \Omega_{a\kappa}^c \omega_{c\rho}^b - \partial_\lambda \Omega_{c\rho}^b \omega_{a\kappa}^c + \partial_\lambda \Omega_{a\rho}^c \omega_{c\kappa}^b + \partial_\kappa \Omega_{a\rho}^b \omega_{c\lambda}^c + \partial_\rho \Omega_{c\kappa}^b \omega_{a\lambda}^c - \partial_\kappa \Omega_{c\rho}^b \omega_{a\lambda}^c - \partial_\rho \Omega_{a\kappa}^c \omega_{c\lambda}^c \\
 & + \Omega_{d\kappa}^c \Omega_{a\rho}^d \omega_{c\lambda}^b - \Omega_{d\rho}^c \Omega_{a\kappa}^d \omega_{c\lambda}^b + \Omega_{c\lambda}^b \Omega_{d\kappa}^c \omega_{a\rho}^d - \Omega_{c\lambda}^b \Omega_{a\kappa}^d \omega_{d\rho}^c - \Omega_{c\lambda}^b \Omega_{d\rho}^c \omega_{a\kappa}^d + \Omega_{c\lambda}^b \Omega_{a\rho}^d \omega_{d\kappa}^c - \Omega_{d\kappa}^c \Omega_{c\rho}^d \omega_{a\lambda}^b \\
 & + \Omega_{d\rho}^b \Omega_{c\kappa}^d \omega_{a\lambda}^c - \Omega_{a\lambda}^c \Omega_{d\kappa}^b \omega_{c\rho}^d + \Omega_{a\lambda}^c \Omega_{c\kappa}^b \omega_{d\rho}^d + \Omega_{a\lambda}^c \Omega_{d\rho}^b \omega_{c\kappa}^d - \Omega_{a\lambda}^c \Omega_{c\rho}^d \omega_{d\kappa}^b] g^{\lambda\kappa} g^{\mu\rho} = 0
 \end{aligned}$$