ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

M. BRAY

Quelques univers magnéto-hydrodynamiques du type de Gödel

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, nº 1 (1975), p. 29-42

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_1_29_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXII, n° 1, 1975, p. 29-42. *Physique théorique.*

Quelques univers magnéto-hydrodynamiques du type de Gödel

par

M. BRAY

C. N. R. S.

SUMMARY. — Given a Gödel type metric tensor $g_{\alpha\beta}$ some solutions of the Einstein gravitational field equations are obtained for a total energy tensor corresponding to the magneto-hydrodynamic case.

1. LE MODÈLE DE GÖDEL

L'introduction de trois coordonnées lagrangiennes a^ν, $\nu = 1, 2, 3$ permet de représenter la famille des lignes de courant d'un fluide relativiste par les formules $x^\alpha = x^\alpha(s, a^\nu)$; $\alpha = 0, 1, 2, 3$.

Le champ vectoriel unitaire tangent a pour composantes $U^\alpha = \dfrac{\partial x^\alpha}{\partial s}$; $U^\alpha U_\alpha = 1$.

Posant $\delta(\quad) = \dfrac{\partial}{\partial a^\nu}(\quad)\delta a^\nu$ nous avons [1]

$$\frac{\nabla}{ds}(\delta x^\alpha) = U^\alpha{}_{;\beta}\delta x^\beta \tag{1}$$

puis en désignant par $\bar{\delta}(\quad)$ la projection des entités géométriques sur le 3-plan orthogonal à $\vec{U}$ (physiquement, l'espace associé) — opération effectuée par le projecteur $\pi_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - U_\alpha U_\beta$

$$\bar{\delta}x^\alpha = \pi^\alpha{}_\beta \delta x^\beta \ ; \qquad \bar{\delta}U^\alpha = \pi^\alpha{}_\beta \frac{\nabla}{ds}(\bar{\delta}x^\beta) = U^\alpha{}_{;\beta}\bar{\delta}x^\beta \tag{2}$$

(1) J. EHLERS, Relativistic Hydrodynamics and its Relation to Interior Solutions of the Gravitational Field Equations, *Recent Developments in General Relativity*, p. 201.
J.-L. SYNGE, *Relativity, The general Theory*, p. 170.

La norme $\bar{\delta}s^2$ du vecteur infinitésimal $\bar{\delta}x^\alpha$ varie selon la loi

$$\frac{\nabla}{ds}\log\bar{\delta}s = U_{(\alpha;\beta)}\frac{\bar{\delta}x^\alpha}{\bar{\delta}s}\frac{\bar{\delta}x^\beta}{\bar{\delta}s} \tag{3}$$

Posons $A_{(\alpha\beta)} = \pi_\alpha{}^\rho\pi_\beta{}^\sigma U_{(\rho;\sigma)}$ et $\omega_{\alpha\beta} = \pi_\alpha{}^\rho\pi_\beta{}^\sigma U_{[\rho;\sigma]}$ il vient

$$A_{(\alpha\beta)} = U_{(\alpha;\beta)} - U_{(\alpha}\dot{U}_{\beta)}\ ; \qquad \omega_{\alpha\beta} = U_{[\alpha;\beta]} + U_{[\alpha}\dot{U}_{\beta]}$$

avec $\dot{U}_\alpha = U^\nu\nabla_\nu(U_\alpha)$.

Nous pourrons donc écrire

$$\boxed{\delta U^\alpha = \left(\sigma^\alpha{}_{\cdot\beta} + \omega^\alpha{}_{\cdot\beta} + \frac{\theta}{3}\delta^\alpha{}_\beta\right)\delta x^\beta} \tag{4}$$

Les définitions $\sigma_{\alpha\beta} = A_{(\alpha\beta)} - \dfrac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}$; $\theta = U^\alpha{}_{;\alpha}$ nous donnent l'interprétation des « paramètres » $\sigma_{\alpha\beta}$ (shear), θ (expansion) $\omega_{\alpha\beta}$ (rotation). Ces trois « paramètres » tensoriels fournissent donc une classification des congruences de lignes de courant.

La méthode est avantageusement étendue au domaine cosmologique ([2]) où la simplification apportée par l'hypothèse d'écoulement géodésique ($\dot{U}_\alpha = 0$) réduit les caractéristiques aux expressions

$$\sigma_{\alpha\beta} = U_{(\alpha;\beta)} - \frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}\ ; \qquad \omega_{\alpha\beta} = U_{[\alpha;\beta]}\ ; \qquad \theta = U^\alpha{}_{;\alpha} \tag{5}$$

Le modèle de Gödel est défini par les relations $\sigma_{\alpha\beta} = 0$; $\theta = 0$; $\omega_{\alpha\beta} \neq 0$. Dans une métrique où $g_{00} = 1$ — ce qui est le cas en Cosmologie — les relations $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ s'écrivent

$$\partial_0(g_{0r}) = 0\ ; \qquad \partial_0(g_{rs}) = \frac{2}{3}(g_{rs} - g_{0r}g_{0s})\partial_0 \log\sqrt{-g} \tag{6}$$

On en tire, puisque $U_r = g_{r_0}$ en coordonnées comobiles ($U^0 = 1$; $U^i = 0$)

$$\pi_{rs} = (-g)^{1/3}\,\bar{\gamma}_{rs}(x^k)\ ; \qquad k, r, s = 1, 2, 3 \tag{7}$$
$$|\pi_{rs}| = g\ ; \qquad |\bar{\gamma}_{rs}| = -1$$

On sait que l'examen du problème cosmologique à l'aide de la géométrie des lignes de courant conduit à des résultats plus généraux que la méthode fondée sur l'emploi du principe cosmologique puisque l'on obtient ainsi des modèles non homogènes, en particulier celui de Gödel.

([2]) James L. ANDERSON, *Principles of Relativity Physics*, Cosmology, ch. 14, p. 444.

2. LE CAS MAGNÉTO-HYDRODYNAMIQUE

Rappelons brièvement les formules fondamentales de la magnéto-hydrodynamique ([3]). Le tenseur d'énergie d'un fluide parfait thermodynamique relativiste s'écrit

$$T_{\alpha\beta} = c^2\bar{r}f U_\alpha U_\beta - p g_{\alpha\beta} \tag{8}$$

$\bar{r}$: densité propre de matière ; $f = \left(1 + \frac{i}{c^2}\right) > 0$; $i = \varepsilon + \frac{p}{\bar{r}}$ enthalpie spécifique ; ε : énergie spécifique interne ; p : pression ; U^α : vitesse d'univers $U^\alpha U_\alpha = 1$.

Si le fluide est soumis à un champ électromagnétique avec induction (décrit par une 2-forme H champ électrique — induction magnétique et une 2-forme G champ magnétique — induction électrique) les vecteurs $\vec{e}$, $\vec{d}$ (champ et induction électriques) $\vec{h}$, $\vec{b}$ (champ et induction magnétiques) associés à $\vec{U}$ sont donnés par

$$e_\beta = U^\alpha H_{\alpha\beta} ; \qquad d_\beta = U^\alpha G_{\alpha\beta} ; \qquad b_\beta = U^\alpha ({*}H)_{\alpha\beta} ; \qquad h_\beta = U^\alpha ({*}G)_{\alpha\beta} \tag{9}$$

$*$ étant l'opérateur adjoint par rapport à $g_{\alpha\beta}$

Si
$$\vec{d} = \lambda\vec{e} ; \qquad \vec{b} = \mu\vec{h}$$

il vient
$$G = \frac{1}{\mu} H + \left(\frac{\lambda\mu - 1}{\mu}\right) \vec{U} \wedge \vec{e}$$

En magnéto-hydrodynamique nous avons $\vec{e} = 0$ par rapport à $\vec{U}$. Le champ électromagnétique admet alors un tenseur d'énergie

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\langle \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} G_{\rho\sigma} G^{\rho\sigma} - G_{\alpha\rho} G_\beta{}^\rho \right\rangle \tag{10}$$

soit, avec
$$G = - {*}(\vec{U} \wedge \vec{h}) \qquad \text{et} \qquad |h|^2 = - h^\nu h_\nu$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \mu \left\langle |h|^2 \left(U_\alpha U_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} \right) - h_\alpha h_\beta \right\rangle \tag{11}$$

Le tenseur d'énergie total du fluide a donc pour expression

$$\boxed{T_{\alpha\beta} = (c^2\bar{r}f + \mu |h|^2) U_\alpha U_\beta - \left(p + \frac{\mu}{2} |h|^2 \right) g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta} \tag{12}$$

([3]) A. LICHNEROWICZ, Ondes de choc en magnéto-hydrodynamique relativiste, *Ann. Henri Poincaré*, Vol. V, n° 1, 1966, p. 37-75. Série A : Physique Théorique.

3. SOLUTION DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN

Dans un système de coordonnées cylindriques t, r, φ, z considérons la métrique hyperbolique normale (signature $+---$)

$$\boxed{\begin{array}{c} g_{00}=1\ ;\quad g_{03}=\varepsilon e^{\zeta}\ ;\quad g_{11}=g_{22}=-\Delta e^{2\omega}\ ;\quad g_{33}=-e^{2\nu}\ ;\quad \text{autres } g_{\alpha\beta}=0 \\ \Delta=e^{2\zeta}+e^{2\nu}\ ;\qquad \varepsilon=\pm 1\ ;\qquad \zeta,\ \nu,\ \omega(r)\end{array}}$$

Cet élément possède manifestement la symétrie axiale autour de Oz. D'autre part, en considérant les coordonnées comme comobiles, le champ vectoriel $\vec{U}\{U^0=1\ ;\ U^k=0\}$ satisfait les conditions

$$\theta=U^{\alpha}{}_{;\alpha}=0\ ;\qquad \sigma_{\alpha\beta}=U_{(\alpha;\beta)}-\frac{\theta}{3}\pi_{\alpha\beta}=0\ ;\qquad \dot{U}_{\alpha}=0$$

Il définit une congruence shear-free et expansion-free, donc un Univers de Gödel dans tous les cas où $\omega_{\alpha\beta}\neq 0$.

Nous nous proposons de montrer que cette métrique peut être engendrée par un tenseur d'énergie de type magnéto-hydrodynamique.

Les composantes du tenseur de Ricci

$$R_{\alpha\beta}=R^{\nu}{}_{.\alpha\beta\nu}=-\partial_{\beta}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\nu})+\partial_{\nu}(\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta})-\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}\Gamma^{\nu}_{\sigma\beta}+\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\nu}_{\sigma\nu}$$

sont :

$$R_{00}=\frac{e^{2(\zeta-\omega)}}{2\Delta^2}(\partial_1\zeta)^2\ ;$$

$$R_{11}=-\partial_{11}\log\Delta-\partial_{11}\omega+\frac{1}{2}(\partial_1\omega)(\partial_1\log\Delta)+\frac{e^{2\zeta}}{2\Delta}(\partial_1\zeta)^2$$

$$R_{22}=-\frac{1}{2}\partial_{11}\log\Delta-\partial_{11}\omega-\frac{1}{2}(\partial_1\log\Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_1\log\Delta+\partial_1\omega\right)\ ;$$

$$R_{03}=\frac{\varepsilon e^{\zeta-2\omega}}{2\Delta}\left\langle\partial_{11}\zeta+\partial_1\zeta\left[\partial_1\zeta-\frac{1}{2}\partial_1\log\Delta+\frac{e^{2\zeta}}{\Delta}\partial_1\zeta\right]\right\rangle$$

$$R_{33}=-\frac{e^{-2\omega}}{2}\left\langle\partial_{11}\log\Delta+\frac{1}{2}(\partial_1\log\Delta)^2\right\rangle$$
$$+\frac{e^{2(\zeta-\omega)}}{\Delta}\langle\partial_{11}\zeta+2(\partial_1\zeta)^2\rangle-\frac{e^{2(\zeta-\omega)}}{2\Delta}(\partial_1\zeta)\left\langle\partial_1\log\Delta+\frac{e^{2\nu}}{\Delta}\partial_1\zeta\right\rangle$$

Dans les équations d'Einstein

$$R_{\alpha\beta}=\chi\left(T_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta}T\right)+\Lambda g_{\alpha\beta}\ ;\qquad \chi>0$$

nous prendrons

$$T_{\alpha\beta}=(c^2\bar{r}f+\mu|h|^2)U_{\alpha}U_{\beta}-\left(p+\frac{\mu}{2}|h|^2\right)g_{\alpha\beta}-\mu h_{\alpha}h_{\beta}$$
$$|h|^2=-h^{\nu}h_{\nu}\ ;\qquad h^{\nu}U_{\nu}=0\ ;$$

il vient :

$$R_{\alpha\beta} = \chi \{ (\overset{*}{\rho} + \overset{*}{p}) U_\alpha U_\beta - \overset{*}{p} g_{\alpha\beta} - \mu h_\alpha h_\beta \} + \Lambda g_{\alpha\beta}$$

avec

$$2\overset{*}{\rho} = c^2 \bar{r} f + \mu |h|^2 + 2p ; \qquad 2\overset{*}{p} = c^2 \bar{r} f + \mu |h|^2 - 2p$$

Choisissant un vecteur $\vec{h}$ tel que $h_0 = h_1 = h_2 = 0$, $h_3 \neq 0$ nous avons le système

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_{00} = \chi \overset{*}{\rho} + \Lambda ; \qquad R_{11} = \Delta e^{2\omega}(\chi \overset{*}{p} - \Lambda) ; \qquad R_{22} = \Delta e^{2\omega}(\chi \overset{*}{p} - \Lambda) \\ R_{33} = \chi \overset{*}{\rho} e^{2\zeta} + \chi \overset{*}{p} \Delta - \chi \mu h_3^2 - \Lambda e^{2\nu} ; \qquad R_{03} = \varepsilon e^{\zeta}(\chi \overset{*}{\rho} + \Lambda) \end{array} \right.$$

Les autres équations sont identiquement satisfaites.

S'y ajoutent les relations

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{lll} (a) & \nabla_\alpha(\bar{r} U^\alpha) = 0 & \text{postulat de conservation de la matière,} \\ (b) & \nabla_\alpha(h^\alpha U^\beta - h^\beta U^\alpha) = 0 & \text{équations de Maxwell,} \\ (c) & \nabla_\beta(T^{\alpha\beta}) = 0 & \text{équations de conservation conséquences des équations d'Einstein.} \end{array} \right.$$

(14) (*a*) et (14) (*b*) nous donnent $\partial_0(\bar{r}) = 0$, $\partial_0(h^3) = 0$; $\partial_3(h^3) = 0$.

Le système (13) peut être transcrit sous la forme

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad R_{11} = R_{22} ; \qquad \text{II)} \quad R_{03} = \varepsilon e^{\zeta} R_{00} \\ \chi\mu |h|^2 = \dfrac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle - \partial_{11}\omega - \dfrac{1}{2}\partial_1\omega . \partial_1 \log \Delta - \dfrac{e^{2\zeta}}{2\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \\ \chi c^2 \bar{r} f = \dfrac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle - (\partial_1 \log \Delta)\left(\dfrac{1}{2}\partial_1 \log \Delta + \partial_1\omega\right) + \dfrac{e^{2\zeta}}{2\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \\ 2\chi p = - 2\Lambda + \dfrac{e^{-2\omega}}{\Delta} \left\langle \partial_{11}\omega + (\partial_1 \log \Delta)\left(\dfrac{1}{2}\partial_1 \log \Delta + \dfrac{3}{2}\partial_1\omega\right) \right. \\ \qquad\qquad\qquad \left. + \dfrac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \end{array} \right.$$

On doit avoir $|h|^2 > 0$, $\bar{r} f > 0$; $p \geqslant 0$.

En posant $\mathscr{R} = c^2 \bar{r} f + \mu |h|^2$, $\mathscr{P} = p + \dfrac{\mu}{2}|h|^2$ le développement des équations $\nabla_\beta(T^{\alpha\beta}) = 0$ nous donne d'une part

$$(16) \qquad \nabla_\alpha(\mathscr{R} U^\alpha) - U^\alpha \nabla_\alpha(\mathscr{P}) - \mu h^\alpha U_\beta \nabla_\alpha(h^\beta) = 0$$

et de l'autre

$$(17) \quad \mathscr{R} U^\alpha \nabla_\alpha(U^\beta) - \pi^{\alpha\beta}\partial_\alpha(\mathscr{P}) - \mu h^\beta \nabla_\alpha(h^\alpha) - \mu h^\alpha \nabla_\alpha(h^\beta) = 0, \quad \pi^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} - U^\alpha U^\beta$$

D'après $\theta = 0$, $\sigma_{\alpha\beta} = 0$ (16) se réduit à $\partial_0(\mathscr{R} - \mathscr{P}) = 0$ relation satisfaite puisque $\mathscr{R}$ et $\mathscr{P}$ ne dépendent que de r.

Les relations (17) d'indices $\beta = 0, 2, 3$ sont satisfaites en vertu de

$$\partial_K(\mathscr{P}) = \partial_K(h^3) = \partial_K(h^0) = 0 \,; \qquad K = 0,3.$$

La relation d'indice $\beta = 1$ s'écrit $2\partial_1(\mathscr{P}) + \mu\,|\,h\,|^2\partial_1 \log \Delta = 0$.

Si l'on porte dans cette équation les valeurs de $\mathscr{P}$ et $\mu\,|\,h\,|^2$ déduites de (15) il reste, compte tenu de $(15)_{\mathrm{I}}$, $(15)_{\mathrm{II}}$ une identité.

Une des fonctions ζ, ν, ω peut donc être arbitrairement choisie ; de même l'une des fonctions $\bar{r}$, f demeure arbitraire.

Supposons $\partial_1\zeta \neq 0$, $(15)_{\mathrm{II}}$ nous donne

$$e^{\zeta}\partial_1\zeta = \mathrm{A}\sqrt{\Delta} \qquad \text{d'où} \qquad e^{2\nu} = e^{2\zeta}\mathrm{A}^{-2}\langle (\partial_1\zeta)^2 - \mathrm{A}^2 \rangle \,; \qquad \mathrm{A} : \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$$

On doit donc avoir $(\partial_1\zeta)^2 > \mathrm{A}^2$.

Écartant le choix $\partial_1\zeta = n$ $(n^2 > \mathrm{A}^2)$ qui conduit à une impossibilité, nous poserons $\zeta = -\dfrac{k}{2}r^2$, k : c^{te}.

D'après $(15)_{\mathrm{II}}$

$$\partial_1 \log \Delta = \frac{2}{r} - 2kr \rightarrow \Delta = \mathrm{C}r^2e^{-kr^2} \quad \mathrm{C} : \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$$

Puisque $e^{2\zeta}(\partial_1\zeta)^2 = \mathrm{A}^2\Delta$ il faut nécessairement $\mathrm{C} = k^2\mathrm{A}^{-2}$, $(15)_{\mathrm{I}}$ donne alors

$$\omega = \frac{kr^2}{4} + \log\frac{(1 - kr^2)^{\mathrm{N}}}{r} \,; \qquad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{A}^2 + 4k}{8k}$$

$e^{2\nu} > 0$ impose la restriction $r^2 > \mathrm{A}^2k^{-2}$.

D'autre part $\bar{r}f > 0$ exige $r^2 < (\mathrm{A}^2 + 3k)k^{-2}$.

k doit donc être > 0 et l'on a $\mathrm{A}^2 < k^2r^2 < \mathrm{A}^2 + 3k$.

L'étude de $|\,h\,|^2$ conduit à la condition (en supposant $1 - kr^2 \neq 0$)

$$k^3r^4 - kr^2(2k + \mathrm{M}) + 3\mathrm{M} + k > 0 \,; \qquad \mathrm{M} = 4k\mathrm{N}$$

Le choix $\mathrm{A}^2 = 12k$ entraîne $\mathrm{M} = 8k$; il vient dans ce cas

$$k(kr^2 - 5)^2 > 0 \qquad \text{ou} \qquad (kr^2 - 5)^2 > 0$$

Puisque $\dfrac{12}{k} < r^2 < \dfrac{15}{k}$ le zéro $r^2 = \dfrac{1}{k}$ du dénominateur $(1 - kr^2)$dans les expressions de $|\,h\,|^2$, p et le zéro $r^2 = \dfrac{5}{k}$ intervenant dans $|\,h\,|^2$ se trouvent hors du domaine de validité $\mathscr{D}(k)\,\{\,12k^{-1} < r^2 < 15k^{-1}\,\}$. Il reste donc à satisfaire la condition $p \geqslant 0$ ce qui donne

$$(1 - kr^2)^2(kr^2 - 6) + 8kr^2(kr^2 - 3) - \frac{\Lambda}{3}(1 - kr^2)^6e^{-\frac{kr^2}{2}} \geqslant 0$$

Pour assurer cette inégalité il suffit de prendre Λ inférieur ou au plus égal au plus petit des deux nombres obtenus en annulant l'expression précédente pour les valeurs $kr^2 = 12$; $kr^2 = 15$.

Nous avons donc obtenu la solution

$$(18)\qquad \boxed{\begin{aligned} &g_{00} = 1\,; \qquad g_{03} = \varepsilon e^{-\frac{k}{2}r^2}\,; \qquad g_{11} = g_{22} = -\frac{k}{12} e^{-\frac{k}{2}r^2}(1 - kr^2)^4\,; \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad g_{33} = -\frac{e^{-kr^2}}{12}(kr^2 - 12) \end{aligned}}$$

dans le domaine $\mathscr{D}(k) < 12 < kr^2 < 15\,;\ k > 0$.

L'une des fonctions $\bar{r}$, f étant arbitraire on peut prendre par exemple une fonction $\bar{r}$ nulle en dehors de $\mathscr{D}(k)$. Signalons aussi la possibilité de choisir k et Λ de manière à annuler p sur la frontière de $\mathscr{D}(k)$.

Partant des mêmes hypothèses initiales nous chercherons une solution en r, z. Le tenseur de Ricci a, dans ce cas, 7 composantes : $R_{\alpha\alpha}$, R_{01}, R_{03}, R_{13} et le système tiré des équations d'Einstein s'écrit

$$a)\qquad \partial_{11}\zeta + (\partial_1\zeta)\left(\partial_1\zeta - \frac{1}{2}\partial_1 \log \Delta\right) = 0\,;$$

$$b)\qquad \partial_{13}\zeta + (\partial_1\zeta)\left(\partial_3\zeta - \frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta\right) = 0\,;$$

$$c)\qquad -\partial_{11} \log \Delta + (\partial_1 \log \Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_1 \log \Delta + 2\partial_1\omega\right) + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 = 0\,;$$

$$d)\qquad -\frac{1}{2}\partial_{13} \log \Delta - \partial_{13}\omega + \frac{1}{2}(\partial_1 \log \Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + \partial_3\omega\right) = 0$$

$$(19)\qquad \begin{aligned} \chi\mu h_3^2 &= \frac{1}{2}\partial_{33} \log \Delta + \partial_{33}\omega - \frac{1}{2}(\partial_3 \log \Delta)\left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + \partial_3\omega\right) \\ &\qquad - e^{-2\omega}\left\langle \partial_{11}\omega + \frac{1}{2}\partial_1\omega.\partial_1 \log \Delta \right\rangle - \frac{e^{2\zeta-2\omega}}{2\Delta}(\partial_1\zeta)^2\,; \\ \chi c^2\bar{r}f &= \frac{e^{-2\omega}}{2\Delta}\left\langle -(\partial_1 \log \Delta)(\partial_1 \log \Delta + 2\partial_1\omega) + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \\ &\qquad - \frac{1}{\Delta}\left\langle \partial_{33} \log \Delta + 2\partial_{33}\omega + 2(\partial_3\omega)\left(\partial_3\omega + \frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta\right)\right\rangle\,; \\ 2\chi p &= -2\Lambda + \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left\langle \partial_{11}\omega + \frac{1}{2}(\partial_1 \log \Delta)(\partial_1 \log \Delta + 3\partial_1\omega) + \frac{e^{2\zeta}}{\Delta}(\partial_1\zeta)^2 \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{\Delta}\left\langle \frac{1}{2}\partial_{33} \log \Delta + \partial_{33}\omega + \left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + \partial_3\omega\right)\left(\frac{1}{2}\partial_3 \log \Delta + 2\partial_3\omega\right)\right\rangle \end{aligned}$$

Les équations (14) a, (14) b fournissent respectivement

$$(20)\qquad \partial_0(\bar{r}) = 0\,; \qquad \partial_3(\sqrt{-g}h^3) = 0$$

Compte tenu des équations de Maxwell, les relations $\nabla_\alpha(T^{\alpha\beta}) = 0$ se réduisent à

$$(21)\qquad 2\partial_1(\mathscr{P}) + \mu\,|h|^2\partial_1 \log \Delta = 0\,; \qquad 2\partial_3(\mathscr{P}) - \mu\partial_3(|h|^2) = 0$$

Supposant toujours $\partial_1 \zeta \neq 0$, on tire de (19) a et (19) b

$$e^{\zeta}\partial_1\zeta = A\sqrt{\Delta}, \quad A : c^{te} ; \qquad e^{2\nu} = A^{-2}e^{2\zeta}\langle (\partial_1\zeta)^2 - A^2 \rangle$$

d'où la nécessité d'avoir $(\partial_1\zeta)^2 > A^2$.

Nous poserons pour simplifier

$$\zeta = \underset{(1)}{\zeta}(r) + \underset{(3)}{\zeta}(z) ; \qquad \nu = \underset{(1)}{\nu}(r) + \underset{(3)}{\zeta}(z) ; \qquad \omega = \underset{(1)}{\omega}(r) + \underset{(3)}{\omega}(z)$$

On a $\Delta = e^{2\underset{(3)}{\zeta}}\underset{(1)}{\Delta}$ avec $\underset{(1)}{\Delta} = e^{2\underset{(1)}{\zeta}} + e^{2\underset{(1)}{\nu}}$

Donc $e^{2\underset{(1)}{\zeta}}[\partial_1 \underset{(1)}{\zeta}]^2 = A^2 \underset{(1)}{\Delta}$

Les équations (19) c, (19) d deviennent

$$(19)' \quad \begin{cases} c) \quad -\partial_{11} \log \underset{(1)}{\Delta} + (\partial_1 \log \underset{(1)}{\Delta})\left(\dfrac{1}{2}\partial_1 \log \underset{(1)}{\Delta} + 2\partial_1\underset{(1)}{\omega}\right) + A^2 = 0 \\ d) \quad (\partial_1 \log \underset{(1)}{\Delta})(\partial_3 \underset{(3)}{\zeta} + \partial_3 \underset{(3)}{\omega}) = 0 \end{cases}$$

$\partial_1 \log \underset{(1)}{\Delta}$ est $\neq 0$ sinon $A^2 = 0$ d'après (19)$'$ c ce qui entraîne $\partial_1\zeta = 0$. Donc nous avons $\underset{(3)}{\omega} = -\underset{(3)}{\zeta}$ à une constante arbitraire près. Posons $\underset{(1)}{\Delta} = e^{2nr}$, $n = c^{te}$

(19)$'$ c nous donne $\partial_1 \underset{(1)}{\omega} = -N$; $N = \dfrac{A^2 + 2n^2}{4n}$

$$(22) \quad \begin{cases} \omega = -Nr - \underset{(3)}{\zeta} ; \qquad e^{\underset{(1)}{\zeta}} = \dfrac{A}{n}e^{nr} + C ; \qquad C : c^{te} \\ e^{2\underset{(1)}{\nu}} = \left(\dfrac{n^2 - A^2}{n^2}\right)e^{2nr} - \dfrac{2AC}{n}e^{nr} - C^2 \end{cases}$$

$$\chi\mu \,|\, h\,|^2 = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left(\frac{2n^2 - A^2}{4}\right); \qquad \chi c^2 \overline{r}f = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}(A^2 - n^2) ;$$

$$2\chi p = -2\Lambda + \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left(\frac{A^2 + 2n^2}{4}\right)$$

Pour assurer la positivité de $|\, h\,|^2$ et $\overline{r}f$ il faut $n^2 < A^2 < 2n^2$. p est toujours positive si $\Lambda \leqslant 0$. Si $\Lambda > 0$ il suffit de prendre $2\Lambda \leqslant$ minimum

$$\left\{\frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left(\frac{A^2 + 2n^2}{4}\right)\right\}_{\mathscr{D}}$$

Étudions $e^{2\underset{(1)}{\nu}}$ en posant $X = e^{nr}$; l'expression s'annule pour les racines

$$X_1 = \frac{-nC}{n + A}, \qquad X_2 = \frac{nC}{n - A}$$

Avec $n < 0$, $A < 0$, $C < 0$ on a $0 < X_1 < X_2$

$$e^{nr_i} = X_i \rightarrow r_1 = -\frac{1}{|\,n\,|}\log X_1 ; \qquad r_2 = -\frac{1}{|\,n\,|}\log X_2$$

En choisissant $X_2 < 1$ nous aurons $r_1 > r_2$.

Pour $X_1 < X < X_2$ le trinôme $e^{2\underset{(1)}{\nu}}$ est positif

Or $[e^{\underset{(1)}{\zeta}}]_{X^1} = \dfrac{-|C||n|}{|n|+|A|} < 0$ et $[e^{\underset{(1)}{\zeta}}]_{X_2} = \dfrac{-|C||n|}{|n|-|A|} > 0.$

Il y aura donc un nombre $r_1^* \,(r_2 < r_1^* < r_1)$ pour lequel $e^{\underset{(1)}{\zeta}} > 0$ si

$$r_2 < r < r_1^*, \qquad r_1^* = -\frac{1}{|n|}\log\frac{|C||n|}{|A|}$$

L'unique équation de Maxwell donne $e^{2\omega}\sqrt{\Delta}h_3 = \Psi(r)$ d'où

$$h_3 = e^{(2N-n)r+\underset{(3)}{\zeta}}\Psi$$

Mais

$$\chi\mu h_3^2 = \left(\frac{2n^2 - A^2}{A}\right)e^{2Nr+2\underset{(3)}{\zeta}}\,;$$

par conséquent

$$\Psi = \frac{1}{2}\left(\frac{2n^2 - A^2}{\chi\mu}\right)^{1/2} e^{(n-N)r}$$

La seconde équation (21) équivaut à $\partial_3(p) = 0$; elle est donc satisfaite car

$$2\chi p = -2\Lambda + \left(\frac{A^2 + 2n^2}{4}\right)e^{2(N-n)r}.$$

Quant à la première on vérifie, en y portant les valeurs de p et $|h|^2$, qu'elle se réduit à une identité. Finalement $\underset{(3)}{\zeta}$ peut être arbitrairement choisie ainsi qu'une des fonctions $\bar{r}$, f. La solution se présente sous la forme

$$(23)\qquad \boxed{\begin{cases} g_{00} = 1\,; \qquad g_{03} = \varepsilon\left\langle \dfrac{A}{n}e^{nr} + C\right\rangle e^{\underset{(3)}{\zeta}}\,; \\ g_{11} = g_{22} = -e^{-2(N-n)r}\,; \\ g_{33} = -e^{2\underset{(3)}{\zeta}}\left\langle\left(\dfrac{n^2 - A^2}{n^2}\right)e^{2nr} - \dfrac{2AC}{n}e^{nr} - C^2\right\rangle \end{cases}}$$

Domaine de validité

$$\mathscr{D}\left\{ r_2 < r < r_1^* = -\frac{1}{|n|}\log\frac{|C||n|}{|A|}\,;\ n<0\,;\ A<0\,;\ C<0;\ n^2 < A^2 < 2n^2 \right\}$$

Examinons à présent le cas $h_0 = h_1 = h_3 = 0 \quad h_2 \neq 0$ avec la même métrique.

(14) *a* entraîne toujours $\partial_0(\bar{r}) = 0$.

(14) *b* s'écrit $\partial_K(\sqrt{-g}h^2) = 0$, $K = 0,2$. Ces relations sont satisfaites en vertu des hypothèses $\partial_K(g_{\alpha\beta}) = 0$.

Le système (14) *c* fournit les équations $\partial_\beta(\mathscr{P}) + \mu|h|^2\Gamma_2{}^2{}_\beta = 0, \mathscr{P} = p + \dfrac{\mu}{2}|h|^2$.

Sans écrire les expressions dans toute leur généralité nous postulerons la séparation des variables : $\zeta = \underset{(1)}{\zeta} + \underset{(3)}{\zeta}\,;\; v = \underset{(1)}{v} + \underset{(3)}{\zeta}\,;\; \omega = \underset{(1)}{\omega} - \underset{(3)}{\zeta}$ avec $\partial_1 \underset{(1)}{\zeta} \neq 0$.

On en tire les conséquences $e^{2\underset{(1)}{\zeta}}[\partial_1 \underset{(1)}{\zeta}]^2 = A^2 \underset{(1)}{\Delta}\,;\; \underset{(1)}{\Delta} = e^{2\underset{(1)}{\zeta}} + e^{2\underset{(1)}{v}}$.

Il reste alors une seule équation

$$\partial_1 \log \underset{(1)}{\Delta} + 2\partial_1 \underset{(1)}{\omega} = 2K\sqrt{\underset{(1)}{\Delta}}, \qquad K : c^{te}. \tag{24}$$

L'une des fonctions $\underset{(1)}{\zeta}, \underset{(1)}{v}, \underset{(1)}{\omega}$ est arbitraire.

Le choix $\underset{(1)}{\Delta} = e^{2nr}$ avec le signe $+$ devant le radical $\sqrt{\underset{(1)}{\Delta}}$ conduit aux expressions suivantes

$$\left\{\begin{aligned}
&\underset{(1)}{\omega} = -nr + \frac{K}{n}e^{nr}\,; \qquad e^{\underset{(1)}{\zeta}} = \left(\frac{A}{n}e^{nr} + C\right); \\
&\qquad\qquad e^{2\underset{(1)}{v}} = \left(\frac{n^2 - A^2}{n^2}\right)e^{2nr} - \frac{2AC}{n}e^{nr} - C^2 \\
&\chi\mu\,|h|^2 = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left\langle\left(\frac{A^2 - 2n^2}{2}\right) + 2Kne^{nr}\right\rangle \\
&\chi c^2 \bar{r}f = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left\langle\frac{A^2}{2} - 2Kne^{nr}\right\rangle; \qquad 2\chi p = -2\Lambda + n^2\frac{e^{-2\omega}}{\Delta}
\end{aligned}\right. \tag{25}$$

Les expressions $e^{\underset{(1)}{\zeta}}, e^{2\underset{(1)}{v}}, |h|^2, \bar{r}f$ doivent être strictement positives. On a toujours $p > 0$ si $\Lambda \leqslant 0$; dans le cas $\Lambda > 0$ on prendra donc

$$2\Lambda \leqslant \min\left(n^2\frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\right)_{\mathscr{D}}$$

Pour $Kn < 0$, $\bar{r}f$ est essentiellement positive ; il faut alors $A^2 > 2n^2$ et

$$e^{nr} < \frac{A^2 - 2n^2}{4\,|Kn|}$$

L'étude du signe de $e^{2\underset{(1)}{v}}$ se fait d'une manière semblable à celle du précédent exemple avec des conclusions identiques ; il en est de même pour l'exponentielle $e^{\underset{(1)}{\zeta}}$. Enfin il est aisé de vérifier la satisfaction des équations de conservation. Nous avons donc la solution

$$\boxed{\begin{aligned}
&g_{00} = 1\,; \qquad g_{03} = \varepsilon e^{\underset{(3)}{\zeta}}\left\langle\frac{A}{n}e^{nr} + C\right\rangle \\
&g_{11} = g_{22} = -e^{2\frac{K}{n}e^{nr}}\,; \qquad Kn < 0 \\
&g_{33} = -e^{2\underset{(3)}{\zeta}}\left\langle\left(\frac{n^2 - A^2}{n^2}\right)e^{2nr} - \frac{2AC}{n}e^{nr} - C^2\right\rangle; \quad A<0; n<0; C<0
\end{aligned}} \tag{26}$$

Domaine de validité

$$\mathscr{D}\left\{ -\frac{1}{|n|}\log\frac{|C||n|}{|A|-|n|} < r < -\frac{1}{|n|}\log\frac{|C||n|}{A}; \qquad A^2 > 2n^2 \right\}$$

Indiquons brièvement les résultats obtenus en prenant $\underset{(1)}{\Delta} = k^2\,\mathrm{ch}^2(nr)$.

$$\left\{\begin{aligned} & e^{\zeta}_{(1)} = \frac{Ak}{n}\,\mathrm{sh}(nr); \qquad e^{2\nu}_{(1)} = k^2\left\langle \mathrm{ch}^2(nr) - \frac{A^2}{n^2}\,\mathrm{sh}^2(nr)\right\rangle \\ & \underset{(1)}{\omega} = -\log[\mathrm{ch}(nr)] + \frac{Kk}{n}\,\mathrm{sh}(nr) \\ & \chi\mu\,|h|^2 = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left\langle\left(\frac{A^2-2n^2}{2}\right) + 2Kkn\,\mathrm{sh}(nr)\right\rangle; \\ & \qquad\qquad \chi c^2 \overline{r}f = \frac{e^{-2\omega}}{\Delta}\left\langle \frac{A^2}{2} - 2Kkn\,\mathrm{sh}(nr)\right\rangle \\ & 2\chi p = -2\Lambda + \frac{n^2}{\Delta}e^{-2\omega} \end{aligned}\right.$$

n sh (nr) est toujours > 0 ; donc il faut $Ak > 0$ pour assurer $e^{\zeta}_{(1)} > 0$. Avec $A^2 = 2n^2$ on a notamment $|h|^2_{r=0} = 0$ ce choix exige $Kk > 0$. Nous aurons en outre $\overline{r}f > 0$ si $\mathrm{sh}(nr) < \frac{n^2}{2Kkn} \rightleftarrows \mathrm{sh}(|n|r) < \frac{|n|}{2Kk}$. La nécessité d'avoir $e^{2\nu}_{(1)} > 0$ dans le cas $A^2 = 2n^2$ demande alors $|\mathrm{sh}(nr)| < 1$. Apparaît finalement la solution suivante

$$(27) \qquad \boxed{\left\{\begin{aligned} & g_{00} = 1; \qquad g_{03} = \varepsilon e^{\zeta}_{(3)} \langle |k|\sqrt{2}\,\mathrm{sh}(nr)\rangle; \\ & g_{11} = g_{22} = -k^2 e^{2\frac{Kk}{n}\mathrm{sh}(nr)}; \\ & g_{33} = -k^2 e^{\zeta}_{(3)}\langle 1 - \mathrm{sh}^2(nr)\rangle \end{aligned}\right.}$$

Domaine de validité $\mathscr{D}\,\{0 \leqslant r < \tilde{R};\ -\infty < z < +\infty\}$

$\tilde{R}$: plus petit des deux nombres $\frac{1}{|n|}\arg\mathrm{sh}\frac{|n|}{2Kk}$; $\frac{1}{|n|}\arg\mathrm{sh}(1)$.

Nous indiquerons pour terminer quelques solutions correspondant au ds^2

$$\left\{\begin{aligned} & g_{00}=1; \quad g_{01}=e^{\zeta}; \quad g_{11}=-e^{2\nu}; \quad g_{22}=g_{33}=-\Delta e^{2\omega}; \quad \text{autres } g_{\alpha\beta}=0 \\ & \Delta = (e^{2\zeta}+e^{2\nu}); \qquad \zeta, \nu, \omega(r, z). \end{aligned}\right.$$

En coordonnées comobiles la congruence des trajectoires du champ $\vec{U}\langle U^0 = 1;\ U^k = 0\rangle$ est encore shear-free et expansion-free.

Les composantes du tenseur de Ricci sont $R_{\alpha\alpha}$, R_{01}, R_{03}, R_{13}.

Le choix d'un vecteur $\vec{h}$ tel que $h_0=h_1=h_3=0$, $h_2 \neq 0$ dans le tenseur d'énergie magnéto-hydrodynamique conduit au système

$$(28)\quad \begin{cases} R_{00}=\chi \overset{*}{p}+\Lambda \; ; \; \dfrac{e^{-2\omega}}{\Delta} R_{33}=\chi \overset{*}{p}-\Lambda \; ; \; \chi\mu h_2^2 = R_{33}-R_{22} \; ; \; R_{01}=e^{\zeta}R_{00} \\ R_{03}=0 \; ; \; e^{2\zeta}R_{00}-R_{11}+e^{-2\omega}R_{33}=0 \; ; \; R_{13}=0. \end{cases}$$

On en tire les expressions $\chi\mu\,|\,h\,|^2$, $\chi c^2 \bar{r} f$, $2\chi p$; il reste alors quatre relations entre les coefficients du ds^2.

Nous avons toujours $\partial_0(\bar{r})=0$ et les équations de Maxwell $\partial_K(\sqrt{-g}h^2)=0$; $K=0,2$ sont toutes deux satisfaites.

Prenant $\partial_3\zeta \neq 0$, nous poserons en outre

$$\zeta = \underset{(1)}{\zeta} + \underset{(3)}{\zeta} \; ; \qquad v = \underset{(1)}{\zeta} + \underset{(3)}{v} \; ; \qquad \omega = -\underset{(1)}{\zeta} + \underset{(3)}{\omega}$$

Il vient $e^{2\underset{(3)}{\zeta}}[\partial_3 \underset{(3)}{\zeta}]^2 = A^2 \underset{(3)}{\Delta}$; $e^{2\underset{(3)}{v}} = A^{-2} e^{2\underset{(3)}{\zeta}}[(\partial_3 \underset{(3)}{\zeta})^2 - A^2]$ d'où la condition $(\partial_3 \underset{(3)}{\zeta})^2 > A^2$.

Il reste alors l'unique équation

$$-\partial_{33} \log \underset{(3)}{\Delta} - \partial_{33}\underset{(3)}{\omega} + \frac{1}{2}\partial_3 \underset{(3)}{\omega}.\partial_3 \log \underset{(3)}{\Delta} + \frac{e^{2\underset{(3)}{v}}}{\underset{(3)}{\Delta}} \left\langle \partial_{33}\underset{(3)}{v} + (\partial_3 \underset{(3)}{v}) \left[2\partial_3 \underset{(3)}{v} - \frac{1}{2}\partial_3 \log \underset{(3)}{\Delta} \right] \right\rangle + A^2 = 0$$

L'une des fonctions $\underset{(3)}{\zeta}$, $\underset{(3)}{v}$, $\underset{(3)}{\omega}$ peut être arbitrairement choisie.

Soit $\underset{(3)}{\Delta} = k^2 \operatorname{ch}^2(nz)$; nous avons

$$e^{\underset{(3)}{\zeta}} = \frac{Ak}{n}\operatorname{sh}(nz) \; ; \qquad e^{2\underset{(3)}{v}} = k^2 \left\langle \left(1 - \frac{A^2}{n^2}\right)\operatorname{ch}^2(nz) + \frac{A^2}{n^2} \right\rangle$$

$$\underset{(3)}{\omega} = \omega_0 + \frac{K_0}{n}\operatorname{sh}(nz) - \log \operatorname{ch}(nz)$$

L'étude des conditions de positivité $|\,h\,|^2 > 0$, $\bar{r}f > 0$, $p \geqslant 0$ est analogue à celle déjà rencontrée. Nous nous contenterons de mentionner la solution particulière

$$(29)\quad \boxed{\begin{cases} g_{01} = e^{\underset{(1)}{\zeta}} \dfrac{Ak}{n}\operatorname{sh}(nz), \\ \qquad g_{11} = -k^2 e^{2\underset{(1)}{\zeta}} \left\langle \left(1 - \dfrac{A^2}{n^2}\right)\operatorname{ch}^2(nz) + \dfrac{A^2}{n^2} \right\rangle ; \qquad Akn > 0 \\ g_{22} = g_{33} = -k^2 e^{2\omega_0 + \frac{2K_0}{n}\operatorname{sh} n(z)} ; \\ \qquad \underset{(1)}{\zeta} \text{ arbitraire} \; ; \qquad n > 0 \; ; \qquad K_0 < 0 \end{cases}}$$

dont la validité est restreinte au domaine $\mathcal{D} = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2$ avec

$$\mathcal{D}\left\{ -\frac{1}{n}\operatorname{arg\,sh}\frac{A^2}{4\,|\,K_0\,|\,n} < z < \frac{1}{n}\operatorname{arg\,sh}\frac{(A^2-2n^2)}{4\,|\,K_0\,|\,n}\,; \qquad A^2 > 2n^2 \right\}$$

$$\mathcal{D}_1\left\{ -\frac{1}{n}\operatorname{arg\,sh}\frac{n}{\sqrt{A^2-n^2}} < z < \frac{1}{n}\operatorname{arg\,sh}\frac{n}{\sqrt{A^2-n^2}} \right\}; \qquad \mathcal{D}_2\{\, z > 0 \,\}.$$

Comme précédemment, l'une des fonctions $\bar{r}, f$ demeure arbitraire.

Le choix $\underset{(3)}{\Delta} = e^{2nz}$ conduirait à des résultats similaires quant au domaine de validité en $z\,(0 \leqslant r < +\infty)$.

Nous poserons enfin $h_0 = h_2 = h_3 = 0$, $h_1 \neq 0$.

Les équations de Maxwell s'écrivent $\partial_1(e^{2\omega}\sqrt{\Delta}h_1)=0$; $\partial_0(\sqrt{-g}h^1)=0$, la dernière étant identiquement satisfaite.

En postulant une séparation des variables identique au cas précédent nous obtenons encore

$$e^{2\underset{(3)}{\zeta}}[\partial_3\underset{(3)}{\zeta}]^2 = A^2\underset{(3)}{\Delta}, \qquad e^{2\underset{(3)}{\nu}} = A^{-2}e^{2\underset{(3)}{\zeta}}\langle(\partial_3\underset{(3)}{\zeta})^2 - A^2\rangle \rightarrow [\partial_3\underset{(3)}{\zeta}]^2 > A^2$$

Il reste l'équation

$$\partial_{33}\log\underset{(3)}{\Delta} - (\partial_3\log\underset{(3)}{\Delta})\left(\frac{1}{2}\partial_3\log\underset{(3)}{\Delta} + 2\partial_3\underset{(3)}{\omega}\right) - A^2 = 0$$

Posons $\underset{(3)}{\zeta} = \log z^{2n}$; il vient $e^{2\underset{(3)}{\nu}} = z^{4n-2}\left\langle \dfrac{4n^2}{A^2} - z^2 \right\rangle$ puis

$$\underset{(3)}{\omega} = -\,n\log z - \frac{A^2z^2}{8(2n-1)}$$

$(2n-1)$ est nécessairement $\neq 0$ sinon $A^2 = 0$

$$\chi\mu\,|\,h\,|^2 = \frac{e^{-2\underset{(3)}{\omega}}}{\underset{(3)}{\Delta}}(n-1)\left\langle \frac{2n}{z^2} - \frac{A^2}{2(2n-1)} \right\rangle \quad \text{d'où } (n-1) \neq 0$$

$$\chi c^2\bar{r}f = -\frac{e^{-2\underset{(3)}{\omega}}}{\underset{(3)}{\Delta}}\left\langle \frac{(2n-1)(2n-2)}{z^2} - A^2 \right\rangle$$

$$2\chi p = -\,2\Lambda + \frac{e^{-2\underset{(3)}{\omega}}}{\underset{(3)}{\Delta}}\left\langle \frac{2(n-1)^2}{z^2} + \frac{A^2(n-1)}{2(2n-1)} \right\rangle$$

Soit $n = \dfrac{4}{3}$; $|\,h\,|^2 > 0$ et $\bar{r}f > 0$ imposent alors

$$\frac{8}{3} - \frac{3A^2z^2}{10} > 0\,; \qquad A^2z^2 - \frac{10}{9} > 0$$

D'autre part, l'expression de $e^{2\underset{(3)}{\nu}}$ exige $A^2z^2 < \dfrac{64}{9}$.

Donc il faut $\frac{10}{9} < A^2z^2 < \frac{64}{9}$.

p est toujours positive si $\Lambda \leqslant 0$; pour $\Lambda > 0$ il faudra prendre

$$2\Lambda \leqslant \min . \left\{ \frac{e^{-2\underset{(3)}{\omega}}}{\underset{(3)}{\Delta}} \left\langle \frac{2}{9z^2} + \frac{A^2}{10} \right\rangle \right\}_{\mathscr{D}},$$

$$\chi\mu h_1^2 = e^{2\underset{(1)}{\zeta} - 2\underset{(3)}{\omega}}(n-1)\left\langle \frac{2n}{z^2} - \frac{A^2}{2(2n-1)} \right\rangle \rightarrow h_1^2 = e^{2\underset{(1)}{\zeta}}\Psi(z)$$

Donc $e^{2\omega}\sqrt{\Delta}h_1 = e^{2\underset{(3)}{\omega}}\sqrt{\underset{(3)}{\Delta}}\,\Psi(z)$, d'où $\partial_1(e^{2\omega}\sqrt{\Delta}h_1) = 0$.

En vertu de $\theta = 0$, $h^{\nu}{}_{;\nu=0} = 0$ les équations $\nabla_\alpha(T^{\alpha\beta}) = 0$ s'écrivent

$$-\mathscr{R}\langle \Gamma_\alpha{}^0{}_0 + e^{\zeta}\Gamma_\alpha{}^1{}_0 \rangle - \partial_\alpha(\mathscr{P}) - \mu h^\beta \langle \partial_\beta(h_\alpha) - h_1\Gamma_\alpha{}^1{}_\beta \rangle = 0$$

Pour $\alpha = 0{,}2$ on a des identités ; l'indice $\alpha = 1$ donne $\partial_1(p) = 0$. L'équation $\alpha = 3$: $\partial_3(\mathscr{P}) + \frac{\mu}{2}|h|^2\partial_3 \log \Delta = 0$ se réduit également à une identité lorsqu'on y porte les valeurs de p, $|h|^2$ et Δ.

La solution est donc

$$(30) \qquad \boxed{\begin{cases} g_{00} = 1 ; \quad g_{01} = e^{\underset{(1)}{\zeta}} z^{8/3} ; \quad g_{11} = -e^{2\underset{(1)}{\zeta}} z^{10/3}\left\langle \dfrac{64}{9A^2} - z^2 \right\rangle \\ g_{22} = g_{33} = -\dfrac{64}{9A^2} z^{2/3} e^{-\frac{3A^2z^2}{20}} ; \quad \underset{(1)}{\zeta} \text{ arbitraire.} \end{cases}}$$

Domaine de validité $\mathscr{D}\left\{ 0 \leqslant r \leqslant +\infty ; \frac{10}{9A^2} < z^2 < \frac{64}{9A^2} \right\}$ avec exclusion d'une tranche $-\lambda < z < +\lambda$; λ : c^te^.

Un choix convenable des arbitraires (constantes ou fonctions) figurant dans les solutions pourra peut-être conduire à l'obtention de résultats plus raffinés avec possibilité d'interprétation physique vraisemblable (par exemple plasma en couronne circulaire à distance appropriée d'une étoile tournante).

(Manuscrit reçu le 2 janvier 1974).