

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

IRÈNE MORET-BAILLY

**Espaces-temps asymptotiquement plats invariants  
par un groupe de transformations asymptotiques  
isomorphe au groupe de Bondi-Metzner**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 22, n° 4 (1975), p. 265-276

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1975\\_\\_22\\_4\\_265\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_4_265_0)

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**Espaces-temps asymptotiquement plats  
invariants par un groupe  
de transformations asymptotiques  
isomorphe au groupe de Bondi-Metzner**

par

**Irène MORET-BAILLY**

Faculté des Sciences d'Angers

---

**RÉSUMÉ.** — On étudie des espaces-temps munis de la métrique de Bondi mais avec des hypothèses affaiblies sur son comportement asymptotique. On prouve que les conditions aux limites choisies sont invariantes par un groupe de transformations isomorphe au groupe de Bondi-Metzner. Pour de tels espaces-temps asymptotiquement plats, le développement limité du tenseur de courbure satisfait au « peeling theorem » généralisé.

**ABSTRACT.** — Space-time manifolds with the Bondi metric but with weaker assumptions on the asymptotic behaviour are studied. It is proved that the boundary conditions chosen are invariant under a group of transformations isomorphic to the Bondi-Metzner group. For such asymptotically flat-space-time manifolds, the leading terms of the Riemann tensor expansion satisfy the generalised « peeling theorem ».

---

Soit  $\mathcal{V}_4$  une variété espace-temps de la Relativité Générale au moins de classe  $C^4$  qui satisfait aux hypothèses suivantes :

A. — Il existe au moins un système de coordonnées de Bondi [1]

$x^\alpha = u, r, \theta, \phi$  sur l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathcal{V}_4$  défini par  $r > r_0$  dans ce système de coordonnées la métrique a l'expression donnée par Bondi :

$$(1) \quad ds^2 = (Vr^{-1}e^{2\beta} - U^2r^2e^{2\gamma})du^2 + 2e^{2\beta}dudr + 2Ur^2e^{2\gamma}dud\theta - r^2(e^{2\gamma}d\theta^2 + e^{-2\gamma}\sin^2\theta d\phi^2)$$

où  $V, \beta, U, \gamma$  sont des fonctions de  $u, r, \theta$ .

B. — Ces fonctions admettent les développements limités en  $r^{-1}$  deux fois dérivables suivants :

$$(2) \quad \begin{cases} V = \bar{V}r^{-1} + \overset{0}{V} + 0(r^{-1}) & \beta = \bar{\beta}r^{-1} + 0(r^{-2}) \\ U = \overset{1}{U}r^{-1} + \overset{2}{U}r^{-2} + 0(r^{-3}) & \gamma = \overset{1}{\gamma}r^{-1} + 0(r^{-2}), \end{cases}$$

où  $\bar{V}, \overset{0}{V}, \bar{\beta}, \overset{1}{U}, \overset{2}{U}, \overset{1}{\gamma}$  sont des fonctions des variables  $u$  et  $\theta$ . Nous supposons donc que si  $\mu$  désigne l'une des fonctions (2) ou l'une de ses dérivées premières et si  $\mu = 0(r^{-n})$  on a :

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = 0(r^{-n}), \quad \frac{\partial\mu}{\partial\theta} = 0(r^{-n}), \quad \frac{\partial\mu}{\partial r} = 0(r^{-(n+1)}).$$

On déduit de A et B le comportement asymptotique des composantes  $g_{\alpha\beta}$  non nulles du tenseur métrique :

$$(2)' \quad \begin{cases} \lim_{r=\infty} (g_{00}) = \bar{V} & \lim_{r=\infty} (r^{-1}g_{02}) = \overset{1}{U} \\ \lim_{r=\infty} (g_{01}) = 1 & \lim_{r=\infty} (r^{-2}g_{22}) = -1 & \lim_{r=\infty} (r^{-2}g_{33}) = -\sin^2\theta. \end{cases}$$

Remarques. — a) L'étude des équations du vide  $R_{\alpha\beta} = 0$  montre qu'une condition nécessaire pour que  $g$  en soit solution est que  $\bar{V} = 1$  et  $\overset{1}{U} = 0$ . Notons que ces valeurs de  $\bar{V}$  et  $\overset{1}{U}$  sont généralement prises, que  $g$  soit, ou ne soit pas, solution des équations du vide [1] [2] [3].

b) Si  $R$  désigne le tenseur de courbure de  $(\mathcal{V}_4, g)$  on a  $\lim_{r=\infty} R = 0$ . Il suffit de prouver que ses composantes, relatives à un système de coordonnées régulier  $x^{\hat{\alpha}}$  tendent vers zéro quand  $r \rightarrow \infty$ . On peut prendre pour  $x^{\hat{\alpha}}$  les coordonnées  $t, x, y, z$  définies sur  $\Omega$  par  $t = u - r, x = r \sin\theta \cos\phi, y = r \sin\theta \sin\phi, z = r \cos\theta$  en effet les  $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$  et leur déterminant, égal à  $-e^{4\beta}$ , sont bornés sur  $\Omega$ . On vérifie que  $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = 0(r^{-1})$ . On peut utiliser les  $\Gamma_{\beta}^{\alpha}{}_{\gamma}$  donnés par Bondi [1] et les remarques suivantes dans lesquelles les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$  égales à 0,1 sont désignées par  $i, j, k$  et celles égales à 2,3 par A, B, C.

$$\frac{\partial x^A}{\partial x^{\hat{\alpha}}} = 0(r^{-1}), \quad \frac{\partial x^i}{\partial x^{\hat{\alpha}}} = 0(1), \quad \frac{\partial x^{\hat{\alpha}}}{\partial x^i} = 0(1),$$

$$\frac{\partial x^{\hat{\alpha}}}{\partial x^A} = 0(r), \quad \Gamma_B^A{}_C = 0(1), \quad \Gamma_A^i{}_B = 0(r),$$

en général on a  $\Gamma_{j^i}^k = 0(r^{-1})$  et  $\Gamma_i^A_j = 0(r^{-2})$  sauf pour  $\Gamma_0^1_0$  et  $\Gamma_0^2_0$ ,

$$\Gamma_0^1_0 = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x^0} + 0(r^{-1}), \quad \Gamma_0^2_0 = -\frac{\partial \bar{U}}{\partial x^0} r^{-1} + 0(r^{-2}).$$

les  $\Gamma_0^1_0$  et  $\Gamma_0^2_0$  n'entrent que dans  $R_0^1_{20}$  et  $R_0^2_{20}$  pour lesquels on vérifie directement la propriété.

**THÉORÈME I.** — *Sous les hypothèses A et B on a :*

a) *Il existe sur  $\Omega$  un champ de vecteurs  $\xi$  générateur de transformations infinitésimales [4] laissant invariants l'expression de la métrique (1) et le comportement asymptotique (2)' de  $g$ .*

b) *Pour  $r = \infty$  ces transformations infinitésimales forment un groupe isomorphe au groupe infinitésimal de Bondi-Metzner.*

c) *Ces transformations conservent chacune des relations :*

$$\bar{V}^{-1} - 1 = 0 \quad \frac{\partial \bar{V}}{\partial u} = 0, \quad \bar{U} = 0.$$

*Preuve.* — a) Si  $\mathcal{L}(\xi)g$  désigne la dérivée de Lie de  $g$  par  $\xi$ , il est nécessaire et suffisant que les  $\xi_\alpha$  satisfassent aux équations suivantes :

$$(3) \quad \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{11} = 0, \quad \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{1A} = 0, \quad g^{AB} \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{AB} = 0,$$

$$(4) \quad \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{0A} = 0(r), \quad \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{01} = 0(r^{-1}), \quad \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{00} = 0(1), \\ \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{AB} = 0(r),$$

$$(5) \quad \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{23} = \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{03} = 0 \quad \text{avec } A = 2,3; B = 2,3.$$

Nous utilisons la formule suivante satisfaite sur une variété riemannienne

$$\{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta - \nabla_\beta \xi_\alpha,$$

où  $\nabla$  est le symbole de dérivation covariante.

Les 4 équations (3) donnent les  $\xi_\alpha$  en fonction de 3 fonctions arbitraires  $f, f^A$  des variables  $u, \theta, \phi$ . En effet elles s'écrivent respectivement

$$(6) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial r} - \Gamma_1^{\lambda}{}_{1} \xi_\lambda = 0,$$

$\frac{\partial}{\partial r} \xi_A + \frac{\partial}{\partial x^A} \xi_1 - 2\Gamma_1^{\lambda}{}_{A} \xi_\lambda = 0$  desquelles on tire après avoir multiplié par  $g^{AB}$  :

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial r} (\xi_A g^{AB}) - \xi_A \frac{\partial}{\partial r} g^{AB} + g^{AB} \left[ \frac{\partial}{\partial x^A} \xi_1 - 2\Gamma_A^{\lambda}{}_{1} \xi_\lambda \right] = 0,$$

$$(8) \quad g^{AB} \left( \frac{\partial}{\partial x^A} \xi_B + \frac{\partial}{\partial x^B} \xi_A - 2\Gamma_A^{\lambda}{}_{B} \xi_\lambda \right) = 0.$$

Après avoir remplacé les symboles de Christoffel par leur valeur en fonction de  $\gamma$ ,  $\beta$ ,  $U$ ,  $V$  (6) (7) et (8) deviennent :

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial r} \xi_1 - 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial r} \beta = 0$$

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r} (\xi_2 g^{22}) + g^{22} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \xi_1 - 2\xi_1 \frac{\partial}{\partial \theta} \beta \right) + e^{-2\beta} \xi_1 \frac{\partial}{\partial r} U = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} (\xi_3 g^{33}) + g^{33} \frac{\partial}{\partial \phi} \xi_1 = 0 \end{cases}$$

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial \theta} (g^{22} \xi_2) + \frac{\partial}{\partial \phi} (g^{33} \xi_3) + 2 \frac{e^{-2\beta}}{r} \xi_0 + e^{-2\beta} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} + U \cot \theta - \frac{2V}{r^2} \right) \xi_1 + \left\{ 2 \frac{U}{r} e^{-2\beta} - \frac{e^{-2\gamma}}{r^2} \cot \theta \right\} \xi_2 = 0.$$

(9) et (10) déterminent  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  et  $\xi_3$  :

$$(12) \quad \xi_1 = f e^{2\beta}$$

$$(13) \quad \xi_2 g^{22} = -Uf + \int_r^\infty g^{22} e^{2\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} f \right) dr + f^2$$

$$\xi_3 g^{33} = \int_r^\infty g^{33} e^{2\beta} \left( \frac{\partial}{\partial \phi} f \right) dr + f^3$$

(11) détermine  $\xi_0$  :

$$\xi_0 = -\frac{1}{2} e^{2\beta} r \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (g^{22} \xi_2) + \frac{\partial}{\partial \phi} (g^{33} \xi_3) \right] - \frac{1}{2} r \left( \frac{\partial}{\partial \theta} U + U \cot \theta - \frac{2V}{r^2} \right) \xi_1 + \left\{ U r^2 e^{2\gamma} - \frac{1}{2} r e^{2\beta} \cot \theta \right\} \xi_2 g^{22}.$$

Ensuite en tenant compte de  $B$  on obtient le développement limité des  $\xi_\alpha$  qui introduit dans les équations (4) et (5) déterminent  $f$  et  $f^A$ . En effet, les équations (4) s'écrivent :

$$\frac{\partial \xi_A}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^A} - 2\Gamma_A^{\lambda 0} \xi_\lambda = 0(r)$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial r} - 2\Gamma_0^{\lambda 1} \xi_\lambda = 0(r^{-1})$$

$$\frac{\partial \xi_0}{\partial u} - \Gamma_0^{\lambda 0} \xi_\lambda = 0(1)$$

$$\frac{\partial \xi_B}{\partial x^A} + \frac{\partial \xi_A}{\partial x^B} - 2\Gamma_A^{\lambda B} \xi_\lambda = 0(r).$$

En y remplaçant les symboles Christoffel par leur valeur on obtient :

$$(15) \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \theta} - 2 \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_0$$

$$- 2 \left\{ \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ U \left( \frac{V}{r^2} + \frac{V}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} - \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) + \frac{V}{2r} \frac{\partial U}{\partial r} \right] \right\} \xi_1$$

$$- 2 \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial u} + U \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \left( \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_2 = 0(r),$$

$$(16) \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial \phi} + 2 \xi_3 \frac{\partial \gamma}{\partial u} = 0(r),$$

$$(17) \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial u} + \frac{\partial \xi_0}{\partial r} - 2 \left\{ \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{2r^2} + \frac{V}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} - U \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - \frac{1}{2} r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \frac{\partial U}{\partial r} \right\} \xi_1$$

$$- 2 \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} - U \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{e^{(\beta-\gamma)}}{r^2} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right\} \xi_2 = 0(r^{-1}),$$

$$(18) \quad \frac{\partial \xi_0}{\partial u}$$

$$- \left\{ 2 \frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{V}{2r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial \beta}{\partial r} \frac{V}{r} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_0$$

$$- \left\{ \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial u} - \frac{V}{r} \frac{\partial \beta}{\partial u} - \frac{V^2}{2r^3} + \frac{V}{2r^2} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V^2}{r^2} \frac{\partial \beta}{\partial r} - \frac{U}{2r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{UV}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right.$$

$$+ \left. r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left[ U^2 \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} + U \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} - \frac{V}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} + \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right) - \frac{UV}{r} \frac{\partial U}{\partial r} \right] \right\} \xi_1$$

$$- \left\{ -\frac{\partial U}{\partial u} + \left( \frac{2\partial \beta}{\partial u} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial \theta} - U \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + \frac{V}{2r^2} - \frac{1}{2r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} \frac{\partial \beta}{\partial r} \right) U \right.$$

$$+ \left. \frac{e^{2(\beta-\gamma)}}{2r^3} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} + 2V \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \right) + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U^2 \left( \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + U \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_2 = 0(r),$$

$$(19) \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} - \left\{ r e^{2(\gamma-\beta)} \left( 1 + r \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_0$$

$$- \left\{ r^2 e^{2(\gamma-\beta)} \left( \frac{\partial \gamma}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial \theta} + U \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} - \frac{V}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_1$$

$$- \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + r^2 e^{2(\gamma-\beta)} U \left( \frac{1}{r} + \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_2 = 0(r),$$

$$(20) \quad \frac{\partial \xi_3}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \phi} - 2 \left\{ \cot \theta - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right\} \xi_3 = 0(r),$$

$$(21) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \xi_3}{\partial \phi} - \left\{ r e^{-2(\gamma+\beta)} \sin^2 \theta \left( 1 - r \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_0 \\ & - \left\{ r^2 \sin^2 \theta e^{-2(\gamma+\beta)} \left( -\frac{\partial \gamma}{\partial u} + U \cot \theta - U \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} + \frac{V}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) \right\} \xi_1 \\ & - \left\{ r^2 \sin^2 \theta e^{-2(\beta-\gamma)} U \left( \frac{1}{r} - \frac{\partial \gamma}{\partial r} \right) - e^{-4\gamma} \sin^2 \theta \left( \cot \theta - \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right) \right\} \xi_2 = 0(r). \end{aligned}$$

Le développement limité des  $\xi_\alpha$  est :

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi_1 = f + 2f\beta r^{-1} + 0(r^{-2}) \quad \xi_2 = -f^2 r^2 + Uf + \frac{\partial f}{\partial \theta} - 2\gamma f^2 + 0(1) \\ \xi_3 = -\sin^2 \theta f^3 r^2 + 0(r) \\ \xi_0 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta - 2Uf^2 \right) r \\ \quad - \beta \left[ \frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta \right] \\ \quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2 \sin^2 \theta} - U \frac{\partial f}{\partial \theta} + 2fV^{-1} + 4f^2 \gamma U \right. \\ \quad \left. + 2Uf^2 - 2U^2 f + \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right\} + 0(r^{-1}). \end{array} \right.$$

Nous introduisons (22) dans les équations (15) ... (21).

Les équations (15) et (16) sont satisfaites si :

$$(23) \quad \frac{\partial f^A}{\partial u} = 0$$

l'équation (17) est satisfaite si :

$$(24) \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta \right)$$

L'équation (18) est satisfaite.

Les équations (19) et (21) sont satisfaites si :

$$(25) \quad -\frac{\partial f^2}{\partial \theta} + \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta = 0$$

L'équation (20) est satisfaite si :

$$(26) \quad \frac{\partial f^2}{\partial \phi} + \frac{\partial f^3}{\partial \theta} \sin^2 \theta = 0$$

En introduisant (25) dans (24) on obtient :

$$(27) \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f^2}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f^3}{\partial \phi} + f^2 \cot \theta.$$

De (16) et (20) on déduit que les équations (5) sont satisfaites si et seulement si :

$$(28) \quad f^3 = 0$$

Des équations (23), (26), (24) on obtient alors :

$$(29) \quad f^2 = a \sin \theta, \quad f = a \cos \theta u + \alpha(\theta)$$

où  $a$  est une constante et  $\alpha$  une fonction arbitraire de  $\theta$ .

b) Les transformations infinitésimales engendrées par  $\xi$ ,  $x^{\alpha'} = x^\alpha + \xi^\alpha t$  s'écrivent pour  $r = \infty$   $u'' = u + f t$ ,  $\theta'' = \theta + f^2 t$ ,  $\phi'' = \phi + f^3 t$  où  $f^3$ ,  $f^2$  et  $f$  sont déterminés par (28) et (29). Ce sont celles du groupe de Bondi-Metzner [2].

c)  $\bar{V}^{-1}$  étant la limite de  $g_{00}$  quand  $r \rightarrow \infty$ , il suffit de vérifier que

$$\lim_{r=\infty} \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{00} \text{ est nulle si } \bar{V}^{-1} = 1 \text{ et, indépendante de } u \text{ si } \frac{\partial \bar{V}^{-1}}{\partial u} = 0.$$

De (18) on déduit :

$$\lim_{r=\infty} \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{00} = 2[\bar{V}^{-1} - 1] \frac{\partial f^2}{\partial \theta} + f^2 \frac{\partial \bar{V}^{-1}}{\partial \theta} + f \frac{\partial \bar{V}^{-1}}{\partial u}.$$

De même  $\bar{U}^1$  étant la limite de  $r^{-1}g_{02}$  il suffit de vérifier que

$$\lim_{r=\infty} [r^{-1} \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{02}]$$

a une limite nulle si  $\bar{U}^1 = 0$ . De (15) on déduit :

$$\lim_{r=\infty} [r^{-1} \{ \mathcal{L}(\xi)g \}_{02}] = f \frac{\partial \bar{U}^1}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial \theta} f^2 \bar{U}^1.$$

THÉORÈME II. — Sous les hypothèses A, B et  $\bar{U}^1 = 0$ ,  $(\mathcal{V}_4, g)$  possède les propriétés suivantes :

a) Il existe sur  $\Omega$  un système de coordonnées  $x^{\bar{\alpha}} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  régulier tel que l'on ait  $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^1 \bar{r}^{-1} + 0(\bar{r}^{-2})$ ,  $\eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  désignant les composantes du tenseur métrique de l'espace de Minkowski  $M_4$  en repère orthonormé.

b) Si  $K$  désigne le vecteur isotrope  $K^\alpha = (0, 1, 0, 0)$  l'étude algébrique de  $R$  avec les notations usuelles de la classification de Bel-Pétrov donne le développement limité suivant :

$$(30) \quad R = N(K)\bar{r}^{-1} + 0(\bar{r}^{-2}).$$

Si de plus les fonctions  $V, U, \beta, \gamma$  admettent un développement limité à l'ordre  $n$  on a :

$$(31) \quad \text{pour } n=2, \quad R = N(K)\bar{r}^{-1} + II(K)\bar{r}^{-2} + 0(\bar{r}^{-3}),$$

$$(32) \quad \text{pour } n=3 \quad \text{et} \quad \beta^1 = 0, \quad R = N(K)\bar{r}^{-1} + III(K)\bar{r}^{-2} + II(K)\bar{r}^{-3} + 0(\bar{r}^{-4}),$$



$$(33) \text{ pour } n=4 \text{ et } \overset{1}{\beta}=0 \text{ et } \overset{2}{\beta} = -\frac{1}{4}\overset{1}{\gamma}^2 \text{ et } \overset{2}{U} = -\frac{\overset{1}{\partial\gamma}}{\overset{1}{\partial\theta}} - 2\overset{1}{\gamma} \cot \theta,$$

$$R = N(K)\bar{r}^{-1} + III(K)\bar{r}^{-2} + II(K)\bar{r}^{-3} + I'(K)\bar{r}^{-4} + 0(\bar{r}^{-5}).$$

c) Deux variétés espace-temps  $(\mathcal{V}_4, g)$  satisfaisant, la première à  $\overset{-1}{V} = 1$ , la seconde à  $\frac{\partial \overset{-1}{V}}{\partial u} \neq 0$ , sont distinctes. De même deux variétés  $(\mathcal{V}_4, g)$  satisfaisant, la première à  $\overset{-1}{V} = 1$  et  $\frac{\partial \overset{1}{\beta}}{\partial u} = 0$ , la seconde à  $\overset{-1}{V} \neq 1$  et  $\frac{\partial \overset{1}{\beta}}{\partial u} = 0$  et  $\frac{\partial \overset{-1}{V}}{\partial u} = 0$ , sont distinctes.

Preuve. — a) Le système de coordonnées  $x^{\bar{\alpha}} = (\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  est défini par :

$$\begin{aligned} \bar{t} &= u + r + \psi(u, \theta) \\ \bar{x} &= [r + \psi(u, \theta)] \sin \theta \cos \psi \\ \bar{y} &= [r + \psi(u, \theta)] \sin \theta \sin \phi \\ \bar{z} &= [r + \psi(u, \theta)] \cos \theta \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{1}{2}(\overset{-1}{V} - 1)$$

On a 
$$\frac{D(t, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{D(u, r, \theta, \phi)} = r^2 \sin \theta.$$

Si l'on pose :

$$a = e^{2\beta} \left[ Vr^{-1} - 2 \frac{\partial \psi}{\partial u} \right] - U^2 r^2 e^{2\gamma},$$

et 
$$b = Ur^2 e^{2\gamma} - \frac{\partial \psi}{\partial \theta} e^{2\beta},$$

les composantes de  $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  s'écrivent :

$$g_{\bar{0}\bar{0}} = a$$

$$g_{\bar{0}\bar{1}} = \sin \theta \cos \phi [e^{2\beta} - a] + b \cos \theta \cos \phi r^{-1}$$

$$g_{\bar{0}\bar{2}} = \sin \theta \sin \phi [e^{2\beta} - a] + b \cos \theta \sin \phi r^{-1}$$

$$g_{\bar{0}\bar{3}} = \cos \theta [1 - a] - b \sin \theta r^{-1}$$

$$g_{\bar{1}\bar{1}} = \sin^2 \theta \cos^2 \phi [a - 2e^{2\beta}] - \cos^2 \theta \cos^2 \phi e^{2\gamma} - \sin^2 \phi e^{-2\gamma} - b \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi r^{-1}$$

$$g_{\bar{1}\bar{2}} = \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi [a - 2e^{2\beta}] - \cos^2 \theta \sin \phi \cos \phi e^{2\gamma} + \sin \phi \cos \phi e^{-2\gamma} - 2b \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi r^{-1}$$

$$g_{\bar{1}\bar{3}} = \sin \theta \cos \theta \cos \phi [a - 2e^{2\beta}] + \sin \theta \cos \theta \cos \phi e^{2\gamma} + b \cos \phi (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) r^{-1}$$

$$g_{\bar{2}\bar{2}} = \sin^2 \theta \sin^2 \phi [a - 2e^{2\beta}] - \cos^2 \theta \sin^2 \phi e^{2\gamma} - \cos^2 \phi e^{-2\gamma} - 2b \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi r^{-1}$$

$$g_{\bar{2}\bar{3}} = \sin \theta \cos \theta \sin \phi [a - 2e^{2\beta}] + \sin \theta \cos \theta \sin \phi e^{2\gamma} + b \sin \phi (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) r^{-1}$$

$$g_{\bar{3}\bar{3}} = \cos^2 \theta [a - 2e^{2\beta}] - \sin^2 \theta e^{2\gamma} + b \sin \theta \cos \theta r^{-1},$$

en tenant compte de  $\lim_{\bar{r}=\infty} a = 1$  et des développements limités (2)', on obtient,  $\lim_{\bar{r}=\infty} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ . Le tenseur métrique a donc bien le développement limité annoncé. Ceci prouve que  $(\mathcal{V}_4, g)$  est asymptotiquement plat dans le sens qu'il existe un homéomorphisme (défini par les  $x^{\bar{\alpha}}$ ) de  $\Omega$  sur un ouvert  $\bar{r} > \bar{r}_0$  de  $M_4$ .

b) On désigne par  $x^{\alpha'}$  le système de coordonnées définies sur  $\Omega$  par  $x^{\alpha'} = (u, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ . Si on écrit le développement limité de  $R$  à l'ordre  $n$  sous la forme :

$$R_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \overset{1}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \bar{r}^{-1} + \dots + \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \bar{r}^{-n} + O(\bar{r}^{-(n+1)}),$$

et celui de  $K$  sous la forme :  $K^{\alpha'} = \overset{0}{K}^{\alpha'} + O(\bar{r}^{-1})$ , on rappelle ([3], p. 228) que :  $\overset{n}{R}$  est un cas N relativement à  $K$  [notation  $\overset{n}{R} = N(K)$ ] si :

$$\begin{cases} \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\delta'} = \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\beta'} = \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\alpha'} = 0 \\ \overset{n}{R}^*_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\delta'} = \overset{n}{R}^*_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\beta'} = \overset{n}{R}^*_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\alpha'} = 0, \end{cases}$$

$\overset{n}{R}$  est un cas III relativement à  $K$  [notation  $\overset{n}{R} = III(K)$ ] si :

$$\begin{cases} \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\beta'} \overset{0}{K}^{\delta'} = \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\alpha'} \overset{0}{K}^{\delta'} = 0 \\ \overset{n}{R}^*_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\beta'} \overset{0}{K}^{\delta'} = \overset{n}{R}^*_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\alpha'} \overset{0}{K}^{\delta'} = 0, \end{cases}$$

$\overset{n}{R}$  est un cas II relativement à  $K$  [notation  $\overset{n}{R} = II(K)$ ] si :

$$\overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\beta'} \overset{0}{K}^{\delta'} = \lambda \overset{0}{K}_{\alpha'} \overset{0}{K}_{\gamma'}, \quad \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}^{\alpha'} \overset{0}{K}^{\delta'} = \lambda \overset{0}{K}^{\beta'} \overset{0}{K}_{\gamma'},$$

$\overset{n}{R}$  est un cas I' relativement à  $K$  [notation  $\overset{n}{R} = I'(K)$ ] si :

$$[(\overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\rho'} - \overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\rho'} \overset{0}{K}_{\delta'}) \overset{0}{K}^{\sigma'} - (\overset{n}{R}_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} \overset{0}{K}_{\rho'} - \overset{n}{R}_{\alpha'\sigma'\gamma'\rho'} \overset{0}{K}_{\delta'}) \overset{0}{K}^{\beta'}] \overset{0}{K}^{\alpha'} \overset{0}{K}^{\gamma'} = 0.$$

Sous les hypothèses faites, les théorèmes de Lehman ([3], « peeling theorem » généralisé, p. 262) sont applicables :

1) le vecteur  $K$  étant isotrope on a, à l'ordre 1 et à l'ordre 2, respectivement (30) et (31) ;

2) si de plus les fonctions  $V, U, \beta, \gamma$  admettent un développement limité à l'ordre 3 et si  $R_{\rho'\sigma'} K^{\rho'} K^{\sigma'} = O(\bar{r}^{-4})$  le tenseur de courbure  $R$  admet le développement limité qui figure dans (32) ;

3) si de plus les fonctions  $V, U, \beta, \gamma$  admettent un développement limité à l'ordre 4 et si  $K^{\mu'} (R_{\mu'\rho'} K^{\rho'} - R_{\mu'\sigma'} K_{\rho'}) = O(\bar{r}^{-5})$  alors  $R$  admet le développement limité qui figure dans (33).

Les composantes de  $K$  s'écrivent dans les coordonnées  $x^{\alpha}$  et  $x^{\alpha'}$  :

$$(34) \quad \begin{cases} K^{\alpha} = (0, 1, 0, 0), & K_{\alpha} = (e^{2\beta}, 0, 0, 0) \\ K^{\alpha'} = (0, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), & K_{\alpha'} = (e^{2\beta}, 0, 0, 0). \end{cases}$$

On démontre que :

$$[\mathbf{R}_{\rho'\sigma'}\mathbf{K}^{\rho'}\mathbf{K}^{\sigma'} = 0(\bar{r}^{-4})] \Leftrightarrow \beta^1 = 0,$$

en effet :

$$(35) \quad \mathbf{R}_{\rho'\sigma'}\mathbf{K}^{\rho'}\mathbf{K}^{\sigma'} = \mathbf{R}_{\alpha\beta}\mathbf{K}^\alpha\mathbf{K}^\beta = \mathbf{R}_{11} = -4 \left[ \frac{\partial\beta}{\partial r} - r \left( \frac{\partial\gamma}{\partial r} \right)^2 \right] r^{-1} \\ = \frac{4\beta^1}{\bar{r}^3} + 0(\bar{r}^{-4})$$

On démontre que :

$$[\mathbf{K}^{\mu'}(\mathbf{R}_{\mu'\rho'}\mathbf{K}_{\sigma'} - \mathbf{R}_{\mu'\sigma'}\mathbf{K}_{\rho'}) = 0(\bar{r}^{-5})] \\ \Leftrightarrow \left[ \beta^1 = 0 \text{ et } \beta^2 + \frac{1}{4}\gamma^2 = 0 \text{ et } \mathbf{U} + \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} + 2\gamma^1 \cot\theta = 0 \right]$$

Pour cela, on désigne par  $\mathbf{T}_{\rho'\sigma'}$  le tenseur antisymétrique

$$\mathbf{K}^{\mu'}(\mathbf{R}_{\mu'\rho'}\mathbf{K}_{\sigma'} - \mathbf{R}_{\mu'\sigma'}\mathbf{K}_{\rho'})$$

Dans le système de coordonnées  $x^\alpha$  on a en tenant compte de (34)

$$\mathbf{T}_{\alpha\beta} = \mathbf{K}^\lambda[\mathbf{R}_{\lambda\alpha}\mathbf{K}_\beta - \mathbf{R}_{\lambda\beta}\mathbf{K}_\alpha] = \mathbf{R}_{1\alpha}\mathbf{K}_\beta - \mathbf{R}_{1\beta}\mathbf{K}_\alpha.$$

De plus,  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0 \Rightarrow \mathbf{T}_{\alpha\beta} = 0$ .

Les composantes non nulles ne peuvent être que  $\mathbf{T}_{10}$ ,  $\mathbf{T}_{20}$ ,  $\mathbf{T}_{30}$ . On a

$$(36) \quad \mathbf{T}_{10} = \mathbf{R}_{11}e^{2\beta}, \quad \mathbf{T}_{20} = \mathbf{R}_{12}e^{2\beta}, \quad \mathbf{T}_{30} = \mathbf{R}_{13}e^{2\beta} = 0 \quad \text{car} \quad \mathbf{R}_{13} = 0.$$

D'où :

$$\mathbf{T}_{\rho'\sigma'} = \left( \frac{\partial x^1}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^0}{\partial x^{\sigma'}} - \frac{\partial x^0}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{\sigma'}} \right) \mathbf{T}_{10} + \left( \frac{\partial x^2}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^0}{\partial x^{\sigma'}} - \frac{\partial x^0}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{\sigma'}} \right) \mathbf{T}_{20}.$$

On a pour  $i = 0, 1$   $\frac{\partial x^i}{\partial x^{\rho'}} = 0(1)$  et  $\frac{\partial x^2}{\partial x^{\rho'}} = 0(r^{-1})$  d'où en tenant compte de (36)

$$[\mathbf{T}_{\rho'\sigma'} = 0(\bar{r}^{-5})] \Leftrightarrow [\mathbf{R}_{11} = 0(r^{-5}) \text{ et } \mathbf{R}_{12} = 0(r^{-4})].$$

Or d'après (35)

$$[\mathbf{R}_{11} = 0(r^{-5})] \Leftrightarrow \left[ \beta^1 = 0 \text{ et } \beta^2 = -\frac{1}{4}\gamma^2 \right].$$

De plus on a :

$$\mathbf{R}_{12} = -2r^{-2} \left\{ [r^4 e^{2(\gamma-\beta)} \mathbf{U}_{11}]_1 - 2r^2 \left[ \frac{\partial^2\beta}{\partial r \partial\theta} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial r \partial\theta} \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \frac{\partial\gamma}{\partial r} \frac{\partial\gamma}{\partial\theta} - 2 \frac{\partial\beta}{\partial\theta} r^{-1} - 2 \frac{\partial\gamma}{\partial r} \cot\theta \right] \right\}.$$

Le développement limité de  $R_{12}$ , compte tenu de  $\beta^1 = 0$ , est :

$$R_{12} = \left( \overset{2}{U} + \frac{\overset{1}{\partial\gamma}}{\overset{1}{\partial\theta}} + 2\overset{1}{\gamma} \cot \theta \right) r^{-2} + 0(r^{-4})$$

Compte tenu de ce qui précède, on a :

$$[R_{11} = 0(r^{-5}) \text{ et } R_{12} = 0(r^{-4})]$$

$$\Leftrightarrow \left[ \overset{1}{\beta} = 0 \text{ et } \overset{2}{\beta} = -\frac{1}{4}\overset{1}{\gamma}^2 \text{ et } \overset{2}{U} = -\frac{\overset{1}{\partial\gamma}}{\overset{1}{\partial\theta}} - 2\overset{1}{\gamma} \cot \theta \right]$$

c) Toujours dans l'hypothèse où  $\overset{1}{U} = 0$ , pour démontrer que les espaces-temps  $(\mathcal{V}_4, g)$  dont le comportement asymptotique du tenseur métrique est affaiblie, c'est-à-dire satisfait à :

$$(37) \quad \overset{-1}{V} - 1 \neq 0,$$

sont distincts des espaces-temps étudiés jusqu'à présent donc tels que :

$$(38) \quad \overset{-1}{V} - 1 = 0,$$

il suffit de prouver qu'il n'existe pas de changement  $\varphi$  de coordonnées de Bondi globalement défini sur  $\Omega$  qui annule la transformée de  $\overset{-1}{V} - 1$ . On peut aussi faire la démonstration suivante. Si les espaces-temps ne sont pas distincts, soit  $h$  la transformation de coordonnées définies sur  $\Omega$  par

$$x^\alpha = x^\alpha(x^{\bar{\beta}}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} \neq 0,$$

soit  $\varphi$ , si elle existe, la transformation de coordonnées de Bondi en coordonnées de Bondi qui annule la transformée de  $\overset{-1}{V} - 1$  et est définie sur  $\Omega$  par :

$$x^\rho = x^\rho(x^\alpha),$$

soit  $l$  la transformation de coordonnées définie sur  $\Omega$  par :

$$x^{\bar{\sigma}} = x^{\bar{\sigma}}(x^\rho) \quad \text{et} \quad \frac{\partial\psi}{\partial u} = 0$$

La transformation de coordonnées  $l \circ \varphi \circ h$  définie sur  $\Omega$  appartient au groupe de transformations qui conservent  $\lim_{\bar{r}=\infty} g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ . Ces transformations conservent également l'ordre du développement limité du tenseur de Ricci et de la courbure scalaire  $\mathcal{R}$  par exemple. Pour prouver c) il suffit donc de vérifier que suivant l'hypothèse (37) ou (38) faite :

1) dans le premier cas, l'ordre de  $R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$  relativement à  $\bar{r}$  diffère. En effet :

$$R_{00} = -\frac{\partial \overset{-1}{V}}{\partial u} r^{-1} + 0(r^{-2}), \text{ d'où l'on tire } R_{\bar{0}\bar{0}} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\bar{0}}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\bar{0}}} R_{\rho\sigma} = 0(r^{-1});$$

si  $\bar{V}^{-1} - 1 = 0$  on a  $R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0(\bar{r}^{-2})$ , si  $\frac{\partial \bar{V}^{-1}}{\partial u} \neq 0$  on a  $R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0(\bar{r}^{-1})$ ,

2) dans le second cas l'ordre de la courbure scalaire  $\mathcal{R}$  courbure scalaire relativement à  $\bar{r}$  diffère.

Dans le système de coordonnées  $x^a$  on a :

$$\mathcal{R} = 2g^{01}R_{01} + g^{11}R_{11} + 2g^{12}R_{12} + g^{22}R_{22} + g^{33}R_{33},$$

où

$$g^{01} = e^{-2\beta}, \quad g^{11} = Ve^{-2\beta}r^{-1}, \quad g^{12} = Ue^{-2\beta}, \\ g^{22} = -e^{-2\beta}r^{-2}, \quad g^{33} = -e^{2\gamma}r^{-2} \sin^2 \theta$$

Le développement limité de  $R_{11}$  est donné par (35). Ceux de  $R_{01}$ ,  $R_{22}$  et  $R_{33}$  sont en tenant compte de  $\frac{\partial \beta}{\partial u} = 0$ ,

$$R_{01} = \left[ -4 \frac{\partial \beta}{\partial \theta} - 2 \frac{\partial \gamma}{\partial u} \right] r^{-3} + 0(r^{-4}),$$

$$R_{22} = [\bar{V}^{-1} - 1] + 0(r^{-1}), \quad R_{33} = (\bar{V}^{-1} - 1) \sin^2 \theta + 0(r^{-1}),$$

d'où le développement limité du scalaire  $\mathcal{R}$  :  $\mathcal{R} = 2(1 - \bar{V}^{-1})r^{-2} + 0(r^{-3})$ .

Donc si

$$\bar{V}^{-1} - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0 \quad \text{on a} \quad \mathcal{R} = 0(\bar{r}^{-3}),$$

si

$$\bar{V}^{-1} - 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \beta}{\partial u} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{V}^{-1}}{\partial u} = 0 \quad \text{on a} \quad \mathcal{R} = 0(\bar{r}^{-2}).$$

Je tiens à remercier M. Papapétrou et M. Madore pour de fructueuses discussions.

## RÉFÉRENCES

- [1] H. BONDI, M. VAN DER BURG et A. METZNER, *Proc. Roy. Soc.*, t. A **269**, 1962, p. 21.  
 [2] R. SACHS, *Physical Review*, Vol. **128**, n° 6, 1962, p. 2851.  
 [3] E. LEHMAN, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, Vol. IX, n° 3, 1968, p. 213.  
 [4] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes de transformations*. Dunod, Paris, p. 12.

(Manuscrit reçu le 15 janvier 1975)