ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

WALTER PETRY

Über eine Lorentzinvariante Gravitationstheorie

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, nº 4 (1975), p. 277-290
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_4_277_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXII, n° 4, 1975, p. 277-290.

Section A :
Physique théorique.

Über eine Lorentzinvariante Gravitationstheorie

von

Walter PETRY

Mathematisches Institut der Universität,
4000, Düsseldorf, Moorenstrasse 5

ABSTRACT. — A Lorentz invariant gravitational theory and a Lorentz invariant Hamiltonian for a particle in the gravitational field are developed and the equations of motion are studied. The theory is applied to the three well known tests and it is in full agreement with the experimental results. In particular, for light, grazing the sun, the theory gives, a deflection of 2.19″ (experimentally expected ≈ 2.2″) in contrast to the general theory of relativity giving 1.75″.

1. EINLEITUNG

Es wird eine lineare lorentzinvariante Gravitationstheorie aufgestellt. Ausgehend von dem allgemeinen Postulat des Verfassers [*10*] über Teilchen mit Spin wird ferner eine lorentzinvariante Hamiltonfunktion für ein Teilchen im Gravitationsfeld angegeben, die linear vom Gravitationsfeld abhängt und noch zwei (dimensionslose) Parameter A und B enthält. Hieraus werden die Bewegungsgleichungen für einen Körper im Gravitationsfeld hergeleitet. Der eine der Parameter wird so festgelegt, daß die Bewegungsgleichungen im stationären Fall in erster Näherung die Newtonschen Bewegungsgleichungen ergeben $\left(\text{es ergibt sich } A = \dfrac{2}{1 - B}\right)$.

Die « Eigenzeit » τ im Gravitationsfeld ergibt sich in Abhängigkeit des Parameters B aus der Hamiltonfunktion und dem kanonischen Formalismus. Es zeigt sich eine formale Analogie zwischen der « Eigenzeit » τ und dem Linienelement der « allgemeinen Relativitätstheorie » von Einstein [*4*] (siehe z. B. auch [*7*] [*18*]).

Die Theorie ergibt für die Rotverschiebung der Spektrallinien, die von demselben Atom in verschiedenen Gravitationsfeldern herrühren, dieselbe Relation wie die « allgemeine Relativitätstheorie ». Ferner bewirkt das Gravitationsfeld — ebenso wie in der « allgemeinen Relativitätstheorie » — eine Perihelbewegung der Planeten und eine Ablenkung der Lichtstrahlen. Diese beiden Effekte sind aber abhängig von dem noch freien Parameter B in der Hamiltonfunktion. Wählt man $B = \frac{3}{5}$ (d. h. $A = 5$), dann ergibt sich in erster Näherung dieselbe Perihelbewegung wie in der « allgemeinen Relativitätstheorie ». Die Bewegungsgleichungen sind nun eindeutig festgelegt. Für die Ablenkung der Lichtstrahlen, die den Sonnenrand passieren, erhält man 2.19″, was mit den Experimenten sehr gut übereinstimmt, während für die Lichtablenkung nach der « allgemeinen Relativitätstheorie » der zu kleine Wert von 1.75″ resultiert (die Experimente liefern einen Wert um 2.2″; vgl. hierzu z. B. [*5*] [*6*] [*12*]).

Verallgemeinerungen der Newton'schen Gravitationstheorie wurden von mehreren Autoren studiert, wie z. B. Nordström [*9*], Whitehead, Tonnelat [*15*] [*16*], Belinfante [*1*], Birkhoff [*2*] [*3*], Thirring [*14*], Rosen [*11*], Gupta [*8*] usw. (vgl. hierzu auch Synge [*13*] für weitere Literaturhinweise). Die meisten Verfasser setzen im Gegensatz zu Einstein [*4*] die Homogenität von Zeit und Raum voraus (s. z. B. auch [*17*]). Einsteins allgemeine Relativitätstheorie gilt als die am meisten theoretisch und experimentell fundierte Theorie. Man vergleiche hierzu auch die Interpretation der Einstein'schen Gravitationstheorie von Fock [*7*].

Der neue Beitrag unserer Theorie gegenüber vorhandenen Theorien ist das Postulat über Teilchen mit Spin, das kürzlich vom Verfasser auch mit Erfolg auf Teilchen mit Spin im elektromagnetischen Feld angewandt wurde [*10*]. Aus diesem Postulat erhält man eine lorentzinvariante Hamiltonfunktion für ein Teilchen mit Spin im Gravitationsfeld V_{ij}, die linear von V_{ij} abhängt. Die Gleichungen für das Gravitationsfeld V_{ij} sind ein Spezialfall allgemeinerer Gleichungen, die bereits von mehreren Autoren studiert wurden (vgl. z. B. [*1*] [*2*] [*3*] [*11*] [*15*]).

Die hier entwickelte Gravitationstheorie ist im Gegensatz zur allgemeinen Relativitätstheorie und ebenso zu allen anderen bekannten Gravitationstheorien in voller Übereinstimmung mit den Experimenten. Insbesondere ist sie die einzige Theorie, die für die Lichtablenkung am Sonnenrand einen Wert um 2.19″ ergibt (experimenteller Wert $\approx 2.2''$). Von der mathematischen und logischen Struktur ist sie einfacher als andere Theorien. Sie behält die Homogenität von Raum und Zeit bei und ordnet sich somit ein in die bekannten Theorien der Physik, wie z. B. die Maxwellschen Gleichungen. Die hier aufgestellte Gravitationstheorie reiht sich somit vollkommen ein in die Interpretationen über Raum und Zeit von Fock [*7*].

2. AUFSTELLUNG DER GLEICHUNGEN

In einer früheren Arbeit [*10*] hat der Verfasser das folgende Postulat für Teilchen mit Spin formuliert (die Arbeit enthält eine heuristische Betrachtung zu diesem Postulat) : « Jede Bewegung eines Teilchens wird charakterisiert durch Angabe von zehn Größen, nämlich des vierdimensionalen Ortsvektors $(x_i) = (x, y, z, ict)$ und eines schiefsymmetrischen Tensors (x_{ij}). Die kanonisch konjugierten Größen hiervon sind der Impuls (p_i) und der Spin (p_{ij}) des Teilchens.

Die Energiegleichung eines Teilchens ohne Feld wird durch die folgende Beziehung beschrieben

$$\left(\frac{\mathrm{H}_0}{c}\right)^2 = -\,p_\alpha^2 - \delta p_{\alpha\beta}^2\,, \tag{1}$$

wobei δ eine das Teilchen charakterisierende Größe ist und $\mathrm{H}_0 = m_0 . c^2$. Ferner wird neben der Masse m_0 durch die Relation (vgl. [*10*])

$$(m)^2 = (m_0)^2 + \frac{\delta}{c^2}\, p_{\alpha\beta}^2 \tag{1'}$$

eine weitere invariante Ruhmasse m eingeführt ».

Wir werden nun ein Teilchen in einem Gravitationsfeld betrachten und machen die Annahme, daß das Gravitationsfeld durch einen symmetrischen Tensor $(\mathrm{V}_{ij}(x_1, \ldots, x_4))$ beschrieben werden kann, auf dessen Berechnung später eingegangen werden soll. Unter Beachtung von (1) machen wir für die Hamiltonfunktion den folgenden Ansatz (in dem das Gravitationsfeld V_{ij} linear vorkommt)

$$\left(\frac{\mathrm{H}_0}{c}\right)^2 = -\,p_\alpha^2 - \delta p_{\alpha\beta}^2 + \mathrm{A} p_\alpha p_\beta (\mathrm{V}_{\alpha\beta} - \mathrm{B}\mathrm{V}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})\,, \tag{2}$$

wobei A und B noch geeignet zu wählende Konstanten sind. (Es sei bemerkt, daß man noch eine Wechselwirkung zwischen Spin und Gravitationsfeld berücksichtigen könnte von der Form $\mathrm{C}\cdot p_{\alpha\beta}(\mathrm{V}_{\alpha\beta} - \mathrm{D}\mathrm{V}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})$, in der das Feld ebenfalls linear vorkommt).

Die Bewegungsgleichungen eines Teilchens ergeben sich aus den Gleichungen (vgl. [*10*])

$$\frac{dx_i}{d\tau} = -\,\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial p_i}\,, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial x_i}\,, \tag{3}$$

$$\frac{dx_{ij}}{d\tau} = -\,\frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial p_{ij}}\,, \qquad \frac{dp_{ij}}{d\tau} = \frac{\partial \mathrm{H}_0}{\partial x_{ij}}\,, \tag{4}$$

wobei τ dei « Eigenzeit » bedeutet.

Bevor wir aus (2), (3) und (4) die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im Gravitationsfeld herleiten, sollen die Gleichungen für das Gravitationsfeld $(V_{ij}(x_1, \ldots, x_4))$ aufgestellt werden. Bekanntlich wird das Gravitationsfeld (V_{ij}) durch den symmetrischen Materietensor (T_{ij}) festgelegt. Wir machen für das Gravitationsfeld den folgenden naheliegenden Ansatz

$$\frac{\partial^2 V_{ij}}{\partial x_\alpha^2} - \mu^2 V_{ij} = \varkappa T_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, 4) \tag{5}$$

mit

$$\varkappa := \frac{4\pi k}{c^4} \tag{6}$$

Hierbei ist k die Gravitationskonstante und μ eine noch beliebige Konstante. Bei den späteren Anwendungen wird $\mu = 0$ gesetzt. Gleichung (5) ist ein Spezialfall allgemeinerer Gleichungen, die bereits von mehreren Autoren studiert wurden, vgl. z. B. [*1*] [*2*] [*3*] [*11*] [*14*] [*15*].

Für einen großen Teil der zu betrachtenden Probleme kann man für den Materietensor setzen

$$T_{ij} := -\rho \frac{dx_i}{d\tau} \frac{dx_j}{d\tau} - p_0 \delta_{ij}, \tag{7}$$

wobei $\rho(x_1, \ldots, x_4)$ die Dichte und $p_0(x_1, \ldots, x_4)$ der Druck der Materie bedeuten.

3. DIE BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

Es werden nun aus (2), (3) und (4) die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im Gravitationsfeld hergeleitet. Aus (2) folgt wegen V_{ij} symmetrisch

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_i} = -\frac{(1 + ABV_{\gamma\gamma})p_i - AV_{i\alpha}p_\alpha}{m_0}, \qquad \frac{\partial H_0}{\partial x_i} = \frac{A}{2m_0} p_\alpha p_\beta \frac{\partial}{\partial x_i}(V_{\alpha\beta} - BV_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta})$$

$$\frac{\partial H_0}{\partial p_{ij}} = -\delta \frac{p_{ij}}{m_0}, \qquad \frac{\partial H_0}{\partial x_{ij}} = 0.$$

Somit entstehen mittels (3), (4) die Bewegungsgleichungen

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{(1 + ABV_{\gamma\gamma})p_i - AV_{i\alpha}p_\alpha}{m_0}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{A}{2m_0} p_\alpha p_\beta \frac{\partial}{\partial x_i}(V_{\alpha\beta} - BV_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) \tag{8}$$

$$\frac{dx_{ij}}{d\tau} = \delta \frac{p_{ij}}{m_0}, \qquad \frac{dp_{ij}}{d\tau} = 0. \tag{9}$$

Aus der letzten Gleichung folgt, daß der Spin (p_{ij}) eine Konstante der Bewegung ist; d. h. die Masse m ist nach (1') ebenso wie m_0 eine Konstante der Bewegung.

Aus den Gleichungen (8) erhält man dann die Bewegung des Teilchens.

Um aus (8) das Kraftgesetz herzuleiten muß man aus der ersten Gleichung von (8) p_i als Funktion von $\left(\frac{dx_\alpha}{d\tau}\right)$ und $(V_{\alpha\beta})$ bestimmen und in die zweite Gleichung von (8) einsetzen. Führt man die symmetrischen Matrizen

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & \dots & V_{14} \\ \vdots & & \\ V_{41} & \dots & V_{44} \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & & \bigcirc & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \bigcirc & & & 1 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren

$$\frac{dx}{d\tau} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{d\tau} \\ \vdots \\ \frac{dx_4}{d\tau} \end{pmatrix}, \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_4 \end{pmatrix}$$

ein, dann lauten die Gleichungen (8)

$$(10) \qquad \frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{m_0}((1 + ABV_{\gamma\gamma})I - AV))p, \qquad \frac{dp}{d\tau} = \frac{A}{2m_0} \nabla((V - BV_{\gamma\gamma}I)p, p),$$

wobei $(\,.\,,\,.\,)$ das Skalarprodukt in R^4 bedeutet und ∇ der Gradient bezüglich x, der auf $V - BV_{\gamma\gamma}I$ angewendet wird. Aus der ersten Gleichung folgt

$$(11) \qquad p = m_0((1 + ABV_{\gamma\gamma})I - AV)^{-1} \frac{dx}{d\tau},$$

und somit erhalten wir durch Einsetzen

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{d\tau}\left(((1 + ABV_{\gamma\gamma})I - AV)^{-1} \frac{dx}{d\tau}\right) \\ & \qquad = \frac{A}{2} \nabla\Big((V - BV_{\gamma\gamma}I)((1 + ABV_{\gamma\gamma})I - AV)^{-1} \frac{dx}{d\tau}, \\ & \qquad\qquad ((1 + ABV_{\gamma\gamma})I - AV)^{-1} \frac{dx}{d\tau}\Big) \end{aligned} \right.$$

Dies ist die allgemeine Bewegungsgleichung, wobei die Bewegung als Funktion der Eigenzeit τ bestimmt wird. Man erkennt, daß hierin die Massen m und m_0 nicht vorkommen (träge Masse = schwere Masse).

Bei der Behandlung von Problemen interessiert aber die Bewegung als Funktion der Systemzeit t. Man erhält den Zusammenhang zwischen t und τ, indem man (11) in (2) einsetzt unter Beobachtung von (1'). Es entsteht durch einfache Rechnung die Beziehung

$$(13) \qquad -\left(\frac{dx}{dt}, ((1 + ABV_{\gamma\gamma})I - AV)^{-1} \frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 c^2 \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2.$$

Die so erhaltenen Gleichungen (8), (9), (12), (13), welche die Bewegung eines Teilchens im Gravitationsfeld festlegen, sind infolge des Auftretens der Matrix $((1 + \mathrm{ABV}_{\gamma\gamma})\mathrm{I} - \mathrm{AV})^{-1}$ recht kompliziert.

Eine wesentliche Vereinfachung erhält man, wenn man von dem Materietensor (7) mit $p_0 = 0$ ausgeht und voraussetzt, daß die das Gravitationsfeld erzeugende Materie im Inertialsystem ruht. Aus (7) folgt dann

$$\mathrm{T}_{ij} = \begin{cases} \rho c^2, & i = j = 4 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases} \tag{14}$$

und somit

$$\mathrm{V}_{ij} = \begin{cases} \phi, & i = j = 4 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \tag{15}$$

wobei gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\phi - \mu^2\phi = \varkappa\rho c^2. \tag{16}$$

Ein Vergleich von (16) mit der Poissonschen Gleichung der Newtonschen Theorie

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{4\pi k\rho}{c^2}$$

für das Newtonpotential φ ergibt in erster Näherung ($\mu = 0$) im stationären Fall

$$\phi = \varphi.$$

Die Gleichungen (8), (12), (13) haben dann die Gestalt

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{(1 + \mathrm{AB}\phi - \mathrm{AV}_{ii})p_i}{m_0}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = \frac{\mathrm{A}}{2m_0}p_\alpha^2\frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{V}_{\alpha\alpha} - \mathrm{B}\phi), \tag{8'}$$

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dfrac{dx_i}{d\tau}}{1 + \mathrm{AB}\phi - \mathrm{AV}_{ii}}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{1 + \mathrm{AB}\phi - \mathrm{AV}_{\alpha\alpha}}\right)\left(\frac{dx_\alpha}{d\tau}\right)^2, \tag{12'}$$

$$-\frac{\left(\dfrac{dx_\alpha}{dt}\right)^2}{1 + \mathrm{AB}\phi - \mathrm{AV}_{\alpha\alpha}} = \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 c^2\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2. \tag{13'}$$

Die Relation (13′) zeigt eine gewisse formale Ähnlichkeit mit dem Linienelement in der « allgemeinen Relativitätstheorie »; hier ist die « Eigenzeit » τ aber lorentzinvariant. Betrachtet man in einem schwachen Gravitationsfeld ϕ, Körper, die sich langsam bewegen und beachtet $d\tau \approx dt$ (nach (13′)) und $|\phi| \ll 1$, dann folgt aus (12′) in erster Näherung für $i = 1, 2, 3$

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} \approx -\frac{\mathrm{A}(1 - \mathrm{B})}{2}c^2\frac{\partial\phi}{\partial x_i} \approx -\frac{\mathrm{A}(1 - \mathrm{B})}{2}c^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}.$$

Da diese Gleichungen mit den Newtonschen Bewegungsgleichungen identisch sein müssen, erhält man

$$A = \frac{2}{1 - B} \tag{17}$$

Die Bewegungsgleichungen (12'), (13'), zusammen mit (15) und (16) (mit $\mu = 0$) sind durch (17) bis auf die Konstante B eindeutig festgelegt.

Betrachtet man ein stationäres Gravitationsfeld, d. h. ϕ hängt nicht von t ab, so entsteht wegen (17) aus (12') mit $i = 4$

$$\frac{1}{1 - 2\phi}\frac{dt}{d\tau} = \alpha, \tag{18}$$

wobei α eine Konstante ist. Aus (18) und (13') erhält man

$$\alpha^2\left(1 - 2\phi - \frac{(1 - 2\phi)^2}{1 + \frac{2B}{1 - B}\phi}\frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2\right) = \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 . \tag{19}$$

4. ZENTRALSYMMETRISCHES GRAVITATIONSFELD

Für eine punktförmige Massenverteilung erhält man aus (16) mit $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$

$$\phi = -\frac{K}{r}e^{-\mu r}, \tag{20}$$

wobei $K = kM/c^2$ gesetzt ist und M die Masse des Körpers bedeutet, der das Gravitationsfeld erzeugt. Innerhalb unseres Sonnensystems kann bekanntlich $\mu = 0$ gesetzt werden; d. h. wir setzen im folgenden

$$\phi = -\frac{K}{r}. \tag{20'}$$

Wir werden nun die Bewegungsgleichungen näher untersuchen. Setzt man $w = (x_1, x_2, x_3)$, dann kann man die Gleichungen (12') für $i = 1, 2, 3$ in der Form

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1 + \frac{2B}{1 - B}\phi}\frac{dw}{d\tau}\right) = f\left(r, \frac{dx_\alpha}{d\tau}\right)\frac{w}{r} \tag{21}$$

schreiben, wobei gesetzt ist

$$f\left(r, \frac{dw}{d\tau}\right) = \frac{K}{r^2}\left(-\frac{B}{1 - B}\frac{1}{\left(1 + \frac{2B}{1 - B}\phi\right)^2}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{dx_j}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{(1 - 2\phi)^2}\left(\frac{dx_4}{d\tau}\right)^2\right).$$

Aus (21) entsteht durch vektorielle Multiplikation mit w

$$\left(\frac{d}{d\tau}\frac{1}{1+\frac{2\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}\phi}\frac{dw}{d\tau}\times w\right)=\left(\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{1+\frac{2\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}\phi}\frac{dw}{d\tau}\right)\right)\times w=0. \tag{22}$$

Da die Bewegung bekanntlich in einer Ebene erfolgt, kann man Polarkoordinaten (r, φ) einführen. Aus (22) und (18) entsteht

$$\frac{1-2\phi}{1+\frac{2\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}\phi}r^2\dot{\varphi}=b. \tag{23 a}$$

Hierin ist b eine Konstante und « · » bedeutet die Ableitung nach t. (23a) stellt in erster Näherung das bekannte zweite Keplersche Gesetz dar. Aus (19) erhält man durch eine elementare Umformung und durch Einführung von Polarkoordinaten

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2=c^2\frac{1-\left(\frac{m}{m_0}\right)^2/\alpha^2-2\phi}{(1-2\phi)^2}\left(1+\frac{2\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}\phi\right). \tag{23 b}$$

Setzt man (23 a) in (23 b) ein, dann entsteht

$$\dot{r}^2=\left(-\frac{b^2}{r^2}\left(1+\frac{2\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}\phi\right)+c^2\left(1-\left(\frac{m}{m_0}\right)^2/\alpha^2-2\phi\right)\right)\frac{1+\frac{2\mathrm{B}}{1-\mathrm{B}}\phi}{(1-2\phi)^2}. \tag{23 c}$$

Mit der Substitution

$$r=\frac{1}{\rho}$$

erhält man aus (23 a) und (23 c) mit $\phi=-\frac{\mathrm{K}}{r}=-\mathrm{K}\rho$

$$\dot{\varphi}=b\rho^2\frac{1-\frac{2\mathrm{BK}}{1-\mathrm{B}}\rho}{1+2\mathrm{K}\rho}, \tag{24 a}$$

$$\dot{\rho}^2=\rho^4\left(-b^2\rho^2\left(1-\frac{2\mathrm{BK}}{1-\mathrm{B}}\rho\right)\right.$$
$$\left.+c^2\left(1-\left(\frac{m}{m_0}\right)^2/\alpha^2+2\mathrm{K}\rho\right)\right)\frac{1-\frac{2\mathrm{BK}}{1-\mathrm{B}}\rho}{(1+2\mathrm{K}\rho)^2}. \tag{24 b}$$

Aus den Gleichungen (24) entsteht schließlich die Differentialgleichung für die Bahnkurve des Teilchens im Gravitationsfeld

$$\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = -\rho^2 + \frac{c^2}{b^2}\,\frac{1 - \left(\frac{m}{m_0}\right)^2/\alpha^2 + 2\mathrm{K}\rho}{1 - \frac{2\mathrm{BK}}{1-\mathrm{B}}\rho}\,. \tag{25}$$

5. ERGEBNISSE DER THEORIE

In diesem Abschnitt wird die Theorie auf verschiedene Probleme angewendet.

a) Rotverschiebung der Spektrallinien

Wir betrachten im stationären Gravitationsfeld $\phi(r)$ ein ruhendes Atom, das Lichtstrahlen der Frequenz ν emittiert. Da das Feld stationär ist, ist die Frequenz $\nu = \frac{\mathrm{E}}{h}$ eine Konstante der Bewegung. Nach (13′) besteht zwischen der Systemzeit t und der Eigenzeit τ die Relation

$$\frac{1}{d\tau} = \frac{m}{m_0}(1 - 2\phi)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{dt}\,.$$

Da die Frequenz umgekehrt proportional der Änderung der Zeit ist, erhält man hieraus zwischen der Eigenfrequenz ν_e und der Frequenz ν mit der das Teilchen im Feld $\phi(r)$ strahlt die Relation

$$\nu_e = \frac{m}{m_0}(1 - 2\phi)^{\frac{1}{2}}\nu\,.$$

Da die Eigenfrequenz ν_e stets denselben Wert hat, erhalten wir für ein und dasselbe Atom, das im Gravitationsfeld ϕ_1 mit der Frequenz ν_1 bzw. im Gravitationsfeld ϕ_2 mit der Frequenz ν_2 strahlt die Beziehung

$$\nu_1 = \left(\frac{1 - 2\phi_2}{1 - 2\phi_1}\right)^{\frac{1}{2}}\nu_2\,. \tag{26}$$

Wegen $\phi < 0$ erhalten wir aus (26) dieselbe Rotverschiebung der Spektrallinien in starken Gravitationsfeldern wie bei der « allgemeinen Relativitäts-Theorie ».

b) Perihelbewegung

Aus (19) ergibt sich unter der Voraussetzung $\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 \ll c^2$

$$\left(\frac{m}{m_0}\right)^2/\alpha^2 \approx 1 - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 - 2\phi \approx 1 - 2\frac{\mathrm{E}}{m_0 c^2}\,,$$

wobei E die (klassische) Energie des Teilchens im stationären Feld ϕ darstellt. Daher entsteht aus (25) mittels dieser Relation die Differentialgleichung

$$(27) \qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = -\rho^2 + \frac{1}{b^2}\,\frac{2Kc^2\rho + 2\dfrac{E}{m_0}}{1 - \dfrac{2BK}{1-B}\rho}.$$

Diese Differentialgleichung geht wegen $\rho K \ll 1$ in erster Näherung in die Differentialgleichung der Newtonschen Theorie über.

Wegen $\rho K \ll 1$ kann man die Differentialgleichung (27) in zweiter Näherung in der Form schreiben

$$(27') \quad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = -\left(1 - \frac{4BK^2c^2}{b^2(1-B)}\right)\rho^2 + \frac{2Kc^2}{b^2}\left(1 + \frac{2B}{1-B}\cdot\frac{E}{m_0c^2}\right)\rho + 2\frac{E}{m_0b^2}.$$

Die Differentialgleichung (27′) kann explizit gelöst werden. Mit der Anfangsbedingung $\rho(\varphi_0) = \rho_0$ erhält man durch einfache Rechnung

$$(28) \qquad \rho = f + (f^2 + g)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\sqrt{h}(\varphi - \varphi_0) + \arcsin\frac{\rho_0 - f}{(f^2+g)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

wobei gesetzt wurde

$$h := 1 - \frac{4BK^2c^2}{b^2(1-B)}, \qquad f := \frac{Kc^2}{b^2h}\left(1 + \frac{2B}{1-B}\,\frac{E}{m_0c^2}\right), \qquad g := \frac{2E}{m_0b^2h}.$$

Bei der Perihelbewegung entsteht eine ellipsenförmige Bahn, d. h. es existieren $\rho_1 > \rho_2 > 0$, die Nullstelle von

$$(\rho_1 - \rho)\cdot(\rho - \rho_2) = -\rho^2 + 2f\rho + g = 0$$

sind. Somit gilt

$$\rho_1 + \rho_2 = 2f, \qquad -\rho_1\rho_2 = g.$$

Als Anfangsbedingung wählen wir speziell

$$\varphi_0 = 0, \qquad \rho_0 = \rho_1 = f + (f^2 + g)^{\frac{1}{2}},$$

dann folgt aus (28) nach einem vollen Umlauf, d. h. $\rho = \rho_1$ für den Winkel

$$\varphi_1 = 2\pi/\sqrt{h}.$$

Somit entsteht eine Perihelbewegung in Richtung fortschreitender Bewegung um den Winkel

$$(29) \quad \Delta\psi_1 = \varphi_1 - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{h}} - 1\right) \approx 2\pi\frac{2BK^2c^2}{b^2(1-B)} = \frac{4\pi B}{1-B}\,\frac{K^2c^2}{b^2}.$$

Nun gilt für ellipsenförmige Bahnen mit der großen Halbachse a und der numerischen Exzentrizität ε

$$\frac{1}{\rho_2} = a(1 + \varepsilon), \qquad \frac{1}{\rho_1} = a(1 - \varepsilon),$$

und somit

$$\frac{1}{a(1+\varepsilon)} + \frac{1}{a(1-\varepsilon)} = \rho_1 + \rho_2 = 2f \approx \frac{2Kc^2}{b^2},$$

d. h. wir erhalten

$$\frac{Kc^2}{b^2} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}.$$

Ferner ergibt sich nach dem dritten Keplerschen Gesetz

$$K := \frac{kM}{c^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a^3,$$

wobei T die Umlaufszeit bedeutet. Setzt man die beiden letzten Relationen in (29) ein, dann erhält man

$$\Delta\psi_1 = 16 \frac{B}{1-B} \pi^3 \frac{a^2}{c^2T^2(1-\varepsilon^2)}. \tag{29'}$$

Wählt man $B = \frac{3}{5}$, d. h. nach (17)

$$A = 5, \qquad B = \frac{3}{5},$$

dann erhält man in erster Näherung dieselbe Perihelbewegung wie in der « Allgemeinen Relativitätstheorie », d. h.

$$\Delta\psi_1 = 24\pi^3 \frac{a^2}{c^2T^2(1-\varepsilon^2)}, \tag{29''}$$

was bekanntlich die experimentell zu erwartende Perihelbewegung des Merkur gut wiedergibt.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen für einen Körper im Gravitationsfeld sind nun eindeutig definiert; sie haben unter der Voraussetzung (14) die folgende Form

$$\left(\frac{H_0}{c}\right)^2 = -\delta p^2_{\alpha\beta} - p_\alpha p_\beta(\delta_{\alpha\beta} + 3\phi\delta_{\alpha\beta} - 5V_{\alpha\beta}), \tag{2'}$$

$$\frac{dx_i}{d\tau} = \frac{(1 + 3\phi - 5V_{ii})p_i}{m_0}, \qquad \frac{dp_i}{d\tau} = -\frac{1}{2m_0} p_\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_i}(1 + 3\phi - 5V_{\alpha\alpha}), \tag{8''}$$

$$(12'') \qquad \frac{d}{d\tau} \frac{\dfrac{dx_i}{d\tau}}{1 + 3\phi - 5V_{ii}} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx_\alpha}{d\tau}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{1 + 3\phi - 5V_{\alpha\alpha}}\right),$$

$$(13'') \qquad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 \left(\frac{m}{m_0}\right)^2 c^2 = - \frac{\left(\dfrac{dx_\alpha}{dt}\right)^2}{1 + 3\phi - 5V_{\alpha\alpha}}.$$

c) LICHTABLENKUNG

Für Licht gilt $m = 0$. Wir betrachten einen Lichtstrahl, der aus dem Unendlichen kommt, an einem Gravitationszentrum im Abstand r_1 vorbeizieht und ins Unendliche weiterläuft.

Die Differentialgleichung (25) geht in diesem Fall über in die Gleichung $\left(\text{mit } B = \dfrac{3}{5}\right)$

$$(30) \qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = - \rho^2 + \frac{c^2}{b^2}\frac{1 + 2K\rho}{1 - 3K\rho}.$$

Analog wie beim Studium der Perihelbewegung entsteht hieraus wegen $\rho K \ll 1$

$$(30') \qquad \left(\frac{d\rho}{d\varphi}\right)^2 = - \rho^2 + \frac{5Kc^2}{b^2}\rho + \frac{c^2}{b^2}.$$

Als Anfangspunkt wählen wir $\varphi_0 = 0$, $r_0 = r(\varphi_0) = \infty$, d. h. $\rho_0 = 0$. Mit den Abkürzungen

$$f := \frac{5Kc^2}{2b^2}, \qquad g := \frac{c^2}{b^2}$$

lautet die Lösung von (30')

$$(31) \qquad \rho = f + (f^2 + g)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\varphi + \arcsin \frac{-f}{(f^2 + g)^{\frac{1}{2}}}\right).$$

In dem Punkt $r_1 = r(\varphi_1)$, der dem Gravitationszentrum am nächsten ist, gilt $\left(\dfrac{dr}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = 0$ und somit auch $\left(\dfrac{d\rho}{d\varphi}\right)_{\varphi=\varphi_1} = 0$, d. h. nach (30') folgt

$$\rho_1 = f\overset{+}{\scriptstyle(-)}(f^2 + g)^{\frac{1}{2}},$$

wobei das Minuszeichen aus physikalischen Gründen nicht möglich ist. Für den zugehörigen Winkel φ_1 erhält man aus (31)

$$\sin\left(\varphi_1 + \arcsin \frac{-f}{(f^2 + g)^{\frac{1}{2}}}\right) = 1,$$

d. h. es gilt

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \text{arc sin} \frac{f}{(f^2 + g)^{\frac{1}{2}}} .$$

Für den Winkel $\Delta\psi_2$ der Ablenkung des Lichtstrahls erhält man somit

$$\Delta\psi_2 = 2\varphi_1 - \pi = 2 \text{ arc sin} \frac{f}{(f^2 + g)^{\frac{1}{2}}} . \tag{32}$$

In erster Näherung entsteht hieraus wegen $f^2 + g \approx \dfrac{c^2}{b^2}$

$$\Delta\psi_2 \approx 2f \frac{b}{c} = 5 \frac{\mathrm{K}c}{b} .$$

Berücksichtig man hierin noch

$$b \approx r_1^2 \dot{\varphi}_1 = r_1(r_1 \dot{\varphi}_1) \approx r_1 c ,$$

dann entsteht

$$\Delta\psi_2 \approx \frac{5\mathrm{K}}{r_1} = \frac{5k\mathrm{M}}{c^2 r_1} , \tag{32'}$$

was für die Lichtablenkung am Rand der Sonne einen Wert von 2.19″ ergibt. Dieses Ergebnis steht im Gegensatz zur Gravitationstheorie von Einstein [*4*], die einen Wert von 1.75″ ergibt, in vollkommener Übereinstimmung mit den Experimenten (vgl. z. B. [*5*] [*6*] [*12*]).

Aus (13″) folgt für die Bewegung eines Lichtstrahls (wegen $m = 0$) die Beziehung

$$\frac{1}{1 + 3\phi} \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 - \frac{c^2}{1 - 2\phi} \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 = 0 .$$

Berücksichtigt man die bereits erwähnte formale Analogie zwischen der hier eingeführten « Eigenzeit » τ und dem Linienelement in der « allgemeinen Relativitätstheorie » (welche zwischen m und m_0 nicht unterscheidet), so bedeutet die obige Relation nach (13″) in der Interpretation der « allgemeinen Relativitätstheorie », daß Licht eine geodätische Nullinie beschreibt. (Es sei bemerkt, daß in der hier vorgetragenen Theorie für Licht $m = 0$ und $d\tau \neq 0$ ist).

d) LICHTGESCHWINDIGKEIT

Aus (19) erhält man für die Geschwindigkeit v_{L} des Lichtes im Gravitationsfeld ϕ die Beziehung

$$v_{\mathrm{L}} = c\left(\frac{1 + 3\phi}{1 - 2\phi}\right)^{\frac{1}{2}} = c\left(\frac{1 - 3\dfrac{\mathrm{K}}{r}}{1 + 2\dfrac{\mathrm{K}}{r}}\right)^{\frac{1}{2}} \approx c\left(1 - \frac{5}{2}\frac{\mathrm{K}}{r}\right) . \tag{33}$$

Die Lichtgeschwindigkeit nimmt also im Gravitationsfeld *ab*, d. h. $v_L \leqslant c$, während für $r \to \infty$ die Lichtgeschwindigkeit v_L gegen die Vakuumlichtgeschwindigkeit c strebt.

Es sei bemerkt, daß die Lichtgeschwindigkeit v_L bei Annäherung an ein Gravitationszentrum nach (33) stärker abnimmt als es nach der « allgemeinen Relativitätstheorie » der Fall ist, wo man $c \cdot \left(1 - \frac{2K}{r}\right)$ als erste Näherung erhält.

LITERATUR

[*1*] F. J. BELINFANTE, *Phys. Rev.*, t. **98**, 1955, p. 793.
[*2*] G. D. BIRKHOFF, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, t. **29**, 1943, p. 231.
[*3*] G. D. BIRKHOFF, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, t. **30**, 1944, p. 324.
[*4*] A. EINSTEIN, *Ann. d. Phys.*, t. **49**, 1916, p. 769.
[*5*] E. FINLAY-FREUNDLICH, *Zeitschr. f. Astrophys.*, t. **58**, 1964, p. 283.
[*6*] E. FREUNDLICH, H. KLÜBER, A. BRUNN, Abh. d. Preuss. Akad. Wiss., 1931, *Phys. Math. Kl.*, Nr. 1.
[*7*] V. FOCK, *Theorie von Raum, Zeit und Gravitation*. Akademie-Verlag, Berlin, 1960.
[*8*] S. N. GUPTA, *Rev. Mod. Phys.*, t. **29**, 1957, p. 334.
[*9*] G. NORDSTRÖM, *Phys. Zeitschr.*, t. **13**, 1912, p. 1126.
[*10*] W. PETRY, *Eingereicht zur Veröffentlichung.*
[*11*] N. ROSEN, *Phys. Rev.*, t. **57**, 1940, p. 147-150.
[*12*] F. SCHMEIDLER, *Die Naturwiss.*, t. **49**, 1962, p. 463.
[*13*] J. L. SYNGE, *Relativity: The general theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1964.
[*14*] W. THIRRING, *Fortschr. d. Phys.*, t. **7**, 1959, p. 79.
[*15*] M. A. TONNELAT, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **218**, 1944, p. 139.
[*16*] M. A. TONNELAT, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **218**, 1944, p. 305.
[*17*] H. WEYL, *Am. J. Math.*, t. **66**, 1964, p. 591.
[*18*] H. WEYL, *Raum, Zeit und Materie*. Wiss. Buchges., Darmstadt, 1961.

(Manuscrit reçu le 3 mai 1974)