

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ANDRÉ RONVEAUX

MARIE-CLAIRE DUMONT-LEPAGE

RAYMONDE GÉRARD

**Potentiels sphéroïdaux pour l'équation de Schrödinger.
I. Caractérisation d'un état lié**

Annales de l'I. H. P., section A, tome 22, n° 4 (1975), p. 291-304

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1975__22_4_291_0

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Potentiels sphéroïdaux pour l'équation de Schrödinger. I. Caractérisation d'un état lié

par

André RONVEAUX, Marie-Claire DUMONT-LEPAGE (*)
et Raymonde GÉRARD (*)

Physique Mathématique,
Facultés Universitaires N.-D. de la Paix, Namur (Belgique)

RÉSUMÉ. — Des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'obtention d'un état lié pour l'équation de Schrödinger sont obtenues en coordonnées sphéroïdales, au moyen des équations de phase (équations de Riccati). La classe des potentiels envisagés est restreinte aux potentiels dépendant d'une seule variable et de la forme

$$g(\xi) = V(\xi, \eta)(\xi^2 - \eta^2).$$

Ces conditions se réduisent asymptotiquement aux conditions de Jost-Pais et de Calogero établies dans le cas sphérique et peuvent être utiles pour détecter des inversions dans l'introduction des niveaux d'un potentiel sphéroïdal.

ABSTRACT. — Necessary conditions and sufficient conditions in order to insure one bound state of given (l, m) are obtained for spheroidal potentials using the phase approach: the results are valid for potentials $V(\xi, \eta)$ such that $V(\xi, \eta)(\xi^2 - \eta^2)$ is a function only of ξ . These results reduce asymptotically to the conditions of Jost-Pais and Calogero in the spherical case and can be useful to detect inversion in the introduction of levels of a given potential.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Ces recherches ont été entreprises en vue de généraliser, en coordonnées sphéroïdales, des résultats connus en coordonnées sphériques sur l'équation de Schrödinger.

(*) Extrait d'un mémoire présenté aux Facultés Universitaires de Namur, pour l'obtention du grade de licencié en Sciences Mathématiques.

Dans une première partie (I), nous recherchons une *condition nécessaire* et une *condition suffisante* pour l'obtention d'un état lié (potentiel sphéroïdal oblate ou prolata). La condition nécessaire de Jost-Pais [1] et la condition suffisante de Calogero [2] en coordonnées sphériques, généralisées en coordonnées sphéroïdales par Ronveaux [3] dans le cas $l = m = 0$, sont étendues au cas le plus général $l, m \neq 0$.

Ensuite (II), nous donnons plusieurs limites supérieures et inférieures au nombre d'états liés. Ce problème se ramène à compter le nombre de pôles des solutions d'une équation de Riccati dans un intervalle donné. Les bornes nouvelles ainsi obtenues en coordonnées sphéroïdales se réduisent asymptotiquement à celles de Calogero [4] en coordonnées sphériques.

Enfin, dans une troisième partie (III), nous généralisons les travaux de Bose [5] et Lemieux-Bose [6] sur les potentiels solubles. Nous construisons tous les *potentiels* prolates pour lesquels l'équation de Schrödinger est soluble par des fonctions hypergéométriques ou des fonctions de Heun confluentes [7].

1. SÉPARATION DE VARIABLES POUR L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER EN COORDONNÉES PROLATES

Les coordonnées elliptiques planes sont définies par [8] :

$$\xi = \frac{r_1 + r_2}{2f} \quad 1 \leq \xi \leq \infty \quad (1)$$

$$\eta = \frac{r_1 - r_2}{2f} \quad -1 \leq \eta \leq +1 \quad (2)$$

où r_1 et r_2 sont les distances respectives du point $M(\xi, \eta)$ à deux points fixes F_1 et F_2 distants d'une longueur $2f$. F_1 et F_2 sont les foyers des familles d'ellipses $\xi = \text{constante}$ et d'hyperboles $\eta = \text{constante}$.

Une rotation d'angle ϕ autour de l'axe de symétrie F_1F_2 donne le système de coordonnées *prolates* (ξ, η, ϕ) lié aux coordonnées cartésiennes (xyz) par les relations [8] (les axes de symétrie des quadriques engendrées coïncidant avec les axes cartésiens) :

$$\begin{aligned} x &= f\xi\eta \\ y &= f(\xi^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \cos \phi \\ z &= f(\xi^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \sin \phi \end{aligned} \quad (3)$$

Le Laplacien en coordonnées ξ, η, ϕ s'écrit [8] :

$$\nabla^2 \psi(\xi, \eta, \phi) = \frac{1}{f^2(\xi^2 - \eta^2)} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left((1 - \eta^2) \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\xi^2 - \eta^2}{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] \quad (4)$$

L'équation de Schrödinger à énergie nulle s'écrit : ($\hbar = 1, 2m = 1$)

$$\nabla^2\psi(\xi, \eta, \phi) = V(\xi, \eta, \phi)\psi(\xi, \eta, \phi). \tag{5}$$

Séparons les variables sous la forme :

$$\psi(\xi, \eta, \phi) = R(\xi)S(\eta)\Phi(\phi). \tag{6}$$

Les fonctions d'une variable $R(\xi)$, $S(\eta)$ et $\Phi(\phi)$ sont respectivement solutions des trois équations différentielles :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left((\xi^2 - 1) \frac{dR(\xi)}{d\xi} \right) - \left[f^2 g_p(\xi) + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} + \lambda_{m,l} \right] R(\xi) &= 0 \tag{7} \\ \frac{d}{d\eta} \left((1 - \eta^2) \frac{dS(\eta)}{d\eta} \right) - \left[\frac{m^2}{1 - \eta^2} - \lambda_{m,l} \right] S(\eta) &= 0 \tag{8} \\ \frac{d^2\Phi(\phi)}{d\phi^2} &= m^2\Phi(\phi) \tag{9} \end{aligned} \right.$$

$\lambda_{m,l}$ et m^2 sont les constantes de séparations et $g_p(\xi)$, le « potentiel réduit », est lié au potentiel $V(\xi, \eta, \phi)$ par la relation :

$$V(\xi, \eta, \phi) \cdot (\xi^2 - \eta^2) \equiv g_p(\xi). \tag{10}$$

Les formes des équations angulaires imposent des restrictions sur les constantes de séparations. La périodicité par rapport à ϕ impose m entier. La solution obligatoirement bornée en $\eta = \pm 1$ sur les demi-axes $(-\infty, F_1)$ et $(F_2, +\infty)$ impose à la constante de séparation $\lambda_{m,l}$ dans l'équation de Legendre associée (8) d'être de la forme :

$$\lambda_{m,l} = l(l + 1). \tag{11}$$

L'équation « radiale » en R qui seule, contient le potentiel réduit $g_p(\xi)$ s'écrit donc :

$$\frac{d}{d\xi} \left[(\xi^2 - 1) \frac{dR}{d\xi} \right] - \left[l(l + 1) + \frac{m^2}{\xi^2 - 1} \right] R = f^2 g_p(\xi) R \tag{12}$$

2. SÉPARATION DE VARIABLES EN COORDONNÉES OBLATES

Une rotation d'angle ϕ autour de l'axe *transverse* donne le système de coordonnées *oblates* (ξ, η, ϕ) lié aux coordonnées cartésiennes par des relations analogues à (3) :

$$\begin{aligned} x &= f\xi\eta \sin \phi \\ y &= f(\xi^2 - 1)^{1/2}(1 - \eta^2)^{1/2} \\ z &= f\xi\eta \cos \phi \end{aligned} \tag{13}$$

Le Laplacien en coordonnées oblates s'écrit [9] :

$$\nabla^2 \psi(\xi, \eta, \phi) = \frac{\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}}{f^2(\xi^2 - \eta^2)\xi\eta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\xi\eta\sqrt{\xi^2 - 1}}{\sqrt{1 - \eta^2}} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\xi\eta\sqrt{1 - \eta^2}}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi\eta\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right) \right] \quad (14)$$

Les équations de séparation, obtenues en posant à nouveau :

$$\psi(\xi, \eta, \phi) = R(\xi)S(\eta)\Phi(\phi), \quad (15)$$

donnent les mêmes relations de quantification : m entier, $\lambda_{ml} = l(l + 1)$, et une nouvelle équation radiale :

$$\frac{d}{d\xi} \left[\xi(\xi^2 - 1)^{1/2} \frac{dR(\xi)}{d\xi} \right] + \left[\frac{m^2}{\xi(\xi^2 - 1)^{1/2}} - \frac{l(l + 1)\xi}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} \right] R(\xi) = f^2 g_0(\xi) R(\xi), \quad (16)$$

ou encore :

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \left[\frac{2\xi^2 - 1}{\xi} \right] \frac{dR}{d\xi} + \left[\frac{m^2}{\xi^2} - l(l + 1) \right] R(\xi) = f^2 g_0(\xi) R(\xi) \quad (17)$$

Le potentiel oblate réduit $g_0(\xi)$ est, cette fois, lié au potentiel $V(\xi, \eta, \phi)$ par la relation :

$$g_0(\xi) = \frac{V(\xi, \eta) \cdot \xi(\xi^2 - \eta^2)}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} \quad (18)$$

3. ÉQUATION DE PHASE ET TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE

Les deux équations radiales précédentes sont de la forme :

$$\begin{aligned} [p(x)u'(x)]' + q(x)u(x) &= V(x)u(x), \\ p(x) \geq 0 \quad a \leq x \quad p(a) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Soient $u_i(x)$ $i = 1, 2$, des solutions linéairement indépendantes de l'équation (19) lorsque $V(x)$ est identiquement nul.

Lorsque la solution de l'équation complète ($V \neq 0$) est obtenue par la méthode de variation des constantes :

$$u(x) = C_1(x)u_1(x) + C_2(x)u_2(x), \quad (20)$$

la « phase » :

$$S(x) \equiv \frac{C_2(x)}{C_1(x)}, \quad (21)$$

satisfait l'équation [10] :

$$S'(x) = \frac{dS}{dx} = \frac{V(x)}{p(x)W(x)} [u_1(x) + S(x)u_2(x)]^2 \tag{22}$$

ou $W(x)$ est le Wronskien :

$$W(x) = u_1u_2' - u_2u_1' \tag{23}$$

Afin d'éviter les pôles de la solution $S(x)$, nous recourons à la transformation homographique suivante [10] :

$$U(x) = \frac{S(x)u_2(x)}{u_1(x) + S(x)u_2(x)} \tag{24}$$

L'équation de phase transformée devient (abrégeant en général $f(x)$ par f) :

$$U' = \frac{V}{pW} u_1u_2 - W \frac{U^2 - U}{u_1u_2} \tag{25}$$

Dans la mesure où $U = 1$ ($0 \leq U \leq 1$) caractérise le premier pôle de S , l'équation non linéaire précédente est aisément bornée par deux équations linéaires, utilisant les majorations :

A. $U^2 - U \leq 0 \quad (0 \leq U \leq 1) \tag{26}$

B. $0 \leq U^2 \tag{27}$

4. ÉTATS LIÉS A ÉNERGIE NULLE

Afin de poursuivre l'étude des solutions de l'équation (19), il est nécessaire d'introduire des hypothèses supplémentaires sur $V(x)$ et $u(x)$:

a) Supposons le potentiel $V(x)$ « attractif » dans un domaine $a \leq x \leq X$, au-delà duquel il est strictement nul (potentiel de portée finie).

On a donc :

$$\begin{cases} V(x) < 0 & a \leq x \leq X \\ V(x) = 0 & X < a \end{cases} \tag{28}$$

b) Imposons à la solution $u(x)$ d'être :

$$\begin{cases} \text{finie en} & x = a, \\ \text{intégrable pour} & x > X. \end{cases} \tag{29}$$

c) Choisissons $u_1(x)$ et $u_2(x)$ de façon telle que :

$$u_1(x)u_2(x) > 0 \quad a \leq x \leq X. \tag{30}$$

Lorsque les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont non oscillantes dans l'intervalle (aX) le choix $u_1u_2 > 0$ est toujours possible. Si de plus $W < 0$, ceci

implique S croissante dans (aX) . Si les fonctions $u_1(x)$ et $u_2(x)$ sont oscillantes, la discussion (non nécessaire dans ce travail) est plus délicate [10] [11] [12].

Les conditions (28), (29) et (30) imposent les conditions suivantes pour

$$\begin{aligned} S(x) & \quad (31) \\ S(x = a) = 0, & \quad u_2(x) \text{ est singulière en } x = a \\ & \quad (p(a) = 0) \\ S(x = X) = \infty, & \quad u_1(x) \text{ est non intégrable sur} \\ & \quad (X \infty) (C_1(X) = 0) \end{aligned}$$

qui se traduisent par des conditions sur $U(x)$:

$$U(x = a) = 0 \quad U(x = X) = 1 \quad (32)$$

Dès lors, un état lié (B. S.) sera caractérisé par une solution de l'équation (19), vérifiant (29) et donc (22) et (31).

L'application de la majoration (26) à l'équation (25) permet d'affirmer, après une intégration élémentaire,

$$\boxed{\text{B. S.} \Rightarrow \int_a^x \left| \frac{V(x)}{p(x)W(x)} \right| u_1(x)u_2(x)dx > 1} \quad (33)$$

Enfin, appliquant la majoration (27) à l'équation (25), on obtient la condition suffisante suivante :

$$\boxed{\frac{u_2(X)}{u_1(X)} \int_a^x \left| \frac{V(x)}{p(x)W(x)} \right| u_1^2(x)dx > 1 \Rightarrow \text{B. S.}} \quad (34)$$

Les conditions d'existence des intégrales restent à étudier dans chaque cas particulier.

A présent, il est permis d'appliquer ces résultats aux équations (12) et (16).

a) *Cas prolate.*

Les conditions (28) s'écrivent :

$$\begin{cases} g_p(\xi) \leq 0 & 1 \leq \xi \leq \xi_0 \\ g_p(\xi) = 0 & \xi > \xi_0 \end{cases} \quad (35)$$

L'équation radiale à potentiel nul est une équation de Legendre associée.

Pour obtenir un Wronskien de signe fixé indépendamment de m et pour que $\frac{g(\xi)}{p(\xi)W(\xi)}$ soit positif, choisissons :

$$\begin{aligned} u_1(\xi) &= P_l^m(\xi) & u_2(\xi) &= (-1)^m Q_l^m(\xi), \\ \left(W &= \frac{1}{1 - \xi^2} \frac{(l + m)!}{(l - m)!} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

d'où

$$S' = \frac{f^2 g_p(\xi)}{(\xi^2 - 1)W} (P_l^m(\xi) + (-1)^m Q_l^m(\xi)S)^2 \tag{37}$$

Les fonctions $P_l^m(\xi)$ et $Q_l^m(\xi)$ n'ont pas de zéros dans $(1, \infty)$ et le produit $u_1(\xi)u_2(\xi)$ est positif dans cet intervalle.

Dès lors, les relations (33) et (34) s'écrivent :

$$\boxed{\begin{aligned} \text{B. S.} &\Rightarrow \frac{(l-m)!}{(l+m)!} (-1)^m \cdot \\ &\int_1^{\xi_0} f^2 |g_p(\xi)| P_l^m(\xi) Q_l^m(\xi) d\xi > 1 \end{aligned}} \tag{38}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{(l-m)! f^2 Q_l^m(\xi_0) (-1)^m}{(l+m)! P_l^m(\xi_0)} \cdot \\ &\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| (P_l^m(\xi))^2 d\xi > 1 \Rightarrow \text{B. S.} \end{aligned}} \tag{39}$$

b) *Cas oblate.*

L'équation radiale à potentiel nul se ramène également à une équation de Legendre associée moyennant la transformation :

$$Z = i(\xi^2 - 1)^{1/2} \quad \text{ou} \quad \xi = (1 - Z^2)^{1/2}. \tag{40}$$

Les solutions u_1, u_2 peuvent être choisies de la façon suivante :

$$u_1 = i^{-1} P_l^m[i(\xi^2 - 1)^{1/2}], \tag{41}$$

$$u_2 = (-1)^m i^{l+1} Q_l^m[i(\xi^2 - 1)^{1/2}] \tag{42}$$

$$W = -\frac{1}{\xi^2} (-1)^{2m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{(\xi^2 - 1)^{1/2}} (W < 0) \tag{43}$$

L'équation de phase s'écrit ensuite :

$$S' = \frac{f^2 g_0(\xi)}{pW} [i^{-1} P_l^m(i(\xi^2 - 1)^{1/2}) i^{l+1} (-1)^m S Q_l^m(i(\xi^2 - 1)^{1/2})]^2 \tag{44}$$

avec

$$p = \xi(\xi^2 - 1)^{1/2} \tag{45}$$

Les constantes dans les fonctions u_i sont choisies de façon à rendre ces fonctions réelles pour tout l, m , entier positif.

La solution $Q_l^m[i(\xi^2 - 1)^{1/2}]$ doit être rejetée en $\xi = 1$ car autrement $\psi(\xi, \eta, \theta)$ n'est pas finie en $\xi = 1$ [13]. Dans le cas prolate l'hypothèse

de régularité de ψ en $\xi = 1$ suffisait pour rejeter la deuxième solution $Q_l^m[i(\xi^2 - 1)^{1/2}]$.

Cet argument n'est plus valide dans le cas oblate, la fonction $Q_l^m(+i0)$ étant régulière.

Le potentiel $g_0(\xi)$ supporte un état lié à énergie nulle chaque fois que la solution de (44), nulle en $\xi = 1$, est infinie en $\xi = \xi_0$.

La relation (32) donne la condition nécessaire pour l'obtention d'un état lié oblate (l, m) :

$$\boxed{\text{B. S.} \Rightarrow \frac{(-1)^m(l-m)!}{(l+m)!} \int_1^{\xi_0} \xi f^2 |g_0(\xi)| P_l^m(i(\xi^2 - 1)^{1/2}) Q_l^m(i(\xi^2 - 1)^{1/2}) d\xi \geq 1} \tag{46}$$

La relation (33) donne :

$$\boxed{\frac{(-1)^m \xi_0 f^2 Q_l^m(i(\xi_0^2 - 1)^{1/2}) (l-m)!}{P_l^m(i(\xi_0^2 - 1)^{1/2}) (l+m)!} \int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| [P_l^m(i(\xi^2 - 1)^{1/2})]^2 d\xi \geq 1 \Rightarrow \text{B. S.}} \tag{47}$$

5. ÉTAT FONDAMENTAL

Les conditions précédentes appliquées à l'état fondamental $(l, m) = (0, 0)$ se réduisent aux conditions connues [3] :

Cas prolate :

$$\text{B. S.} \Rightarrow \int_1^{\xi_0} f^2 |g_p(\xi)| P_0(\xi) Q_0(\xi) d\xi > 1 \tag{48}$$

ou

$$\boxed{\text{B. S.} \Rightarrow \int_1^{\xi_0} f^2 |g_p(\xi)| \coth^{-1} \xi d\xi > 1} \tag{49}$$

et

$$\boxed{f^2 \coth^{-1} \xi_0 \int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| d\xi > 1 \Rightarrow \text{B. S.}} \tag{50}$$

Cas oblate :

$$\text{B. S.} \Rightarrow \int_1^{\xi_0} d\xi \xi f^2 |g_0(\xi)| Q_0^0[i(\xi^2 - 1)^{1/2}] P_0^0[i(\xi^2 - 1)^{1/2}] > 1 \tag{51}$$

ou encore utilisant une représentation bien connue de Q_0^0 :

$$iQ_0^0(i(\xi^2 - 1)^{1/2}) = \cotg^{-1}((\xi^2 - 1)^{1/2}) \tag{52}$$

$$\text{B. S.} \Rightarrow \int_1^{\xi_0} f^2 |g_0(\xi)| \cotg^{-1}((\xi^2 - 1)^{1/2}) d\xi > 1 \tag{53}$$

et

$$f^2 \cotg^{-1}((\xi_0^2 - 1)^{1/2}) \int_1^{\xi_0} |g_0(\xi)| d\xi > 1 \Rightarrow \text{B. S.} \tag{54}$$

6. CONDITIONS ASYMPTOTIQUES

Il n'est pas inutile de comparer les conditions précédentes pour ξ grand avec les conditions équivalentes en sphérique utilisant les développements asymptotiques suivants ($z \gg 1$) :

$$P_l^m(z) \simeq \frac{(2l - 1)!!}{(l - m)!!} z^l \tag{55}$$

$$Q_l^m(z) \simeq \frac{(-1)^m(m + l)!!}{(2l + 1)!!} z^{-l-1} \tag{56}$$

et

$$W(P_l^m(z), Q_l^m(z)) \simeq (-1)^{m+1} \frac{(m + l)!}{(l - m)!} z^{-2} \tag{57}$$

A grande distance $\xi \simeq \frac{r}{f}$ ou r est la distance à l'origine (milieu de F_1F_2).

De plus :

$$\begin{aligned} (\xi^2 - 1)^{1/2} &\sim \xi \\ g_p(\xi) &\sim V\xi^2 \\ g_0(\xi) &\sim V\xi^2 \end{aligned} \tag{58}$$

Les conditions (38) et (46) se réduisent toutes deux à

$$\text{B. S.} \Rightarrow \frac{1}{2l + 1} \int_1^{\xi_0} f^2 |V| \xi d\xi \geq 1 \tag{59}$$

ou encore :

$$\text{B. S.} \Rightarrow \frac{1}{2l + 1} \int_1^R |V| r dr \geq 1, \tag{60}$$

asymptotiquement équivalente à la condition de Jost-Pais [1].

Les conditions (39) et (47) se réduisent à :

$$\frac{\xi_0^{-(2l+1)}}{2l + 1} \int_1^{\xi_0} f^2 |V| \xi^{2l+2} d\xi \geq 1 \Rightarrow \text{B. S.} \tag{61}$$

ou encore

$$\frac{R^{-(2l+1)}}{2l+1} \int^R |V| r^{2l+2} dr \geq 1 \Rightarrow \text{B. S.} \quad (62)$$

asymptotiquement équivalente à la condition de Calogero [2].

Les deux équations de phases (37) et (44) se réduisent aussi asymptotiquement à l'équation de phase sphérique :

$$a' = \frac{V}{2l+1} (r^{l+1} + ar^{-l})2, \quad (63)$$

moyennant le changement de fonction $S = aK$ ou K est une constante appropriée.

7. COMPORTEMENT DES POTENTIELS RÉDUITS AU VOISINAGE DE $\xi = 1$

a) *Cas prolate.*

Voyons à présent sous quelles conditions les intégrales (38) et (39) existent.

1° Existence de

$$\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| P_l^m(\xi) Q_l^m(\xi) d\xi \quad (64)$$

Au voisinage de $\xi = 1$, le comportement de P_l^m et Q_l^m est donné par les expressions suivantes [14]

$$\begin{aligned} P_l^m(z) &= A_{l,m}(z-1)^{m/2} \\ Q_l^m(z) &= B_{l,m}(z-1)^{-m/2} \end{aligned} \quad (65)$$

où z est complexe.

L'existence de (64) se ramène donc à celle de :

$$\int_1^{1+\varepsilon} |g_p(\xi)| d\xi \quad (66)$$

Factorisons la singularité éventuelle de $g_p(\xi)$ sous la forme :

$$g_p(\xi) = \frac{h(\xi)}{(\xi-1)^\alpha}, \quad (h(\xi) \text{ analytique en } \xi = 1). \quad (67)$$

L'intégrale (66) et par conséquent la condition nécessaire (38) est valide dès que $\alpha < 1$.

2° Existence de $\int_1^{\xi_0} |g_p(\xi)| [P_l^m(\xi)]^2 d\xi$.

Étant donné le comportement de P_l^m en $\xi = 1$, la condition suffisante est valide dès que $\alpha < m + 1$ pour tout m nul ou entier positif, c'est-à-dire $\alpha < 1$.

b) *Cas oblate.*

Étant donné les comportements suivants au voisinage de $\xi = 1$

$$\begin{aligned} P_l^m[i(\xi^2 - 1)^{1/2}] &\simeq \xi^{-m} \\ Q_l^m[i(\xi^2 - 1)^{1/2}] &\simeq \xi^{-m} \end{aligned} \quad (68)$$

les intégrales dans les conditions nécessaires ou suffisantes convergent en même temps que l'intégrale

$$\int_1^{1+\varepsilon} |g_0(\xi)| \xi^{-2m} d\xi \quad (69)$$

c'est-à-dire à nouveau pour $\alpha < 1$.

8. VÉRIFICATION NUMÉRIQUE

Afin d'utiliser les conditions précédentes à la recherche d'inversion dans l'apparition de niveaux, considérons un potentiel peu physique mais exactement soluble, à savoir un potentiel sphéroïdal de Dirac

$$g(\xi) = -A\delta(\xi - \xi_0), \quad A > 0 \quad (70)$$

généralisation d'un potentiel sphérique de Dirac :

$$V(r) = -A\delta(r - r_0), \quad A > 0. \quad (71)$$

La condition nécessaire et la condition suffisante dans les deux cas, prolata et oblate, deviennent identiques pour un potentiel de Dirac. Les conditions sont alors nécessaires et suffisantes et coïncident alors *a priori* avec la condition exacte connue en général pour une interaction de Dirac [15].

Explicitement dans le cas prolata :

$$\text{B. S.} \Leftrightarrow A \geq \frac{(l+m)!}{f^2 Q_l^m(\xi_0) P_l^m(\xi_0) (l-m)! (-1)^m} \quad (72)$$

et dans le cas oblate :

$$\text{B. S.} \Leftrightarrow A \geq \frac{(l+m)!}{i(-1)^m (l-m)! f^2 P_l^m[i(\xi_0^2 - 1)^{1/2}] Q_l^m(i(\xi_0^2 - 1)^{1/2})} \quad (73)$$

La condition exacte dans le cas sphérique est également la limite pour ξ grand des deux conditions précédentes, soit :

$$\text{B. S.} \Leftrightarrow A \geq \frac{2l+1}{R} \quad (74)$$

Les valeurs critiques introduisant un niveau nouveau valent numéri-

quement pour un ξ_0 suffisamment grand ($\xi_0 = 7.07106$, $(\xi_0^2 - 1)^{1/2} = 7$, $f = 1$):

Cas prolate :

$l = 0, m = 0$	$7.0214 \leq A < 20.9138$
$l = 1, m = 0$	$20.9138 \leq A < 21.0951$
$l = 1, m = \pm 1$	$21.0951 \leq A < 34.5388$
$l = 2, m = 0$	$34.5388 \leq A < 34.9139$
$l = 2, m = \pm 1$	$34.9139 \leq A < 35.1058$
$l = 2, m = \pm 2$	$35.1058 \leq A$

Cas oblate :

$l = 0, m = 0$	$7.0472 \leq A < 21.09704$
$l = 1, m = \pm 1$	$21.097 \leq A < 21.2585$
$l = 1, m = 0$	$21.2585 \leq A < 35.0877$
$l = 2, m = \pm 2$	$35.0877 \leq A < 35.4463$
$l = 2, m = \pm 1$	$35.4463 \leq A < 35.5618$
$l = 2, m = 0$	$35.5618 \leq A$

(75)

Ces valeurs critiques sont proches des valeurs asymptotiques données par le potentiel sphérique :

$$V = -A_{\text{sphérique}} \delta(r - r_0) \quad (76)$$

avec $r_0 = \xi_0$, comme on peut le voir par un calcul explicite dans le cas $l = 0, m = 0$ par exemple,

$$\text{B. S.} \Leftrightarrow A_{\text{sphérique}} > \frac{1}{R} = .14142 \quad (77)$$

Cette première valeur critique sphérique est à comparer avec les valeurs suivantes :

$$\text{Prolate : } \text{B. S.} \Leftrightarrow A > .14042 \quad (78)$$

$$\text{Oblate : } \text{B. S.} \Leftrightarrow A > .13952, \quad (79)$$

obtenues à partir des valeurs précédentes (respectivement 7.0214 et 7.0472) après divisions par les facteurs ξ_0^2 et $\frac{\xi_0^3}{(\xi_0^2 - 1)^{1/2}}$ qui lient le potentiel total aux potentiels réduits.

Cette proximité du cas sphérique se remarque également par l'indépendance en m pour un l donné, des valeurs critiques précédentes.

9. INVERSION DANS L'ORDRE D'ENTRÉE DES NIVEAUX

Contrairement au cas sphérique, les niveaux n'entrent pas dans le même ordre, pour un potentiel de Dirac, pour toute valeur de ξ_0 .

Le calcul explicite à partir des expressions précédentes met en évidence un ellipsoïde critique dans le cas prolate et trois ellipsoïdes critiques dans le cas oblate (si on se limite toutefois aux états $l \leq 2$).

Les inversions dans l'ordre d'entrée sont alors :

Cas prolate :

$1 < \xi_0 < 1.17$		$1.17 < \xi_0 < \infty$
$l = 0, m = 0$		$l = 0, m = 0$
$l = 1, m = 0$		$l = 1, m = 0$
$l = 2, m = 0$ $l = 1, m = \pm 1$	← inversion →	$l = 1, m = \pm 1$ $l = 2, m = 0$
$l = 2, m = \pm 1$		$l = 2, m = \pm 1$
$l = 2, m = \pm 2$		$l = 2, m = \pm 2$

Cas oblate :

$1 < \xi_0 < 1.18$	$1.18 < \xi_0 < 1.23$	$1.23 < \xi_0 < 1.3$	$\xi_0 > 1.3$
$l = 0$ $m = 0$	$l = 0$ $m = 0$	$l = 0$ $m = 0$	$l = 0$ $m = 0$
$l = 1$ $m = \pm 1$	$l = 1$ $m = \pm 1$	$l = 1$ $m = \pm 1$	$l = 1$ $m = \pm 1$
$l = 2$ $m = \pm 2$	$l = 2$ $m = \pm 2$	$l = 1$ $m = 0$	$l = 1$ $m = 0$
$l = 2$ $m = 0$	$l = 1$ $m = 0$	$l = 2$ $m = \pm 2$	$l = 2$ $m = \pm 2$
$l = 1$ $m = 0$	$l = 2$ $m = 0$		
$l = 2$ $m = \pm 1$	$l = 2$ $m = \pm 1$	$l = 2$ $m = \pm 1$	$l = 2$ $m = 0$

10. REMARQUES ET CONCLUSIONS

Une technique extrêmement simple de majoration d'une équation de Riccati appropriée (équation de phase transformée homographiquement) a permis d'obtenir des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'obtention d'un état lié à énergie nulle de l'équation de Schrödinger. Il est clair que la même technique, qui en sphérique redonne les conditions de Jost-Pais et Calogero, peut également s'appliquer à d'autres systèmes de coordonnées où l'équation de Schrödinger est séparable soit directement, soit par l'intermédiaire d'un facteur de modulation (bisphériques et toroïdales par exemple).

Étant donné les difficultés de résolution analytique de l'équation de Schrödinger pour un potentiel sphéroïdal quelconque, il est utile de savoir *a priori* si le potentiel supporte ou pas un niveau de nombres quantiques (l, m) donnés.

Les critères précédents donnent une réponse partielle à ce problème.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] R. JOST and A. PAIS, *Phys. Rev.*, t. **82**, 1951, p. 840.
- [2] F. CALOGERO, *Journ. Math. Phys.*, t. **6**, 1965, p. 161.
- [3] A. RONVEAUX, *Lettere al Nuovo Cimento*, Sér. 2, vol. **4**, 1972, p. 839.
- [4] F. CALOGERO, *Communications in Mathematical Physics*, vol. **1**, n° 1, 1965, p. 80.
- [5] A. K. BOSE, *Lettere al Nuovo Cimento*, t. **32**, 1964, p. 679.
- [6] A. LEMIEUX et A. K. BOSE, *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, Section A, Physique théorique, vol. **10**, n° 3, 1969, p. 259.
- [7] K. HEUN, *Math. Annalen*, t. **33**, 1889, p. 161.
- [8] M. ABRAMOWITZ and I. A. STEGUN, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables*, US. Government Printing Office, Washington, 9° éd., 1970.
- [9] Cf. remarque signalée dans (3) sur l'expression erronée du Laplacien oblate donnée dans [8].
- [10] A. RONVEAUX, *C. R.*, t. **266**, série A, 1968, p. 306.
- [11] A. RONVEAUX, *C. R.*, t. **266**, série A, 1968, p. 78.
- [12] A. RONVEAUX, *C. R.*, t. **266**, série A, 1968, p. 478.
- [13] E. W. HOBSON, *The theory of spherical and ellipsoidal harmonics*. Chelsea Publishing Co., Inc., N. Y., 1955.
- [14] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER and R. P. SONI, *Formula and theorems for the special functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, 3° éd., Berlin, 1966.
- [15] A. RONVEAUX, *C. R.*, t. **270**, série A, 1970, p. 621.

(Version révisée, reçue le 13 janvier 1975)