ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Une perturbation à symétrie sphérique de la métrique d'un univers en expansion

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, nº 2 (1976), p. 165-170
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_2_165_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXIV, n° 2, 1976, p. 165-170.

Section A :
Physique théorique.

Une perturbation à symétrie sphérique de la métrique d'un univers en expansion

par

A. PAPAPETROU
Institut Henri Poincaré,
Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — On considère une perturbation à symétrie sphérique d'un Univers homogène et isotrope, contenant un fluide parfait sans pression et on détermine une solution cosmologique perturbée pour le cas d'un espace 3-dimensionnel plat. La solution décrit un Univers qui tend vers l'Univers non-perturbé pour $t \to \infty$.

SUMMARY. — We consider a spherically symmetric perturbation of a homogeneous isotropic Universe containing perfect fluid with vanishing pressure. We determine a special form of the corresponding perturbed solution for the case of a flat 3-dimensional space. This solution describes a Universe which tends to the unperturbed one when $t \to \infty$.

Dans l'étude du problème cosmologique on utilise d'habitude les solutions des équations d'Einstein satisfaisant aux hypothèses d'homogénéité et d'isotropie. La distribution de matière étant localement non-homogène, il est intéressant de déterminer la perturbation de la métrique correspondant à une perturbation donnée de la distribution homogène de matière. Le cas le plus simple est évidemment une perturbation à symétrie sphérique. On est ainsi amené au problème mathématique suivant : considérer une solution intérieure et la solution extérieure de Schwarzschild et faire raccorder cette solution à la solution cosmologique non perturbée.

Une solution approchée de ce problème a été donnée par McVittie [*1*] ainsi que par Einstein et Strauss [*2*]. Dans le présent travail nous allons déterminer une solution exacte et particulièrement simple de ce problème pour le cas d'un Univers en expansion, ayant la courbure 3-dimensionnelle ainsi que la pression égales à zéro. Nous y parviendrons à l'aide de la solution de Tolman [3], qui donne le champ gravitationnel créé par une distribution à symétrie sphérique d'un fluide parfait sans pression.

Nous commençons par une récapitulation de la solution de Tolman. En utilisant un système de coordonnées en co-mouvement avec la matière on obtient pour la métrique la forme :

$$ds^2 = dt^2 - e^{\mu} dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \tag{1}$$

μ et R étant fonctions de t et r. La vitesse des particules du fluide est :

$$u^{\alpha} = u_{\alpha} = (1, 0, 0, 0). \tag{2}$$

Le tenseur de matière a la forme

$$T_{\alpha\beta} = \rho u_{\alpha} u_{\beta} \tag{3}$$

et par conséquent seule la composante $T_{00} = \rho$ est différente de zéro. Les équations du champ donnent après quelques intégrations:

$$e^{\mu} = \frac{R'^2}{1 + f(r)}, \qquad \dot{R}^2 = f(r) + \frac{F(r)}{R}; \qquad R' \equiv \frac{\partial R}{\partial r}, \qquad \dot{R} \equiv \frac{\partial R}{\partial t} \tag{4}$$

$f(r)$ et $F(r)$ étant deux « constantes » d'intégration. On a encore la relation suivante entre la densité ρ et les fonctions R et F :

$$\varkappa \rho = \frac{F'}{R'R^2}. \tag{5}$$

Nous nous limiterons au cas

$$f(r) = 0. \tag{6}$$

On déduit immédiatement de (1) et (4) que dans ce cas R est la distance, à t = const, du point considéré à l'origine $r = 0$:

$$\int_0^r e^{\mu/2} dr = R.$$

D'après (1) l'aire de la sphère r = const est égale à $4\pi R^2$ et par conséquent R est aussi de ce point de vue le rayon de la sphère r = const. Il s'ensuit que $\dot{R}$ est la vitesse (radiale) de la matière et par conséquent la condition (6) signifie, d'après (4), que la vitesse $\dot{R}$ s'annule asymptotiquement quand $R \to \infty$. La deuxième équation (4) simplifiée par (6) peut être intégrée immédiatement. Le résultat est :

$$R^3 = \frac{9}{4} F(t - T(r))^2, \tag{7}$$

$T(r)$ étant une nouvelle constante d'intégration. Avec (7) la métrique (1) est complètement déterminée.

Si on met

(8*a*) $$\mathrm{T}(r) = 0\,,$$

(8*b*) $$\mathrm{F}(r) = \alpha r^3, \qquad \alpha = \text{const},$$

on obtient finalement pour la métrique (1) :

(9) $$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{9\alpha}{4}\right)^{2/3} t^{4/3}\,\{\,dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,.\,d\varphi^2)\,\}\,.$$

C'est la métrique de Friedmann pour le cas de matière du type (3) et d'un espace 3-dimensionnel plat. Notre problème est de déterminer une perturbation à symétrie sphérique de la solution cosmologique (9).

La formule (5), qu'on peut écrire aussi sous la forme :

(10) $$\varkappa \mathrm{T}_{00}\sqrt{-g} = \mathrm{F}'\sin\theta\,,$$

montre que $\mathrm{F}(r)$ est, à un facteur constant près, la masse totale contenue dans la sphère r = const. La solution extérieure de Schwarzschild correspond à F = const. Mais si l'on prend :

$$\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 = \text{const} \qquad \text{pour } r_1 < r < r_2$$

en maintenant la condition (8*a*), on déduit de (7) :

$$\mathrm{R}(r_1, t) = \mathrm{R}(r_2, t)\,,$$

ce qui signifie que l'intervalle $r_1 < r < r_2$ est en réalité un point. On retrouve le même résultat à l'aide de la relation :

(11) $$\mathrm{R}' = \frac{\mathrm{R}}{3}\left(\frac{\mathrm{F}'}{\mathrm{F}} - \frac{2\mathrm{T}'}{t - \mathrm{T}}\right),$$

qu'on obtient par dérivation de (7). Pour éviter de telles situations on doit demander

(12) $$\mathrm{R}' > 0\,.$$

Ceci donne pour le cas $\mathrm{T}' = 0$:

$$\mathrm{F}' > 0\,.$$

Une transformation $r^* = r^*(r)$ étant permise, on voit qu'on peut alors ramener la fonction $\mathrm{F}(r)$ à la forme normale (8*b*). Ceci signifie que pour obtenir une perturbation de la métrique (9) on doit utiliser une fonction $\mathrm{T}(r) \neq$ const.

En dérivant (7) par rapport à t on obtient :

(13) $$\dot{\mathrm{R}} = \frac{2\mathrm{R}}{3(t - \mathrm{T})}\,,$$

ce qui montre que pour une expansion, $\dot{\mathrm{R}} > 0$, on aura :

(14) $$t - \mathrm{T} > 0\,.$$

Pour $F' = 0$ on déduit de (12), (14) et (11) :

$$T' < 0. \tag{15}$$

Ceci suggère de considérer la perturbation déterminée par le choix suivant des fonctions $T(r)$ et $F(r)$ (fig. 1) :

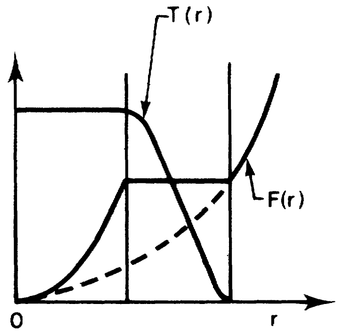

FIG. 1.

$$\left\{\begin{array}{lll} T(r) = T_0 = \text{const} > 0, & F(r) = \beta r^3 & \text{pour } 0 \leqslant r < r_1, \\ T' < 0 \quad , & F = F_0 = \beta r_1^3 & \text{pour } r_1 \leqslant r < r_2, \\ T = 0 \quad , & F = \alpha r^3 & \text{pour } r_2 \leqslant r. \end{array}\right. \tag{16}$$

En effet, avec ce choix des fonctions $T(r)$ et $F(r)$ nous avons dans $r < r_1$ une solution intérieure de Schwarzschild, la matière étant du type (3). Dans le domaine $r_1 \leqslant r < r_2$ nous avons la solution extérieure de Schwarzschild et dans $r_2 \leqslant r$ la solution cosmologique non perturbée (9).

Nous allons étudier en quelque détail la solution déterminée par (16). La densité de matière dans la perturbation $r < r_1$ est donnée par

$$\rho = M \Big/ \left(\frac{4\pi}{3} R_1^3\right),$$

$M = F_0$ étant la masse totale contenue dans $r < r_1$ et R_1 le rayon de la sphère $r = r_1$:

$$R_1^3 = \frac{9}{4} F_0 (t - T_0)^2. \tag{18}$$

La densité moyenne dans la sphère $r = r_2$, égale à la densité de la solution cosmologique non perturbée, est :

$$\rho_0 = M \Big/ \left(\frac{4\pi}{3} R_2^3\right),$$

$$R_2^3 = \frac{9}{4} F_0 t^2. \tag{19}$$

Par conséquent :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^3 = \left(\frac{t}{t - T_0}\right)^2 . \tag{20}$$

On voit que, pour un T_0 donné quelconque, on aura :

$$\frac{\rho}{\rho_0} \to 1 \quad \text{quand} \quad t \to \infty . \tag{21}$$

Ceci s'explique par la remarque que, d'après (13), la matière contenue dans la perturbation a une expansion plus rapide que l'expansion dans la partie non perturbée. Ce résultat découle du fait que nous avons imposé la condition (6) aussi à l'intérieur de la perturbation. On trouvera un comportement différent si on suppose que $f(r) < 0$ à l'intérieur de la perturbation. Ce cas, auquel correspond une solution essentiellement plus compliquée, sera étudié dans un prochain travail.

Supposons qu'à un certain moment $t = t_0$ l'observation nous donne la valeur de ρ/ρ_0 :

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \lambda^2 \quad \text{pour } t = t_0 . \tag{22}$$

La relation (20) devient alors :

$$\frac{t_0}{t_0 - T_0} = \lambda . \tag{23}$$

On déduit de cette relation :

$$T_0 = \frac{\lambda - 1}{\lambda} t_0 . \tag{24}$$

Si par exemple on a pour un amas de galaxies $\lambda^2 = 100$, on trouve :

$$T_0 = \frac{9}{10} t_0 .$$

La solution cosmologique non perturbée a la singularité de la « création » de l'Univers à $t = 0$. La solution perturbée a la même singularité pour $r > r_2$. Par contre, la perturbation elle-même, c'est-à-dire la région $r < r_1$, devient singulière à $t = T_0$: dans la solution cosmologique complète la perturbation se comporte comme un « trou blanc » qui explose à $t = T_0$.

Remarquons qu'on peut remplacer la solution intérieure précédente, contenant de la matière du type (3), par n'importe quelle autre solution intérieure ; par exemple une solution du type fluide parfait sans pression qui ne satisfait pas à la condition (6), ou une solution du type fluide parfait avec pression. Mais la description globale de la solution cosmologique perturbée sera dans ces cas beaucoup plus compliquée.

Nous ajouterons qu'on peut avoir plusieurs perturbations du type que nous avons considéré dans ce travail, leurs centres étant distribués dans l'espace sans aucune symétrie. La seule condition à satisfaire est que les régions de l'espace 3-dimensionnel contenant deux perturbations différentes soient entièrement séparées.

REFERENCES

[1] G. C. Mc Vittie, *Monthly Not. Roy. Astr. Soc.*, t. **93**, 1933, p. 325.
[2] A. Einstein et E. G. Strauss, *Rev. Mod. Physics*, t. **17**, 1945, p. 120.
[3] R. C. Tolman, *Proc. Nat. Acad.* (U. S. A.), t. **20**, 1934, p. 169.

(Manuscrit reçu le 16 juin 1975)