ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

Le déplacement vers le rouge au voisinage d'une perturbation de la solution cosmologique

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, nº 2 (1976), p. 171-178
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_2_171_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XXIV, n° 2, 1976, p. 171-178.

Section A :
Physique théorique.

Le déplacement vers le rouge au voisinage d'une perturbation de la solution cosmologique

par

A. PAPAPETROU

Institut Henri Poincaré,
Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S.

RÉSUMÉ. — On considère la solution cosmologique contenant une perturbation à symétrie sphérique, étudiée dans un précédent travail et on détermine le changement du déplacement vers le rouge provoqué par cette perturbation pour un rayon lumineux passant par le centre de symétrie.

SUMMARY. — Starting from the cosmologic solution containing a spherically symmetric perturbation, which has been derived in a previous paper, we determine the change of the red shift due to the perturbation for light rays passing through the center of symmetry.

Dans un travail précédent [*1*] nous avons déterminé la perturbation de la solution cosmologique correspondant à une perturbation à symétrie sphérique de la distribution de la matière, supposée comme un fluide parfait sans pression. Une conséquence de la perturbation de la métrique sera le changement du déplacement vers le rouge de la lumière qui traverse la perturbation. Nous allons établir les formules permettant de déterminer ce changement et les appliquer au cas où la lumière passe par le centre de symétrie de la perturbation.

Nous commençons par une récapitulation des formules concernant le calcul du déplacement vers le rouge. Le rayon lumineux sera considéré comme un courant de photons. Chacun de ces photons constitue une particule d'épreuve et par conséquent sa trajectoire est une géodésique nulle de la métrique. Si p_λ est le 4-vecteur d'énergie-impulsion de la particule, l'équation du mouvement est [2] :

$$p_{\lambda;\mu}p^\mu = 0\,. \tag{1}$$

Une particule possédant l'énergie-impulsion p_λ a pour un observateur se déplaçant avec la vitesse u^λ l'énergie :

$$\mathrm{E} = p_\lambda u^\lambda\,. \tag{2}$$

Dans le problème cosmologique on supposera que la source du rayonnement ainsi que l'observateur qui déterminera plus tard la longueur d'onde de ce rayonnement sont en co-mouvement avec la matière. Dans le système de coordonnées que nous avons utilisé dans [1] nous avons :

$$u^\lambda = (1, 0, 0, 0)\,. \tag{3}$$

Il s'ensuit que l'énergie du photon est donnée dans ce cas par la composante p_0 de p_λ. Si donc nous supposons que le photon a été émis au point A et observé plus tard au point B, la perte d'énergie pendant le parcours A $\rightarrow$ B sera donnée par :

$$\delta p_0 = p_0(\mathrm{A}) - p_0(\mathrm{B})\,. \tag{4}$$

L'énergie p_0 étant liée à la longueur d'onde λ par la formule

$$p_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}\,,$$

on aura pour le déplacement vers le rouge :

$$\delta\lambda = \lambda(\mathrm{B}) - \lambda(\mathrm{A}) = hc\left(\frac{1}{p_0(\mathrm{B})} - \frac{1}{p_0(\mathrm{A})}\right) = hc\,\frac{p_0(\mathrm{A}) - p_0(\mathrm{B})}{p_0(\mathrm{A})p_0(\mathrm{B})}\,. \tag{5}$$

La variation de p_0 le long de la trajectoire du photon sera déterminée par intégration de l'équation du mouvement (1). Pour une géodésique radiale le vecteur p^λ a la forme suivante :

$$p^\lambda = \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = (p^0, p^1, 0, 0)\,; \tag{6}$$

$$p_\lambda = (p_0, p_1, 0, 0)\,; \qquad p_0 = p^0, \qquad p_1 = g_{11}p^1\,, \tag{6'}$$

σ étant un paramètre affin sur la géodésique. L'équation (1) ne contient dans ce cas que les composantes $\lambda = 0$ et 1. La métrique étant de la forme (1) de [1],

$$ds^2 = dt^2 - e^\mu dr^2 - \mathrm{R}^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\,, \tag{7}$$

on trouve que ces deux équations sont les suivantes :

$$\frac{dp_0}{d\sigma} = \frac{1}{2}g_{11,0}(p^1)^2\,, \tag{8}$$

$$\frac{dp_1}{d\sigma} = \frac{1}{2} g_{11,1}(p^1)^2 . \tag{9}$$

L'une de ces deux équations, par exemple l'équation (9) peut être remplacée par la relation

$$g_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu = 0 .$$

Avec la métrique (7) ceci nous donne l'équation :

$$(p^0)^2 + g_{11}(p^1)^2 = 0 . \tag{10}$$

En tenant compte des relations (4) et (6) de [1],

$$g_{11} = - R'^2 , \tag{11}$$

on écrit cette équation sous la forme :

$$\frac{dx^0}{dx^1} = \pm R' ; \tag{12}$$

le signe + correspond au cas où la particule s'éloigne du centre. Il y a encore à considérer l'équation (8). En éliminant de cette équation $(p^1)^2$ à l'aide de (10) et en multipliant par $\frac{1}{p^0} = \frac{d\sigma}{dt}$ on obtient :

$$\frac{dp_0}{dt} = - \frac{1}{2} (\lg g_{11})_{,0} p_0 . \tag{13}$$

L'équation (12) détermine le mouvement du photon sur sa trajectoire tandis que l'équation (13) détermine la variation de p_0 le long de la trajectoire.

La quantité R était donnée par la relation (7) de [1] :

$$R^3 = \frac{9}{4} F(r)(t - T(r))^2 , \tag{14}$$

on obtient pour R' et $(\lg g_{11})_{,0}$ les formules :

$$\left\{ \begin{aligned} R' &= \frac{R}{3}\left(\frac{F'}{F} - \frac{2T'}{t - T}\right) ; \\ (\lg g_{11})_{,0} &= \frac{4}{3(t - T)} + \frac{4T'}{(t - T)^2}\left(\frac{F'}{F} - \frac{2T'}{t - T}\right)^{-1} . \end{aligned} \right. \tag{15}$$

Nous allons appliquer les formules (12) et (13) d'abord à la métrique cosmologique non perturbée donnée par l'équation (9) de [1]. Avec $T = 0$ l'équation (12) devient :

$$dt = \pm (12)^{-1/3}(F)^{-2/3} t^{2/3} dF .$$

La solution de cette équation est :

$$t^{1/3} = \text{const} \pm \left(\frac{F}{12}\right)^{1/3} .$$

Au point $r = 0$ on a $F = 0$. Si la particule se trouve à ce point au moment $t = t_0$, on aura :

$$t_0^{1/3} = \text{const}$$

et par conséquent :

$$t^{1/3} = t_0^{1/3} \pm \left(\frac{F}{12}\right)^{1/3}. \tag{16}$$

L'équation (13) se réduit à :

$$dp_0 = -\frac{2}{3t}\, p_0 dt$$

et la solution est :

$$p_0(t) = \text{const}\; t^{-2/3}.$$

La constante se détermine par la valeur $p_0(t_0)$ de p_0 à $r = 0$, c'est-à-dire à $t = t_0$. Le résultat final est :

$$p_0(t) = p_0(t_0)\left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3}. \tag{17}$$

A l'aide de (16) on peut écrire ce résultat aussi sous la forme :

$$p_0(r) = p_0(0)\left\{1 \pm \left(\frac{F(r)}{12t_0}\right)^{1/3}\right\}^{-2}; \qquad p_0(0) \equiv p_0(t_0). \tag{17'}$$

Le signe supérieur correspond à un mouvement avec $\dfrac{dr}{dt} > 0$.

Considérons maintenant la perturbation étudiée dans [1], déterminée par le choix suivant des fonctions $F(r)$ et $T(r)$:

$$\left\{\begin{array}{llll} F(r) = \beta r^3, & T(r) = T_0 = \text{const} & \text{dans} & 0 \leqslant r < r_1, \\ F(r) = \beta r_1^3 \equiv F_0, & T' < 0 \text{ et } T(r_2) = 0 & \text{dans} & r_1 \leqslant r < r_2. \end{array}\right. \tag{18}$$

Nous avons à intégrer les équations (12) et (13) séparément dans chacune des régions $r < r_1$ et $r_1 \leqslant r < r_2$.

Dans la région $r < r_1$ le calcul est presque identique au précédent, car il n'y a que le changement de t en $t - T_0$. Le résultat final est :

$$\left\{\begin{array}{l} (t - T_0)^{1/3} = (t_0 - T_0)^{1/3} \pm \left(\dfrac{F}{12}\right)^{1/3}; \\ p_0(t) = p_0(t_0)\left(\dfrac{t_0 - T_0}{t - T_0}\right)^{2/3}. \end{array}\right. \tag{19}$$

Ici aussi t_0 est le moment auquel la particule se trouve à $r = 0$. En éliminant $t_0 - T_0$ de la deuxième équation (19) à l'aide de la première on trouve une relation de la forme (17')

$$p_0(t) = p_0(t_0)\left\{1 \mp \left[\frac{F}{12(t - T_0)}\right]^{1/3}\right\}^2. \tag{19'}$$

Dans la région $r_1 < r < r_2$ les équations (12) et (13) prennent la forme :

$$(20') \qquad dt = \mp 2\left(\frac{F_0}{12}\right)^{1/3}(t - T)^{-1/3}dT, \qquad dp_0 = \frac{p_0}{3(t - T)}dt.$$

La première équation avec le signe supérieur $\left(\frac{dr}{dt} > 0\right)$ est équivalente à:

$$(20'') \qquad dt = \gamma \frac{d(t - T)}{\gamma + (t - T)^{1/3}};$$

$$(20) \qquad \gamma \equiv 2\left(\frac{F_0}{12}\right)^{1/3}.$$

En posant

$$(21) \qquad \frac{t - T}{\gamma^3} = x^3$$

on obtient l'équation :

$$d\left(\frac{t}{\gamma^3}\right) = \frac{3x^2dx}{1 + x}.$$

La solution de cette équation est :

$$(22) \quad \frac{T}{\gamma^3} = f(x) + \text{const} ; \qquad f(x) = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 3x + 3 \lg (1 + x).$$

Pour déterminer la constante d'intégration on supposera que la particule est à $r = r_1$ au moment $t = t_1$. Le résultat final est :

$$(23) \qquad \frac{T_0 - T}{\gamma^3} = f(x_1) - f(x); \qquad x_1 = \frac{(t_1 - T_0)^{1/3}}{\gamma}.$$

Cette relation peut être utilisée pour déterminer le moment $t = t_2$ auquel la particule arrive à $r = r_2$. En se rappelant que $T = 0$ à $r = r_2$ on trouve :

$$(24) \qquad \frac{T_0}{\gamma^3} = f(x_1) - f(x_2); \qquad x_2 = \frac{t_2^{1/3}}{\gamma}.$$

La deuxième équation (20') s'écrit à l'aide de (20'') et (21) :

$$\frac{1}{p_0}dp_0 = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}\right)dx.$$

La solution de cette équation est

$$p_0 = \text{const}\,\frac{x}{1 + x}.$$

Pour déterminer la constante d'intégration nous supposerons que $p_0 = p_0(1)$ à $r = r_1$, c'est-à-dire à $t = t_1$ (point 1 sur la fig. 1). On trouve alors :

$$(25) \qquad p_0(t) = p_0(1)\frac{x}{1 + x}\frac{1 + x_1}{x_1}.$$

Pour $r = r_2$, c'est-à-dire $t = t_2$ cette relation nous donne :

$$p_0(2) = p_0(1)\frac{x_2(1 + x_1)}{x_1(1 + x_2)}. \tag{26}$$

La relation (19′) nous donne pour $r = r_1$, ou $t = t_1$:

$$p_0(1) = p_0(0)\left(1 - \frac{1}{2x_1}\right)^2 = p_0(0)\frac{\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2}{x_1^2}. \tag{27}$$

Par conséquent :

$$p_0(2) = p_0(0)\frac{(x_1 + 1)\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 x_2}{x_1^3(x_2 + 1)}. \tag{28}$$

En utilisant les formules correspondantes à $\frac{dr}{dt} < 0$ on peut calculer le rapport $p_0(2')/p_0(0)$, $p_0(2')$ étant la valeur de p_0 au moment où la particule est au point 2′ (fig. 1) en se dirigeant vers le centre O. De cette manière on

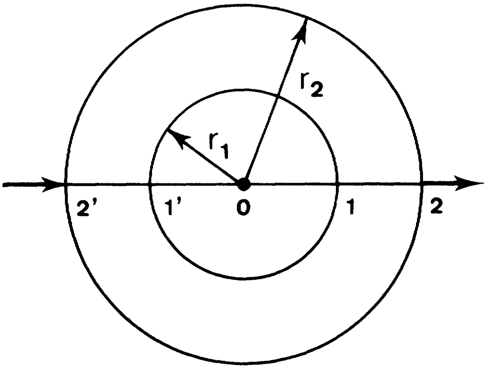

FIG. 1.

peut déterminer le rapport $p_0(2)/p_0(2')$, qu'on a à comparer avec la quantité correspondante de la solution cosmologique non perturbée. Nous ne donnerons pas ces formules, car le résultat final devient assez compliqué. Nous obtenons un résultat plus simple, si nous nous limitons au cas où le rayon de la perturbation est petit par rapport à l'age de l'Univers t_0 ou à $t_0 - T_0$:

$$\frac{R_1^3}{(t_0 - T_0)^3} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{F_0}{t_0 - T_0} \ll 1 .$$

Nous avons alors x_1 et $x_2 \gg 1$ et la formule (28) donne :

$$p_0(2)/p_0(0) = 1 - \frac{1}{x_2} + \ldots, \tag{29}$$

les termes omis étant de l'ordre $\left(\frac{1}{x^1}\right)^2$ ou $\left(\frac{1}{x_2}\right)^2$. Dans ce cas on démontre facilement que

$$p_0(2)/p_0(2') = 1 - \frac{2}{x_2} + \ldots. \tag{29'}$$

La différence $p_0(2') - p_0(2)$, qui détermine d'après (5) le déplacement vers le rouge, est au premier ordre :

$$p_0(2') - p_0(2) = \frac{2}{x_2} p_0(2') \approx \frac{2}{x_2} p_0(0).$$

Dans le cas de la solution cosmologique non perturbée nous avons à utiliser la formule (17'). En supposant que la particule a la même valeur $p_0(0)$ au point O nous obtenons la valeur $\tilde{p}_0(2)$ à $r = r_2$, où $F(r)$ a — d'après les relations (8 *b*) et (16) de [*1*] — la valeur précédente F_0 :

$$\tilde{p}_0(2)/p_0(0) = 1 - \frac{1}{x_0} + \ldots, \qquad x_0 = \frac{t_0^{1/3}}{\gamma}. \tag{30}$$

Pour la comparaison des formules (29) et (30) on se rappellera que t_1 ou x_1 sera calculé à partir de t_0 à l'aide de la première équation (19) et que t_2 ou x_2 sera déterminé à partir de t_1 à l'aide de (24). On déduit de (19) :

$$x_1 \equiv \frac{(t_1 - T_0)^{1/3}}{\gamma} = \frac{(t_0 - T_0)^{1/3}}{\gamma} + \frac{1}{2} = \left(\frac{t_0}{\lambda}\right)^{1/3} \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}, \tag{31}$$

où on a mis, d'après les relations (22) et (23) de [*1*] :

$$\lambda^2 = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(\frac{t_0}{t_0 - T_0}\right)^2$$

On déduit de (31) que pour $\lambda \approx 10$ — ce qui correspond à $\frac{\rho}{\rho_0} \approx 100$ — x_1 est de l'ordre de x_0 :

$$x_1 \approx \frac{1}{2} x_0.$$

La relation (24) nous donne maintenant, si nous retenons seulement les termes de l'ordre x_0^3 :

$$x_2^3 = x_1^3 + \frac{T_0}{\gamma^3} + \ldots = \frac{t_0 - T_0}{\gamma^3} + \frac{T_0}{\gamma^3} + \ldots = \frac{t_0}{\gamma^3} + \ldots;$$

c'est-à-dire :

$$x_2 = x_0 + \ldots. \tag{32}$$

Il s'ensuit que le déplacement vers le rouge d'un photon qui traverse le diamètre 2′O2 est, au premier ordre, le même dans la solution cosmologique perturbée ou non perturbée.

Ce résultat n'est pas valable dans le cas où le photon ne parcourt pas le diamètre 2′O2 entier, étant par exemple émis ou absorbé à un point situé entre 2′ et 2 : il y aura dans ce cas une différence du premier ordre, qu'on peut calculer à l'aide des formules que nous avons donné dans ce travail. Intuitivement cette différence s'explique par le fait que la matière de la perturbation a un taux d'expansion différent de celui de la région non perturbée.

Le cas où le photon traverse la perturbation sans passer par le centre O demande des calculs essentiellement plus compliqués. Mais on ne doit pas s'attendre à une modification des résultats qualitatifs obtenus précédemment.

RÉFÉRENCES

[*1*] A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **24**, 1976, p. 165.
[*2*] A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **2**, 1965, p. 355.

(Manuscrit reçu le 16 juin 1975)