ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

J. LUIS SANZ
JESÚS MARTIN

Systèmes non isolés de deux particules ponctuelles dans le cadre de la mécanique relativiste prédictive

Annales de l'I. H. P., section A, tome 24, n° 4 (1976), p. 347-358
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1976__24_4_347_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A :
Vol. XXIV, n° 4, 1976, p. 347-358. *Physique théorique.*

Systèmes non isolés de deux particules ponctuelles dans le cadre de la mécanique relativiste prédictive (*)

par

J. Luis SANZ et Jesús MARTIN
Departamento de Física Teórica.
Universidad Autónoma de Madrid. Canto Blanco, Madrid, Spain

ABSTRACT. — We study the non-isolated systems of two structureless point particles (interacting particles subjected to external forces) in the framework of Predictive Relativistic Mechanics. We develop a perturbation technique which permits the recurrent calculation of the accelerations by assuming that these functions can be expanded into power series of two characteristic parameters of the particles. We apply this in the case of an electromagnetic external field and an electromagnetic interaction using causality as a subsidiary condition.

I. INTRODUCTION (¹)

La Mécanique Relativiste Prédictive (M. R. P.) a été développée jusqu'à l'heure actuelle dans les formes suivantes :

a) *Le formalisme temps-symétrique* (D. G. Currie [*1*], R. N. Hill [*2*],

(*) Ce travail a été financé en partie par le Grupo Interuniversitario de Física Teórica (Spain).

(¹) Les valeurs que prennent les indices sont : $i, j, \ldots = 1, 2, 3$; $\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2, 3$; $a, b, c, \ldots, a', \ldots = 1, 2, \ldots, N$; a' est toujours différent de a ; la convention de sommation est utilisée pour tous les indices. La signature de l'espace-temps de Minkowski M_4 est $+2$; $(xy) = x^\rho y_\rho$. La vitesse de la lumière dans le vide est prise égale à 1.

L. Bel [3] [4]). Un système *isolé* de N particules ponctuelles sans structure est décrit par un système différentiel ordinaire autonome de second ordre dans R^{3N}

$$\frac{dx_a^i}{dt} = v_a^i \quad , \quad \frac{dv_a^i}{dt} = \mu_a^i(x_b^j, v_c^k),$$

les fonctions μ_a^i satisfaisant un certain système non-linéaire d'équations aux dérivées partielles qui traduisent l'invariance de l'ensemble des trajectoires par rapport au groupe de Poincaré.

b) *Le formalisme covariant uni-temporel* (L. Bel [4] [5]). Un système isolé de N particules ponctuelles sans structure est décrit par un système différentiel ordinaire autonome de second ordre dans $(M_4)^N$

$$\frac{dx_a^\alpha}{d\tau} = u_a^\alpha \quad , \quad \frac{du_a^\alpha}{d\tau} = \xi_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma),$$

les fonctions ξ_a^α satisfaisant un système linéaire d'équations aux dérivées partielles qui traduisent l'invariance du système par le groupe de Poincaré. En outre on suppose que le système est *prédictif* ce qui se traduit par un système non-linéaire d'équations aux dérivées partielles

$$L_{a'}\xi_a^\alpha = 0 \quad , \quad L_{a'} \equiv u_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial x^{a'\rho}} + \xi_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial u^{a'\rho}}$$

auxquelles on ajoute les contraintes

$$(u_a \xi_a) = 0 .$$

Il existe une équivalence entre les deux formalismes cités [4] [6].

c) *Le formalisme covariant multi-temporel* (Ph. Droz-Vincent [7], H. P. Künzle [8] ([2])). Un système *isolé* ou *non-isolé* de N particules ponctuelles sans structure est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles de second ordre dans $(M_4)^N$ complètement intégrable

$$\frac{\partial x_a^\alpha}{\partial \tau_b} = \delta_a^b u_a^\alpha \quad , \quad \frac{\partial u_a^\alpha}{\partial \tau_b} = \delta_a^b \xi_a^\alpha(x_c^\beta, u_d^\gamma) .$$

La condition d'intégrabilité (théorème de Frobenius), compte tenu du fait que x_a^α ne doit dépendre que du seul τ_a, s'exprime par

$$\frac{d\xi_a^\alpha}{\partial \tau_{a'}} = 0 ,$$

équations identiques aux $L_{a'}\xi_a^\alpha = 0$ du formalisme antérieur. On suppose aussi la condition d'orthogonalité $(u_a \xi_a) = 0$.

Dans cet article nous étudions les systèmes non-isolés de deux particules ponctuelles sans structure (particules en interaction soumises à l'action de

([2]) Ceci est développé par H. P. Künzle d'une façon différente.

forces externes) dans le cadre de la Mécanique Relativiste Prédictive. Nous utilisons une méthode de perturbations qui permet le calcul récurrent des accélérations en supposant que celles-ci admettent des développements en série de puissances de deux paramètres caractéristiques des particules (un pour chaque particule).

Nous choisissons l'exemple de l'interaction et champ externe électromagnétiques en utilisant le principe de causalité comme une condition supplémentaire. Nous donnons la première contribution des forces externes en fonction d'intégrales qui dépendent du champ externe électromagnétique et nous considérons plus explicitement les deux cas suivants : champ électromagnétique constant et champ électromagnétique produit par une troisième charge ayant une masse $m = \infty$.

II. SYSTÈMES NON-ISOLÉS DANS LE CADRE DE LA M. R. P.

II.1. Hypothèses de la M. R. P.

Pour l'étude des systèmes *non-isolés* de particules ponctuelles sans structure nous adopterons un formalisme covariant uni-temporel. C'est dire que les équations du mouvement d'un tel système (particules en interaction soumises à l'action de forces externes) constitueront un système différentiel ordinaire autonome de second ordre dans $(M_4)^N$

$$(1) \qquad \frac{dx_a^\alpha}{d\tau} = u_a^\alpha \quad , \quad \frac{du_a^\alpha}{d\tau} = \xi_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma),$$

où les fonctions ξ_a^α doivent satisfaire les conditions :

$$(2) \qquad (u_a \xi_a) = 0$$

$$(3) \qquad L_{a'}\xi_a^\alpha = 0 \quad , \quad L_{a'} \equiv u_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial x^{a'\rho}} + \xi_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial u^{a'\rho}}$$

Nous supposons aussi que les u_a^α sont orientés dans le temps et dans le futur $\left(u_a^2 \equiv -(u_a u_a) > 0, u_a^0 > 0\right)$ et $u_a^0 < +\infty$, cette dernière propriété garantissant que les particules ne vont pas dépasser la vitesse de la lumière.

Les contraintes (2) expriment que les u_a^2 sont des intégrales premières du système. Nous adoptons le même point de vue que dans [5] en prenant $u_a^2 = 1$ (cette hypothèse étant compatible avec (3)).

On peut voir que les conditions (3) expriment que : si x_a^α est un N-uple de points sur les lignes d'univers obtenues de quelques conditions initiales $\left(\overset{\circ}{x}{}_a^\alpha, \overset{\circ}{u}{}_b^\beta\right)$ et si u_a^α sont les vecteurs tangents correspondants, alors les lignes d'univers correspondantes aux conditions initiales $\left(x_a^\alpha, u_b^\beta\right)$ sont les mêmes que les précédentes.

D'une part (1) reflète la nature déterministe de ces systèmes et d'autre part (2) et (3) incorporent le fait suivant : le système a 3N degrés de liberté.

Le mot « système prédictif », introduit par L. Bel, met l'accent sur cette dernière propriété.

On ne connaît pas jusqu'à présent des solutions exactes des équations (2) et (3) ayant un intérêt physique mais la notion de système non-isolé n'est pas vide car par exemple (N = 2)

$$\xi_a^\alpha = \lambda^{-1/2} h_\sigma(x_1^\sigma + x_2^\sigma) \cdot \chi(h^\rho) t_a^\alpha \tag{4}$$

avec

$$\begin{aligned} & k \equiv -(u_1 u_2) \quad , \quad \lambda \equiv k^2 - 1 \quad , \quad z_a = \lambda^{-1}[(x_{aa'} u_a) - k(x_{aa'} u_{a'})] \\ & x_{aa'}^\alpha \equiv x_a^\alpha - x_{a'}^\alpha \quad , \quad h^\alpha \equiv x_{12}^\alpha - z_1 u_1^\alpha + z_2 u_2^\alpha \quad , \quad t_a^\alpha \equiv k u_a^\alpha - u_{a'}^\alpha \end{aligned} \tag{5}$$

χ étant une fonction arbitraire de son argument, sont des solutions exactes.

II.2. **Solutions approchées**

Nous nous proposons maintenant de résoudre les équations (2) et (3) pour le cas de deux particules (N = 2). Pour cela nous allons faire une hypothèse supplémentaire : les fonctions $\xi_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma)$ admettent des développements en série de puissances de deux paramètres caractéristiques e_a et $e_{a'}$ (le premier correspondant à la particule $\underline{a}$ et le second à la particule $\underline{a}'$) de la forme

$$\begin{aligned} \xi_a^\alpha = \sum_{r,s=0}^{\infty} e_a^r e_{a'}^s \xi_a^{(r,s)\alpha} = \xi_a^{(0,0)\alpha} + e_a \xi_a^{(1,0)\alpha} + e_{a'} \xi_a^{(0,1)\alpha} \\ + e_a^2 \xi_a^{(2,0)\alpha} + e_a e_{a'} \xi_a^{(1,1)\alpha} + e_{a'}^2 \xi_a^{(0,2)\alpha} \\ + e_a^3 \xi_a^{(3,0)\alpha} + e_a^2 e_{a'} \xi_a^{(2,1)\alpha} + e_a e_{a'}^2 \xi_a^{(1,2)\alpha} + e_{a'}^3 \xi_a^{(0,3)\alpha} + \dots \end{aligned} \tag{6}$$

où les fonctions $\xi_a^{(r,s)\alpha}$ sont indépendantes des paramètres e_b et vérifient les conditions

$$\xi_a^{(0,s)\alpha} \equiv 0 \quad , \quad s \geqslant 0 \quad ; \quad \xi_a^{(r,0)\alpha} \equiv \xi_a^{(r)\alpha}(x_a^\beta, u_a^\gamma) \quad , \quad r > 0 \,. \tag{7}$$

Cette hypothèse est inspirée par les considérations suivantes : si nous interprétons les paramètres e_b comme les responsables de l'interaction entre les particules elles-mêmes et aussi de l'action des possibles forces externes sur celles-ci, il est évident que les accélérations ξ_a^α doivent être nulles pour $e_a = 0$ et pour $e_{a'} = 0$ elles doivent dépendre uniquement des variables dynamiques de la particule a. D'autre part nous souhaitons que les ξ_a^α soient des fonctions suffisamment régulières des paramètres e_b. Dans ce contexte les termes $\xi_a^{(r)\alpha}(x_a^\beta, u_a^\gamma)$ pourront être considérés comme des forces externes.

En introduisant les développements (6) dans les équations (2) et (3) on obtient à chaque ordre (r, s) les équations suivantes :

$$(u_a \xi_a^{(r,s)}) = 0 \quad ; \quad \mathrm{D}_{a'} \xi_a^{(r,s)\alpha} = - \sum_{\substack{j+p=r \\ l+q=s}} \xi_{a'}^{(l,j)\rho} \frac{\partial \xi_a^{(p,q)\alpha}}{\partial u^{\alpha' \rho}} \quad , \quad \mathrm{D}_{a'} \equiv u_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial x^{a' \rho}} \tag{8 a, b}$$

On peut voir facilement la compatibilité des conditions (7) avec les équations (8) pour les ordres (0, s) et (r, 0), ces derniers étant donc uniquement astreints à vérifier $(u_a \xi_a^{(r)}) = 0$. Il est ainsi évident que les équations (8) constituent une méthode récurrente pour le calcul des différents ordres des développements (6), car dans les seconds membres des équations (8 b) interviennent seulement des termes d'ordre plus bas que dans les premiers membres. A chaque ordre (r, s) les équations (8 b) peuvent être donc considérées comme un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, dont la solution générale s'écrira

$$(9) \qquad \xi_a^{(r,s)\alpha} = \overset{*}{\xi}_a^{(r,s)\alpha} + \xi_{a(\mathrm{P})}^{(r,s)\alpha}$$

$\overset{*}{\xi}_a^{(r,s)\alpha}$ étant la solution générale du système homogène $(\mathrm{D}_{a'} \overset{*}{\xi}_a^{(r,s)\alpha} = 0)$ et $\xi_{a(\mathrm{P})}^{(r,s)\alpha}$ une solution particulière du système complet. Il est facile de vérifier que deux telles solutions particulières sont les suivantes ($\varepsilon = \pm 1$) :

$$(10) \qquad \xi_{a(\mathrm{P})}^{(r,s)\alpha} = - \int_0^{\tau_{a'}} \left\{ \sum_{\substack{j+p=r \\ l+q=s}} \xi_{a'}^{(l,j)\rho} \frac{\partial \xi_a^{(p,q)\alpha}}{\partial u^{a'\rho}} \right\} (x_\alpha^\beta, x_{a'}^\gamma - y u_{a'}^\gamma, u_b^\sigma) . dy$$

où la quantité sous le signe intégral, comme la notation l'indique, est obtenue à partir de la fonction $\Sigma \xi_{a'}^{(l,j)\rho} \dfrac{\partial \xi_a^{(p,q)\alpha}}{\partial u^{a'\rho}}$ en faisant le changement $x_{a'}^\alpha \to x_{a'}^\alpha - y u_{a'}^\alpha$ [13], et

$$(11) \qquad \tau_{a'} \equiv (x_{aa'} u_{a'}) - \varepsilon r_{a'} \quad , \quad r_{a'} \equiv + \left[x_{aa'}^2 + (x_{aa'} u_{a'})^2 \right]^{1/2} .$$

Remarquons que, compte tenu de la structure des solutions particulières (10) choisies, à chaque ordre (r, s) les équations (8 a) entraînent uniquement $(u_a \overset{*}{\xi}_a^{(r,s)}) = 0$.

En résumant, le terme d'ordre (r, s) du développement (6) est donné par :

$$(12\,a) \qquad \xi_a^{(r,s)\alpha} = \overset{*}{\xi}_a^{(r,s)\alpha} - \int_0^{\tau_{a'}} \left\{ \sum_{\substack{j+p=r \\ l+q=s}} \xi_{a'}^{(l,j)\rho} \frac{\partial \xi_a^{(p,q)\alpha}}{\partial u^{a'\rho}} \right\} (x_a^\beta, x_{a'}^\gamma - y u_{a'}^\gamma, u_b^\sigma) dy$$

$$(12\,b, c) \qquad (u_a \overset{*}{\xi}_a^{(r,s)}) = 0 \quad , \quad \mathrm{D}_{a'} \overset{*}{\xi}_a^{(r,s)\alpha} = 0 .$$

Pour les applications ultérieures nous écrivons d'une façon explicite le développement des fonctions ξ_a^α jusqu'à l'ordre $r + s = 3$:

$$(13) \qquad \xi_a^\alpha = e_a \xi_a^{(1)\alpha} + e_a^2 \xi_a^{(2)\alpha} + e_a e_{a'} \overset{*}{\xi}_a^{(1,1)\alpha} + e_a^3 \xi_a^{(3)\alpha} + e_a^2 e_{a'} \overset{*}{\xi}_a^{(2,1)\alpha}$$
$$+ e_a e_{a'}^2 \left\{ \overset{*}{\xi}_a^{(1,2)\alpha} - \int_0^{\tau_{a'}} \left(\xi_{a'}^{(1)\rho} \frac{\partial \overset{*}{\xi}_a^{(1,1)\alpha}}{\partial u^{a'\rho}} \right) (x_a^\beta, x_{a'}^\gamma - y u_{a'}^\gamma, u_b^\sigma) dy \right\} + \ldots$$

Il reste en suspens le problème de savoir si les séries obtenues avec ce procédé sont convergentes ou non.

III. INTERACTION ET CHAMP EXTERNE ÉLECTROMAGNÉTIQUES

III.1. Principe de causalité et solutions approchées

Nous considérons à présent le problème de l'interaction de deux charges e_a ayant des masses m_a soumises à l'action d'un champ électromagnétique donné $F^{\alpha\beta}$. Nous utiliserons le Principe de Causalité sous la forme suivante : le mouvement $x_a^\alpha = \varphi_a^\alpha(\tau)$ de la charge e_a doit être solution des équations de mouvement de Lorentz correspondantes à l'addition de deux termes, d'une part le terme relatif au champ électromagnétique donné $F^{\alpha\beta}$ et d'autre part le terme relatif au champ électromagnétique dont la source est $e_{a'}$ (calculé à partir des potentiels de Liénard-Wiechert retardés ($\varepsilon = -1$) ou avancés ($\varepsilon = +1$)). Ceci se traduit par les équations suivantes :

$$(14) \qquad \frac{dx_a^\alpha}{d\tau} = u_a^\alpha \quad , \quad \frac{du_a^\alpha}{d\tau} = W_a^\alpha(x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_{a'}^\sigma ; \hat{\xi}_{a'}^\delta)$$

avec

$$(15) \quad W_a^\alpha \equiv e_a m_a^{-1} F^{\alpha\sigma}(x_a^\rho) u_{a\sigma} + \varepsilon e_a e_{a'} m_a^{-1} (\hat{x}_{aa'} \hat{u}_{a'})^{-2} \{ (u_a \hat{\xi}_{a'}) \hat{x}_{aa'}^\alpha - (\hat{x}_{aa'} u_a) \hat{\xi}_{a'}^\alpha + (\hat{x}_{aa'} \hat{u}_{a'})^{-1} [1 + (\hat{x}_{aa'} \hat{\xi}_{a'})] . [(\hat{x}_{aa'} u_a) \hat{u}_{a'}^\alpha - (u_a \hat{u}_{a'}) \hat{x}_{aa'}^\alpha] \}$$

où $\hat{x}_{aa'}^\alpha \equiv x_a^\alpha - \hat{x}_{a'}^\alpha$, $\hat{x}_{a'}^\alpha$ étant l'intersection de la nappe future ($\varepsilon = +1$) ou passée ($\varepsilon = -1$) du cône isotrope de sommet x_a^α avec la ligne d'univers de la particule $\underline{a}'$, $\hat{u}_{a'}^\alpha$ est le vecteur unitaire tangent à cette ligne d'univers au point $\hat{x}_{a'}^\alpha$ et $\hat{\xi}_{a'}^\alpha$ est l'accélération de $\underline{a}'$ en ce même point.

Les équations (14) ne sont pas des équations différentielles ordinaires, mais dans le cadre de la M. R. P. (voir par exemple [*5*] [*9*] [*12*] [*13*]) elles peuvent être considérées comme des conditions supplémentaires contribuant à déterminer la dynamique du système, en ce sens que les fonctions $\xi_a^\alpha(x_a^\beta, x_{a'}^\gamma, u_a^\rho, u_{a'}^\sigma)$ solutions de (2) et (3) doivent satisfaire aux relations fonctionnelles suivantes

$$(16\,a) \qquad \xi_a^\alpha(x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_{a'}^\sigma) = W_a^\alpha(x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_{a'}^\sigma ; \hat{\xi}_{a'}^\delta)$$

avec

$$(16\,b) \qquad \hat{\xi}_{a'}^\alpha \equiv \xi_{a'}^\alpha(\hat{x}_{a'}^\beta, x_a^\gamma, \hat{u}_{a'}^\rho, u_a^\sigma)$$

$\hat{x}_{a'}^\alpha$ étant un point arbitraire de la nappe future ($\varepsilon = +1$) ou passée ($\varepsilon = -1$) du cône isotrope de sommet x_a^α et $\hat{u}_{a'}^\alpha$ un vecteur arbitraire au point $\hat{x}_{a'}^\alpha$.

Cela étant dit, nous nous proposons maintenant d'utiliser les conditions (16) pour construire effectivement les développements des fonctions ξ_a^α considérés dans le paragraphe précédent. En tenant compte de la structure des fonctions W_a^α donnée par (15) nous pouvons écrire les conditions (16) à chaque ordre (r, s) sous la forme :

$$(17) \quad \xi_a^{(r,s)\alpha}(x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_{a'}^\sigma) = W_a^{(r,s)\alpha}[x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_{a'}^\sigma ; \xi_{a'}^{(p,q)\delta}(\hat{x}_{a'}^\lambda, x_a^\mu, \hat{u}_{a'}^\nu, u_a^\tau)]$$

pour quelque $p \leqslant r$ et quelque $q < s$; elles constituent donc un système de relations récurrentes adapté à la technique de perturbations que nous avons introduite précédemment. Par exemple, jusqu'à l'ordre $r + s = 3$ on aura

$$W_a^{(0,1)\alpha} = W_a^{(2,0)\alpha} = W_a^{(0,2)\alpha} = W_a^{(3,0)\alpha} = W_a^{(2,1)\alpha} = W_a^{(0,3)\alpha} = 0$$

$$(18)\quad W_a^{(1,0)\alpha} = m_a^{-1} F^{\alpha\rho}(x_a^\sigma) u_{a\rho}\,,$$
$$W_a^{(1,1)\alpha} = \varepsilon m_a^{-1}(\hat{x}_{aa'}\hat{u}_{a'})^{-3}\left[(\hat{x}_{aa'}u_a)\hat{u}_{a'}^\alpha - (u_a\hat{u}_{a'})\hat{x}_{aa'}^\alpha\right]$$
$$W_a^{(1,2)\alpha} = \varepsilon m_a^{-1}(\hat{x}_{aa'}\hat{u}_{a'})^{-2}$$
$$\left\{ (u_a\hat{\xi}_{a'}^{(1)})\hat{x}_{aa'}^\alpha - (\hat{x}_{aa'}u_a)\hat{\xi}_{a'}^{(1)\alpha} + (\hat{x}_{aa'}\hat{u}_{a'})^{-1}(\hat{x}_{aa'}\hat{\xi}_{a'}^{(1)}) . \left[(\hat{x}_{aa'}u_a)\hat{u}_{a'}^\alpha - (u_a\hat{u}_{a'})\hat{x}_{aa'}^\alpha\right] \right\} .$$

Or, d'après (11) $\tau_{a'}$ est une fonction des arguments $(x_{a'}^\alpha, x_a^\beta, u_{a'}^\gamma)$ qui devient nulle pour $x_{a'}^\alpha = \hat{x}_{a'}^\alpha$; donc, compte tenu des formules (12 *a*), les relations (17) imposent les conditions suivantes sur les fonctions $\overset{*}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha}$

$$(19)\quad \overset{*}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha}(x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_a^\sigma) = W_a^{(r,s)\alpha}\left[x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, \hat{u}_{a'}^\sigma\,;\, \xi_{a'}^{(p,q)\delta}(\hat{x}_{a'}^\lambda, x_a^\mu, \hat{u}_{a'}^\nu, u_a^\tau)\right].$$

Nous voyons ainsi que le problème de construire les développements (6) est ramené à déterminer à chaque ordre (r, s) des fonctions $\overset{*}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha}$ vérifiant (12 *c*) et (19), car la structure des W_a^α assure automatiquement (12 *b*) à cet ordre. La solution générale des équations (12 *c*) peut s'écrire comme une fonction arbitraire d'au moins 15 solutions particulières indépendantes de l'équation $D_{a'}\Phi = 0$, posons par exemple

$$(20\,a)\qquad \overset{*}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha} = \overset{\#}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha}(x_a^\beta, \tilde{x}_{a'}^\gamma, u_b^\lambda)$$

avec

$$(20\,b)\qquad \tilde{x}_{a'}^\alpha(x_{a'}^\beta, x_a^\gamma, u_{a'}^\lambda) \equiv x_{a'}^\alpha - \tau_{a'}u_{a'}^\alpha\,.$$

Nous pouvons alors choisir les fonctions $\overset{*}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha}$ cherchées de la façon suivante

$$(21)\quad \overset{*}{\xi}{}_a^{(r,s)\alpha}(x_b^\beta, u_c^\gamma) = W_a^{(r,s)\alpha}\left[x_a^\beta, \tilde{x}_{a'}^\gamma, u_a^\rho, u_{a'}^\sigma\,;\, \xi_{a'}^{(p,q)\delta}(\tilde{x}_{a'}^\lambda, x_a^\mu, u_{a'}^\nu, u_a^\tau)\right]$$

car celles-ci sont de la forme (20) et à cause de l'identité $\tilde{x}_{a'}^\alpha(\hat{x}_{a'}^\beta, x_a^\gamma, u_{a'}^\lambda) \equiv \hat{x}_{a'}^\alpha$ vérifient trivialement les conditions (19). Il ne reste qu'à démontrer que la solution (21) est unique ; pour cela supposons qu'il existe une autre solution de (12 *c*) vérifiant (19) différente de (21). Il est évident que la différence entre ces deux solutions, que nous noterons $\overset{*}{\Sigma}{}_a^{(r,s)\alpha}(x_b^\lambda, u_c^\mu)$, doit satisfaire

$$(22\,a, b)\qquad D_{a'}\overset{*}{\Sigma}{}_a^{(r,s)\alpha} = 0 \quad , \quad \overset{*}{\Sigma}{}_a^{(r,s)\alpha}(x_a^\beta, \hat{x}_{a'}^\gamma, u_a^\lambda, \hat{u}_{a'}^\mu) \equiv 0\,;$$

(22 *a*) implique que $\overset{*}{\Sigma}{}_a^{(r,s)\alpha}$ est une fonction arbitraire, par exemple, des 15 arguments indépendants $(x_a^\beta, \tilde{x}_{a'}^i, u_b^\lambda)$; or, étant donné que pour $x_{a'}^\alpha = \hat{x}_{a'}^\alpha$ on a $\hat{x}_{a'}^i = \tilde{x}_{a'}^i$ et $\hat{u}_{a'}^\alpha = u_{a'}^\alpha$, (22 *b*) conduit nécessairement à $\overset{*}{\Sigma}{}_a^{(r,s)\alpha} \equiv 0$, d'où l'unicité.

Après calcul, les formules (12 *a*), (18) et (21) fournissent l'expression suivante pour les accélérations ξ_a^α jusqu'à l'ordre $r + s = 3$

$$(23)\quad \xi_a^\alpha = e_a m_a^{-1} F^{\alpha\rho}(x_a^\sigma) u_{a\rho} + e_a e_{a'} m_a^{-1} r_{a'}^{-3}[k x_{aa'}^\alpha + (x_{aa'} u_a) u_{a'}^\alpha]$$
$$+ e_a e_{a'}^2 m_a^{-1} m_{a'}^{-1} r_{a'}^{-3} \left\langle \left\{ F^{\rho\sigma}(\tilde{x}_{a'}^\lambda) + 3 r_{a'}^{-2} \int_0^{\tau_{a'}} [(x_{aa'} u_a) - y] \bar{F}^{\rho\sigma} dy \right\} x_{aa'\rho} u_{a'\sigma} \right.$$
$$\cdot [k x_{aa'}^\alpha + (x_{aa'} u_a) u_{a'}^\alpha] + \left\{ \varepsilon r_{a'} F^{\rho\sigma}(\tilde{x}_{a'}^\lambda) + \int_0^{\tau_{a'}} \bar{F}^{\rho\sigma} dy \right\} u_{a\rho} u_{a'\sigma}(x_{aa'}^\alpha + \tau_{a'} u_{a'}^\alpha)$$
$$\left. + \left\{ \varepsilon r_{a'}[k\tau_{a'} - (x_{aa'} u_a)] F^{\alpha\sigma}(\tilde{x}_{a'}^\lambda) + \int_0^{\tau_{a'}} [ky - (x_{aa'} u_a)] \bar{F}^{\alpha\sigma} dy \right\} u_{a'\sigma} \right\rangle$$

avec

$$\bar{F}^{\alpha\beta}(x_{a'}^\rho, u_{a'}^\sigma ; y) \equiv F^{\alpha\beta}(x_{a'}^\rho \to x_{a'}^\rho - y u_{a'}^\rho) .$$

Les termes :

$(r, 0)$ $r > 1$ sont nuls et $(1, 0)$ est $m_a^{-1} F^{\alpha\sigma} u_{a\sigma}$. Ceci rend compte du fait physique suivant : si $e_{a'} = 0$ alors $\xi_{a'}^\alpha = 0$ et $\xi_a^\alpha = e_a m_a^{-1} F^{\alpha\sigma} u_{a\sigma}$, c'est-à-dire que l'une des particules est libre et que l'autre est soumise seulement au champ électromagnétique $F^{\alpha\beta}$.

(1, 1) représente une interaction particule-particule, comme s'il n'existait pas le champ externe.

(1, 2) représente une interaction champ-particule 1-particule 2 (première contribution).

On peut voir facilement que dans les termes (1, 1) et (2, 2) il n'apparaît pas de champ externe, ils représentent des interactions particules-particules; pour les termes (r, r) $r > 2$ cela n'est pas vrai. Si le champ externe est nul, les seuls termes du développement non nuls sont ceux du type (r, r), alors nous redécouvrons le résultat obtenu dans [5].

III.2. Cas particuliers

A) *Champ électromagnétique constant.* — Nous supposons maintenant que le tenseur électromagnétique $F^{\alpha\beta}$ est constant. Dans ce cas les calculs précédents fournissent l'expression suivante pour la 3-accélération ([3]) de la particule a jusqu'à l'ordre $r + s = 3$,

$$(24)\quad \vec{\mu}_a = e_a m_a^{-1} \gamma_a^{-1} [\vec{E} + \vec{v}_a \wedge \vec{B} - (\vec{v}_a \vec{E}) \vec{v}_a]$$
$$+ e_a e_{a'} m_a^{-1} \gamma_a^{-1} \gamma_{a'} s_{a'}^{-3} [v \vec{x}_{aa'} - (\vec{x}_{aa'} \vec{v}_a) \vec{v}_{aa'}] + \frac{1}{2} e_a e_{a'}^2 m_a^{-1} m_{a'}^{-1} \gamma_a^{-1} \gamma_{a'}^2 s_{a'}^{-3}$$
$$\cdot \{ (2 - 3 x_{aa'}^2 s_{a'}^{-2}) [(\vec{x}_{aa'} \vec{E}) + (\vec{x}_{aa'}, \vec{v}_{a'}, \vec{B})] [v \vec{x}_{aa'} - (\vec{x}_{aa'} \vec{v}_a) \vec{v}_{aa'}]$$
$$+ [(\vec{v}_{aa'} \vec{E}) + (\vec{v}_a, \vec{v}_{a'}, \vec{B})] [2 (\vec{x}_{aa'} \vec{v}_{a'}) \vec{x}_{aa'} + x_{aa'}^2 \vec{v}_{aa'}]$$
$$- [v x_{aa'}^2 + 2 (\vec{x}_{aa'} \vec{v}_{a'}) (\vec{x}_{aa'} \vec{v}_a)] [\vec{E} + \vec{v}_{a'} \wedge \vec{B} - (\vec{v}_{a'} \vec{E}) \vec{v}_a] \}$$

([3]) Voir dans l'appendice la connexion entre les 3-accélérations $\mu_a^i(t ; x_b^j, v_c^k)$ et les 4-accélérations $\xi_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma)$.

avec

$$x^i_{aa'} = x^i_a - x^i_{a'} \quad , \quad v^i_{aa'} = v^i_a - v^i_{a'} \quad , \quad x^2_{aa'} = x^i_{aa'} x_{aa'i} \quad , \quad v^2_a = v^i_a v_{ai} \quad , \quad \nu = 1 - (\vec{v}_1 \vec{v}_2)$$

$$(25) \quad \gamma_a = +(1 - v^2_a)^{-1/2} \quad , \quad \mathrm{E}^i = \mathrm{F}^{0i} \quad , \quad \mathrm{B}^i = \frac{1}{2}\eta^{ijk}\mathrm{F}_{jk} \quad , \quad (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \eta_{ijk} a^i b^j c^k$$

$$(\vec{a} \wedge \vec{b})^i = \eta^{ijk} a_j b_k \quad , \quad s_{a'} = + \left[x^2_{aa'} + \gamma^2_{a'}(\vec{x}_{aa'}\vec{v}_{a'})^2\right]^{1/2}$$

$\eta^{ijk} \equiv \eta_{ijk}$ étant le tenseur de Levi-Civita.

Le premier terme de l'expression (24) est bien connu, il représente la 3-accélération d'une charge e_a soumise à l'action d'un champ électromagnétique ($\vec{\mathrm{E}}$, $\vec{\mathrm{B}}$) constant, comme s'il n'existait pas l'autre charge $e_{a'}$. Le second terme est connu aussi, il représente la 3-accélération d'une charge e_a soumise à l'action du champ électromagnétique dont la source est une autre charge $e_{a'}$, cette dernière en mouvement libre et comme s'il n'existait pas le champ ($\vec{\mathrm{E}}$, $\vec{\mathrm{B}}$). Le troisième terme rend compte pour la première fois d'une interaction champ ($\vec{\mathrm{E}}$, $\vec{\mathrm{B}}$)-particule 1-particule 2, il est tout à fait nouveau. Finalement remarquons l'indépendance par rapport à ε, c'est-à-dire que jusqu'à l'ordre considéré les fonctions $\vec{\mu}_a$ ne dépendent pas de l'usage des potentiels de Liénard-Wiechert avancés ou retardés.

Dans le cas simple où le champ magnétique $\vec{\mathrm{B}}$ est nul, les deux vitesses $\vec{v}_a$ et $\vec{v}_{a'}$ sont identiques ($\vec{v}_a = \vec{v}_{a'} \equiv \vec{v}$) et le champ électrique $\vec{\mathrm{E}}$ est colinéaire à celles-ci ($\vec{\mathrm{E}} = \lambda\vec{v}$), la formule (24) s'écrit

$$(26) \quad \vec{\mu}_a = e_a m_a^{-1}\gamma^{-3}\vec{\mathrm{E}} + e_a e_{a'} m_a^{-1}\gamma^{-2}s^{-3}\vec{x}_{aa'} + \frac{1}{2} e_a e^2_{a'} m_a^{-1} m_{a'}^{-1}\gamma^{-1}s^{-3}\lambda\left\{(2 - 3r^2 s^{-2})(\vec{x}_{aa'}\vec{v})\vec{x}_{aa'} - [\gamma^{-2}r^2 + 2(\vec{x}_{aa'}\vec{v})^2]\vec{v}\right\}$$

où

$$(27) \quad \gamma = +(1 - v^2)^{-1/2} \quad , \quad r = +\sqrt{x^2_{aa'}} \quad , \quad s = +[r^2 + \gamma^2(\vec{x}_{aa'}\vec{v})^2]^{1/2}$$

Étudions séparément les deux situations suivantes :

a) $(\vec{x}_{aa'}\vec{v}) = 0$. L'expression (26) s'écrit tout simplement

$$(28) \quad \vec{\mu}_a = e_a m_a^{-1}\gamma^{-3}\vec{\mathrm{E}} + e_a e_{a'} m_a^{-1}\gamma^{-2}r^{-3}\vec{x}_{aa'} - \frac{1}{2} e_a e^2_{a'} m_a^{-1} m_{a'}^{-1}\gamma^{-3}r^{-1}\vec{\mathrm{E}} ;$$

l'interprétation des deux premiers termes est triviale, car ils représentent respectivement l'action du champ $\vec{\mathrm{E}}$ sur la charge e_a et l'attraction (ou répulsion) entre les charges e_a et $e_{a'}$. En ce qui concerne le troisième terme nous voyons qu'il représente une action de freinage par rapport à l'action du premier terme, étant comparable avec celle-ci, pour une vitesse donnée, quand la distance entre les deux particules est de l'ordre du rayon classique de la particule a'. Remarquons aussi que les trois termes deviennent nuls quand la vitesse $\vec{v}$ est égale à celle de la lumière.

b) $\vec{x}_{aa'} = \rho\vec{v}$. L'expression (26) s'écrit maintenant

$$(29)\quad \vec{\mu}_a = e_a m_a^{-1}\gamma^{-3}\vec{E} + e_a e_{a'} m_a^{-1}\gamma^{-5}\,\mathrm{sig}\,(\rho) r^{-3}\vec{x}_{aa'} - e_a e_{a'}^2 m_a^{-1} m_{a'}^{-1}\gamma^{-6} r^{-1}\vec{E}$$

où les conclusions sont parallèles aux précédentes, sauf que l'action de freinage représentée par le troisième terme est beaucoup plus petite à cause du facteur γ^{-6}.

Une étude analogue peut être faite pour le cas, aussi simple, où le champ électrique est nul et le champ magnétique est orthogonal à la direction du mouvement.

Nous croyons que l'étude que nous venons d'exposer ici, quoique extrêmement simple, peut être utilisée comme point de départ pour une analyse plus profonde du comportement de faisceaux de particules chargées soumis à l'action d'un champ électromagnétique. Il faudrait pour cela considérer un grand nombre de particules et aller plus loin dans le calcul perturbatif.

B) *Le problème réduit de trois corps, cas statique.* — Considérons un système de deux charges e_a et $e_{a'}$ ayant des masses m_a et $m_{a'}$ dans le champ d'une troisième charge $e_{a''}$ ayant une masse $m_{a''} = \infty$ (en mouvement libre). Physiquement c'est un système à deux particules. Nous nous bornerons au cas statique, c'est-à-dire au cas où $\vec{v}_a = \vec{v}_{a'} = \vec{v}_{a''} = 0$ en un instant donné ; le calcul fournit le résultat suivant pour la 3-accélération de la charge e_a

$$(30)\quad m_a\vec{\mu}_a = e_a e_{a'}\frac{\vec{x}_{aa'}}{x_{aa'}^3} + e_a e_{a''}\frac{\vec{x}_{aa''}}{x_{aa''}^3} + \frac{e_a^2 e_{a'}^2}{m_{a'}}\frac{\vec{x}_{aa'}}{x_{aa'}^4} - \frac{e_a e_{a'}^2 e_{a''}}{2m_{a'}} x_{aa'}^{-3} x_{a'a''}^{-3}[(\vec{x}_{aa'}\vec{x}_{a'a''})\vec{x}_{aa'} + x_{aa'}^2\vec{x}_{a'a''}]$$

où

$$x_{ab}^i = x_a^i - x_b^i \quad , \quad x_{ab} = + \left(x_{ab}^i x_{abi}\right)^{1/2} .$$

Les deux premiers termes expriment la loi de Coulomb. Les autres termes représentent une correction à cette loi. Le troisième terme a été obtenu aussi dans le problème de deux corps isolés [*5*]. Finalement, remarquons que l'expression (30) coïncide avec celle que l'on obtient en utilisant le lagrangien de Darwin [*10*] ; elle peut être aussi obtenue à partir du problème de trois corps isolés [*11*].

APPENDICE

Considérons un système différentiel ordinaire autonome de second ordre dans $(M_4)^N$ de la forme

(A*a*) $$\frac{dx_a^\alpha}{d\tau} = u_a^\alpha \quad , \quad \frac{du_a^\alpha}{d\tau} = \xi_a^\alpha(x_b^\beta, u_c^\gamma)$$

où les fonctions ξ_a^α satisfont les conditions

(A*b*) $$(u_a\xi_a) = 0$$
$$L_{a'}\xi_a^\alpha = 0 \quad , \quad L_{a'} \equiv u_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial x^{a'\rho}} + \xi_{a'}^\rho \frac{\partial}{\partial u^{a'\rho}}$$

Nous supposons aussi que les vecteurs u_a^α sont orientés dans le temps et dans le futur $(u_a^2 \equiv -(u_a u_a) > 0,\ u_a^0 > 0)$. Il est facile de voir que la solution générale d'un tel système, correspondant à des conditions initiales vérifiant $u_a^2 = 1$, dépendent de 6N paramètres essentiels [*4*].

Considérons maintenant le système différentiel ordinaire de second ordre dans R^{3N}

(B*a*) $$\frac{dx_a^i}{dt} = v_a^i \quad , \quad \frac{dv_a^i}{dt} = \mu_a^i(t\,;\, x_b^j, v_c^k)$$

défini par

(B*b*) $$\mu_a^i(t\,;\, x_b^j, v_c^k) \equiv (1 - v_a^2)(\bar{\xi}_a^i - \bar{\xi}_a^0 v_a^i)$$

avec

$$\bar{\xi}_a^\alpha(t\,;\, x_b^j, v_c^k) \equiv \xi_a^\alpha[x_b^0 = t\,;\, x_c^i, u_d^0 = (1 - v_d^2)^{-1/2}, u_c^k = (1 - v_c^2)^{-1/2} v_c^k]\,.$$

On peut démontrer sans aucune difficulté que tout ensemble de trajectoires du système (A) vérifiant $u_a^2 = 1$ est un ensemble de courbes intégrales du système (B) et réciproquement.

REMERCIEMENTS

Nous remercions le Docteur L. BEL pour les nombreuses discussions que nous avons eues avec lui tout au long de ce travail. L'un des auteurs (J. MARTIN) remercie à l'Équipe de Recherche n° 2 du C. N. R. S. l'hospitalité avec laquelle il a été accueilli pendant son séjour à Paris.

RÉFÉRENCES

[*1*] D. G. CURRIE, *Phys. Rev.*, t. **142**, 1966, p. 817.
[*2*] R. N. HILL, *J. Math. Phys.*, t. **8**, 1967, p. 201.
[*3*] L. BEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **12**, 1970, p. 307.
[*4*] L. BEL, *Ann. Inst. H. Poincaré*, t. **14**, 1971, p. 189.
[*5*] L. BEL, A. SALAS et J. M. SANCHEZ-RON, *Phys. Rev.*, **D7**, 1973, p. 1099.
[*6*] R. LAPIEDRA dans *Journées Relativistes de Toulouse*, 1974. Université de Toulouse. Département de Mathématiques.
[*7*] Ph. DROZ-VINCENT, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **275A**, 1972, p. 1263.

[*8*] H. P. KUNZLE, Galilei and Lorentz Invariance of Classical Particle Interaction, dans *Symposia Mathematica*, Academic, New York.
[*9*] L. BEL, dans *Journées Relativistes de Toulouse*, 1974. Université de Toulouse. Département de Mathématiques.
[*10*] C. G. DARWIN, *Phil. Mag.*, t. **39**, 1920, p. 537.
[*11*] F. X. FUSTERO, Thèse, Universidad Autónoma de Barcelona, 1974.
[*12*] L. BEL et F. X. FUSTERO, Preprint.
[*13*] Cette technique de « shift » a été aussi utilisée par D. HIRONDEL, *J. M. P.*, t. **15**, 1974, p. 1689.

(Manuscrit reçu le 9 juillet 1975)