

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

A. PAPAPETROU

## **Perturbations à symétrie sphérique de la métrique d'un univers en expansion, II**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 29, n° 2 (1978), p. 207-215

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1978\\_\\_29\\_2\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1978__29_2_207_0)

© Gauthier-Villars, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## **Perturbations à symétrie sphérique de la métrique d'un univers en expansion, II**

par

**A. PAPAPETROU**

Équipe de Recherche Associée au C. N. R. S., n° 533.  
Laboratoire de Physique Théorique. Institut Henri Poincaré,  
11, rue Pierre et Marie-Curie, 75231 Paris Cedex 05

---

**RÉSUMÉ.** — On considère l'Univers homogène et isotrope contenant de la matière du type de poussière dans un état de mouvement parabolique. On construit une perturbation à symétrie sphérique contenant de la matière aussi du type de poussière, mais dans un état de mouvement elliptique. La formation d'une singularité par le collapse de la matière de la perturbation est discutée en détail.

**SUMMARY.** — We consider a homogeneous isotropic Universe containing dust in a state of a parabolic motion. We construct a spherically symmetric perturbation containing dust in a state of an elliptic motion. The formation of a singularity by the collapse of the material contained in the perturbation is discussed in detail.

---

Dans une première publication [1] nous avons considéré la solution cosmologique ayant comme source de la matière sous forme de poussière ( $p = 0$ ) dans un état de mouvement parabolique et nous avons déterminé une perturbation à symétrie sphérique. Cette perturbation, donnée précédemment par Novikov [2], est caractérisée par le fait qu'elle contient aussi de la poussière en mouvement parabolique. La solution globale — perturbation dans le domaine  $r < r_0$  et solution cosmologique non perturbée dans  $r > r_0$  — a une forme particulièrement simple. Elle a été déduite de la solution générale de Tolman [3] qui donne le champ gravitationnel créé par une distribution de poussière à symétrie sphérique.

Dans ce travail nous allons considérer la même solution cosmologique et nous construirons une perturbation contenant de la poussière en mouvement elliptique. En nous appuyant ici aussi sur la solution générale de Tolman, nous allons déduire la description analytique de la perturbation et étudier ensuite le contenu physique de cette solution.

Rappelons d'abord les formules de base de la solution de Tolman. Dans un système de coordonnées en comouvement avec la matière la métrique a la forme

$$(1) \quad ds^2 = dt^2 - e^\mu dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2),$$

$\mu$  et  $R$  étant fonctions de  $t$  et  $r$ . Le tenseur de matière est

$$(2) \quad T_{\alpha\beta} = \rho u_\alpha u_\beta$$

avec

$$(3) \quad u_\alpha = u^\alpha = (1, 0, 0, 0).$$

Les équations du champ donnent après deux intégrations :

$$(4) \quad e^\mu = \frac{R'^2}{1 + f(r)}, \quad \dot{R}^2 = f(r) + \frac{F(r)}{R}; \quad R' \equiv \frac{\partial R}{\partial r}, \quad \dot{R} \equiv \frac{\partial R}{\partial t},$$

$f(r)$  et  $F(r)$  étant deux « constantes » d'intégration. Notons encore la relation suivante entre la densité  $\rho$  et les fonctions  $R$  et  $F$  :

$$(5) \quad \kappa\rho = \frac{F'}{R^2 R'}.$$

D'après (1) la fonction  $R(t, r)$  est la distance photométrique entre le point  $(t, r)$  et le centre de symétrie. Nous pouvons donc considérer  $\dot{R}$  comme la vitesse (radiale) de la matière. On déduit alors de la deuxième équation (4) que dans le cas  $f(r) = 0$  la vitesse  $\dot{R}$  s'annule asymptotiquement pour  $R \rightarrow \infty$  : c'est le cas du mouvement *parabolique* de la matière. Par contre dans le cas  $f(r) < 0$  il y a un maximum d'expansion suivi par une contraction ; c'est le mouvement *elliptique* de la matière. Rappelons encore la signification de la fonction  $F(r)$ . Dans le cas  $f = 0$  on obtient, en multipliant (5) par  $\sqrt{-g}$  :

$$\kappa\rho\sqrt{-g} = F' \sin \theta.$$

L'intégration de cette relation sur l'intérieur de la sphère  $r = \text{const.}$  nous donne :

$$(6) \quad \kappa M(r) = 4\pi F(r),$$

$M(r)$  étant la masse propre contenue à l'intérieur de cette sphère. Cette interprétation de  $F(r)$  reste valable qualitativement aussi dans le cas  $f(r) \neq 0$ . Plus exactement la quantité  $F(r)$  peut être considérée dans ce cas comme représentant la masse totale contenue à l'intérieur de la sphère  $r = \text{const.}$  [4].

Nous considérons d'abord la solution cosmologique correspondant à un mouvement parabolique de la poussière. Avec  $f(r) = 0$ , la deuxième équation (4) donne après intégration :

$$(7) \quad R^3 = \frac{9}{4} F \{ t - T(r) \}^2,$$

$T(r)$  étant la dernière « constante » d'intégration. Le choix

$$(8) \quad T(r) = 0, \quad F(r) = \alpha r^3; \quad \alpha = \text{const}$$

conduit à la métrique

$$(9) \quad ds^2 = dt^2 - \left( \frac{9\alpha}{4} \right)^{2/3} t^{4/3} \{ dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\varphi^2) \}.$$

C'est la métrique de Friedmann pour le cas de matière du type poussière et d'un espace 3-dimensionnel plat. Nous retiendrons cette métrique comme valable dans la région  $r > r_0$ . Notre problème est de construire une perturbation de cette solution dans  $r < r_0$ , la matière contenue à l'intérieur de la perturbation étant aussi de la poussière mais dans un état de mouvement elliptique. Nous aurons donc

$$(10) \quad f(r) < 0 \quad \text{dans} \quad r < r_0.$$

Dans le cas (10) la solution de la deuxième équation (4) est donnée sous forme paramétrique par

$$(11) \quad t = \frac{F}{2|f|^{3/2}} (u - \sin u) + T(r), \quad R = \frac{F}{2|f|} (1 - \cos u).$$

Le paramètre  $u$  variera dans l'intervalle  $0 \leq u \leq 2\pi$ . En effet, on a

$$R = 0 \quad \text{pour} \quad u = 0 \quad \text{ou} \quad 2\pi.$$

La valeur  $u = 0$  représente la singularité initiale au moment  $t = T(r)$ . La valeur  $u = 2\pi$  détermine une nouvelle singularité que nous allons étudier en détail dans ce travail.

Dans les calculs suivants nous mettrons

$$(12) \quad T(r) = 0 \quad \text{aussi pour} \quad r < r_0.$$

Nous avons alors la singularité initiale à  $t = 0$  non seulement pour la solution cosmologique non perturbée dans  $r > r_0$ , mais aussi pour la perturbation. La discussion détaillée montrera que le choix (12) est possible, contrairement à ce qui se passe dans la perturbation du type discuté dans [1] et [2].

Pour une valeur de  $r$  donnée les équations (11) et (12) déterminent la fonction  $t = t(R)$  représentée par la courbe de la figure 1. Pour  $u = \pi$  on a

$$(13a) \quad R = R_{\max}(r) = \frac{F}{|f|},$$

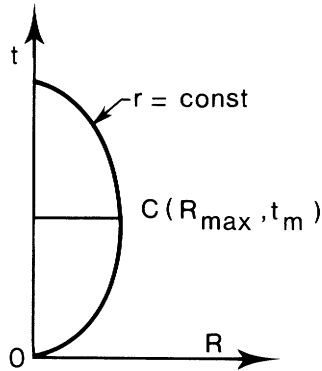


FIG. 1.

la valeur correspondante de  $t$  étant

$$(13 b) \quad t_m(r) = \frac{\pi F}{2 |f|^{3/2}}.$$

La courbe de la figure 1 est symétrique par rapport à la ligne  $t = t_m$ . Les courbes correspondant à des valeurs différentes de  $r$  sont géométriquement similaires (épicycloïdes).

Nous aurons à imposer la condition

$$(14) \quad R' > 0.$$

En effet, si  $R'$  s'annule en un point, la métrique devient singulière d'après (4). On démontre sans difficulté que cette singularité n'est qu'apparente [4]; mais on trouve alors que l'équation  $R' = 0$  définit une surface caustique, au-delà de laquelle la matière ne serait plus du type poussière ( $p \neq 0$ ) et par conséquent la solution de Tolman ne serait pas valable.

La signification géométrique de (14) est très simple : les courbes  $t = t(R)$  correspondant à des valeurs de  $r$  différentes ne se rencontrent qu'au point 0 (fig. 1). En effet, si deux courbes voisines correspondant aux valeurs  $r$  et  $r + dr$  se coupent à un point A, on a à ce point  $R' = 0$ . On voit alors immédiatement que les conditions nécessaires et suffisantes pour (14) sont les suivantes : les coordonnées du point C de la figure 1 sont des fonctions croissantes de  $r$ ,

$$(15) \quad R'_{\max} > 0, \quad t'_m > 0.$$

Nous avons alors la situation représentée par la figure 2 : les points C correspondant aux différentes valeurs de  $r$  forment la courbe ascendante C.

Nous cherchons maintenant les conditions nécessaires pour un raccordement satisfaisant en  $r = r_0$ . La fonction  $f(r)$  s'annule dans  $r > r_0$ . Nous aurons donc à demander

$$f(r) \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad r \rightarrow r_0.$$

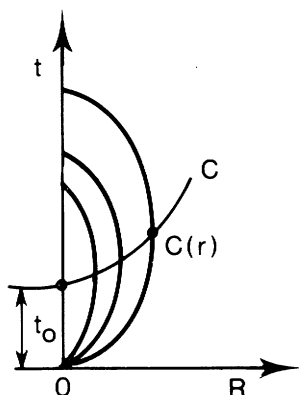


FIG. 2.

Supposons que

$$(16) \quad f(r) = -\alpha(r_0 - r)^\lambda, \quad \lambda \geq 1$$

au voisinage de  $r = r_0$ . Le calcul de  $R'$  à partir de (11) et (12) donne :

$$(17) \quad R' = \frac{A}{2} \frac{F'}{|f|} + BR'_{\max};$$

$$(18) \quad A = \frac{1}{2} \sin u \frac{u - \sin u}{1 - \cos u},$$

$$B = \frac{1}{2} (1 - \cos u) - \frac{3}{4} \sin u \frac{u - \sin u}{1 - \cos u}.$$

En tenant compte de (13 a) et (16) on trouve :

$$(17') \quad R' = \frac{F'}{|f|} \left( \frac{A}{2} + B \right) + \lambda \frac{F}{|f|} \frac{B}{r_0 - r}.$$

Quand  $f \rightarrow 0$ , la deuxième équ. (11) montre que

$$1 - \cos u = \frac{2|f|R}{F} \rightarrow 0.$$

On a donc  $u \rightarrow 0$  et par conséquent

$$1 - \cos u = \frac{u^2}{2} + \dots = \frac{2|f|R}{F}.$$

En calculant les limites de  $\frac{A}{2} + B$  et  $B$  pour  $u \rightarrow 0$ , on trouve finalement :

$$(17'') \quad R' = \frac{1}{3} R \frac{F'}{F} + \frac{\alpha\lambda}{5F} R^2 (r_0 - r)^{\lambda-1} + \dots$$

D'autre part nous avons dans  $r > r_0$  d'après (7) et (12)

$$R' = \frac{1}{3} R \frac{F'}{F}.$$

Il suffit donc de prendre  $\lambda > 1$  pour que la dérivée  $R'$  soit continue à  $r = r_0$ .

Finalement nous allons demander la régularité de la métrique en  $r = 0$ , au moins dans un certain intervalle  $0 < t < t_1$ . Une première condition est :

$$(19 a) \quad R_{\max}(r) \rightarrow 0 \quad \text{pour } r \rightarrow 0.$$

La deuxième condition est

$$(19 b) \quad \lim t_m(r) > 0 \quad \text{pour } r \rightarrow 0.$$

Dans les calculs suivants nous prendrons

$$(20) \quad F = \alpha r^3 \quad \text{aussi pour } r < r_0.$$

Les relations (13 a) et (13 b) montrent alors que, pour satisfaire aux conditions (19 a) et (19 b) on doit avoir

$$(21 a) \quad f(r) \sim r^2 \quad \text{au voisinage de } r = 0.$$

Une forme particulièrement simple de  $f(r)$  satisfaisant aux conditions (16) et (21 a) sera donc la suivante :

$$(21) \quad f = -\beta \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^2.$$

Remarquons que la constante  $\beta$  doit satisfaire une condition déduite de la restriction  $1 + f > 0$  imposée par la première équ. (4). Le maximum de la fonction  $-f$  donnée par (21) étant égale à  $\frac{\beta}{16}$ , cette restriction est :

$$(21 b) \quad \beta < 16.$$

Nous allons étudier la solution déterminée dans le domaine  $r < r_0$  par les relations (12), (20) et (21). D'abord nous allons déduire l'équation de la courbe  $c$  de la figure 2. Avec (20) et (21), on trouve pour les quantités  $R_{\max}$  et  $t_m$  définies par (13 a) et (13 b)

$$(22) \quad R_{\max} = \frac{\alpha r_0^2 r}{\beta \left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^2}, \quad t_m = \frac{t_0}{\left( 1 - \frac{r}{r_0} \right)^3};$$

$$(23) \quad t_0 = \frac{\pi \alpha r_0^3}{2\beta^{3/2}}; \quad \frac{t_m}{t_0} \geq 1.$$

En éliminant  $1 - \frac{r}{r_0}$  entre les deux équations (22) on trouve comme équation de la courbe  $c$  :

$$(24) \quad R_{\max} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\beta} t_0 \left( \frac{t_m}{t_0} \right)^{2/3} \left\{ \left( \frac{t_m}{t_0} \right)^{1/3} - 1 \right\}.$$

Examinons maintenant la singularité de la métrique que nous avons obtenue dans  $r \leq r_0$ . La métrique est évidemment régulière pour  $0 < r < r_0$  dans le domaine  $0 < u < 2\pi$ . D'autre part nous avons montré que  $R'$ , donc aussi  $R$  reste fini et continu sur  $r = r_0$ . Ceci signifie que la métrique est régulière et continue aussi sur  $r = r_0$ .

Un calcul simple à partir de la relation (17'') montre que  $R''$  est discontinu sur  $r = r_0$ . Il y a donc des discontinuités des dérivées premières des  $g_{\lambda\mu}$ . Mais il est facile de voir que ces discontinuités ne sont pas essentielles. En effet, les discontinuités essentielles des  $g_{\lambda\mu,\nu}$  ont comme conséquence l'existence d'une couche simple de matière [5], c'est-à-dire la présence dans l'expression du tenseur de matière d'un terme contenant comme facteur la fonction  $\delta(r - r_0)$ . Or, la solution que nous avons déterminée dans  $r < r_0$  a, d'après (5), une densité de matière qui est finie et même continue sur  $r = r_0$ .

Quand  $r \rightarrow 0$ , on déduit de (11) :

$$(25) \quad R \rightarrow \frac{\alpha r_0^2 r}{2\beta} (1 - \cos u) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \frac{\alpha r_0^3}{2\beta^{3/2}} (u - \sin u).$$

D'autre part on a la relation générale

$$(26) \quad dR = R' dr + \dot{R} dt.$$

Pour la dérivée  $\dot{R}$  on trouve en partant de (11) :

$$(27) \quad \dot{R} = \sqrt{|f|} \frac{\cos \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}}.$$

On a donc

$$\dot{R} \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad R' dr \rightarrow dR \quad \text{pour} \quad r \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 < u < 2\pi.$$

Il s'ensuit que la métrique (1) tend pour  $r \rightarrow 0$  vers la forme

$$ds^2 \rightarrow ds_0^2 = dt^2 - dR^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

qui est la métrique minkowskienne. Notre métrique reste donc régulière pour  $r \rightarrow 0$  et  $0 < u < 2\pi$ . Le domaine de variation correspondant de  $t$  est d'après (25) :

$$(28) \quad 0 < t < 2t_0.$$



Il nous reste à étudier la nouvelle singularité qui se présente pour  $u = 2\pi$ . On déduit de (11) avec (12), (20) et (21) :

$$(29) \quad R = 0, \quad t = \frac{2t_0}{\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^3} \quad \text{pour} \quad u = 2\pi.$$

La première relation signifie que cette singularité se trouve au centre de symétrie. La deuxième relation montre que la singularité n'existe que pour  $t > 2t_0$ , faisant son apparition au moment  $t = 2t_0$ .

Il est facile de déterminer la masse contenue dans cette singularité à un moment  $t > 2t_0$  donné. Il suffit de trouver la valeur de  $r$  pour laquelle on a  $u = 2\pi$  au moment  $t$ . La deuxième des équations (29) nous donne :

$$(30) \quad \frac{r}{r_0} = 1 - \left(\frac{2t_0}{t}\right)^{1/3}.$$

La masse  $M(t)$  de la singularité au moment  $t$  est égale à la masse contenue à l'intérieur de la sphère de rayon  $r$ . La relation (6) nous donne

$$(31) \quad \frac{\kappa}{4\pi} M(t) = \alpha r^3 = \alpha r_0^3 \left\{ 1 - \left(\frac{2t_0}{t}\right)^{1/3} \right\}^3.$$

On a  $M = 0$  pour  $t = 2t_0$ , en accord avec la remarque précédente d'après laquelle cette singularité apparaît au moment  $t = 2t_0$ . On trouve aussi pour  $t \rightarrow \infty$  :

$$(32) \quad M(\infty) = \frac{4\pi}{\kappa} \alpha r_0^3,$$

ce qui signifie que toute la masse contenue à l'intérieur de la perturbation arrive finalement à la singularité.

Nous allons montrer que cette singularité est entourée par un horizon ayant l'équation asymptotique

$$(33) \quad R \rightarrow \alpha r_0^3 \quad \text{pour} \quad t \rightarrow \infty.$$

En mettant dans (1)  $ds = 0$ ,  $d\theta = d\varphi = 0$  on trouve l'équation différentielle des géodésiques nulles radiales :

$$(34) \quad \frac{dt}{dr} = \pm \frac{R'}{\sqrt{1+f}}.$$

A l'aide de la relation (26) on écrit l'équation (34) sous la forme

$$(35) \quad \frac{dR}{dt} = \pm \sqrt{1+f} + \dot{R}.$$

La valeur de la dérivée  $\dot{R}$  est donnée par (27).

Nous sommes intéressés à la région déterminée par

$$(36) \quad t \gg t_0, \quad R \approx \alpha r_0^3.$$

Les équations (11) écrites sous la forme

$$(37) \quad u - \sin u = \frac{\pi t}{t_0} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^3, \quad R = \frac{\alpha r_0^2 r}{2\beta \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^2} (1 - \cos u)$$

montrent que dans la région (36) on a

$$1 - \frac{r}{r_0} \ll 1; \quad u = 2\pi - \varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1.$$

On déduit alors de (37) :

$$1 - \frac{r}{r_0} = \left(\frac{2t_0}{t}\right)^{1/3} + O(\varepsilon^3), \quad \frac{\varepsilon}{1 - \frac{r}{r_0}} = \sqrt{\frac{4\beta R}{\alpha r_0^3}} \left\{1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\right\} + O(\varepsilon^2).$$

En introduisant ces expressions dans (35) on trouve finalement

$$(38) \quad \frac{dR}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{\alpha r_0^3}{R}} \left\{1 - \frac{3}{2} \left(\frac{2t_0}{t}\right)^{1/3}\right\} + O(\varepsilon^2).$$

Nous avons donc sur la ligne  $R = \alpha r_0^3$  les deux directions nulles suivantes :

$$(39) \quad \left(\frac{dR}{dt}\right)_1 = \frac{3}{2} \left(\frac{2t_0}{t}\right)^{1/3} + \dots, \quad \left(\frac{dR}{dt}\right)_2 = -2 + \dots$$

La valeur  $\left(\frac{dR}{dt}\right)_1$  montre qu'il y a une géodésique radiale nulle — donc aussi une surface caractéristique à symétrie sphérique — située à gauche de la ligne  $R = \alpha r_0^3$  et tangente asymptotiquement à cette ligne pour  $t \rightarrow \infty$ . Cette surface caractéristique est l'horizon entourant la singularité.

Intuitivement on s'attendrait à ce que cet horizon passe par le point ( $R = 0, t = 2t_0$ ) où fait son apparition la singularité. Mais ceci est à vérifier par l'intégration exacte ou numérique de l'équation (34).

### RÉFÉRENCES

- [1] A. PAPAPETROU, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **24**, 1976, p. 165.
- [2] I. D. NOVIKOV, *Soviet Astronomy, A. J.*, t. **8**, 1965, p. 857.
- [3] R. C. TOLMAN, *Proc. Nat. Acad. (U. S. A.)*, t. **20**, 1934, p. 169.
- [4] A. PAPAPETROU et A. HAMOUI, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **6**, 1967, p. 343.
- [5] A. PAPAPETROU et A. HAMOUI, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **9**, 1968, p. 179.

(Manuscrit reçu le 8 mars 1978)