

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

P. IGLÉSIAS

## Équilibres statistiques et géométrie symplectique en relativité générale

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 36, n° 3 (1982), p. 257-270

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1982\\_\\_36\\_3\\_257\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1982__36_3_257_0)

© Gauthier-Villars, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# Équilibres statistiques et géométrie symplectique en relativité générale

par

P. IGLÉSIAS

Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Marseille

---

RÉSUMÉ. — Nous donnons une construction géométrique des états statistiques d'équilibre d'un système de particules dans le champ gravitationnel en relativité générale. Grâce à une méthode de localisation des variables, on donne l'expression des grandeurs thermodynamiques associées, et on montre la compatibilité de cette description avec un modèle macroscopique de milieu continu relativiste pour une certaine valeur de la fonction énergie-libre.

---

## INTRODUCTION

L'étude thermodynamique des milieux continus en *relativité générale* s'est développée suivant deux points de vue : le microscopique (théorie cinétique) et le macroscopique : définitions de modèles phénoménologiques de milieux matériels. Nous montrons dans cet article que le point de vue microscopique et le point de vue macroscopique développé dans [7] [2] coïncident lors de la description de l'équilibre.

Le point de vue microscopique que nous choisissons est celui de la mécanique statistique : définition des états de Gibbs dans leur formulation *symplectique* ; choix justifié par le fait que les mouvements d'un point matériel soumis au champ de gravitation en relativité générale, comme en mécanique classique, constituent une variété symplectique de dimension 6. Cette remarque nous permet entre autre de définir les espaces des phases

d'un système relativiste qui, comme en mécanique classique, sont des variétés de dimension 6 (et non 7 ou 8), cartes locales de l'espace de mouvements.

Le rôle de l'énergie est joué par la grandeur conjuguée du groupe à un paramètre assurant la stationarité du champ gravitationnel, ce paramètre étant interprété comme le *temps thermodynamique*.

La méthode de comparaison utilise d'une part la construction, par la méthode de la susceptibilité gravitationnelle, d'un tenseur impulsion  $T_{\mu\nu}$  associé à l'état de Gibbs et d'autre part la construction des vecteurs flux d'entropie, flux de particules, par une méthode utilisant les polarisations de l'espace des mouvements. Cette méthode est esquissée au dernier paragraphe; elle en fait l'expression géométrique de la théorie cinétique de l'équilibre.

On donne, enfin, l'expression de la fonction énergie libre qui permet au modèle macroscopique de décrire les états d'équilibre d'un fluide relativiste et ses mouvements non dissipatifs (fluide parfait).

## § 1. TENSEUR IMPULSION ÉNERGIE ASSOCIÉ A UN ÉTAT DE GIBBS EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

L'étude statistique d'un gaz de particules indépendantes en relativité générale se ramène, comme en mécanique Newtonienne, à l'étude statistique des mouvements d'une seule particule dans le champ de gravitation. Nous nous restreindrons donc à ce cas.

Comme nous le savons [8], l'espace des mouvements d'une particule dans le champ de gravitation en relativité générale (moyennant une hypothèse raisonnable <sup>(1)</sup>) peut être muni d'une structure de variété symplectique  $\mathcal{M}_6$  quotient d'un espace d'évolution  $\mathcal{V}_7$  par le feuilletage caractéristique d'une 2-forme pré-symplectique  $\sigma_{\mathcal{V}}$ : l'espace d'évolution  $\mathcal{V}_7$  est le sous-fibré tangent des vecteurs de l'espace temps  $V_4$  de longueur <sup>(2)</sup>  $m$ , où  $m$  est la masse de la particule. C'est une variété de dimension 7, ainsi que son analogue de la mécanique Newtonienne

$$y = (X, P) \in \mathcal{V}_7 \Leftrightarrow X \in V_4, \quad P \in T_X(V_4) : \bar{P}P = m^2 \quad (3)$$

<sup>(1)</sup> Cette hypothèse étant que la particule ne remonte pas le temps, c'est-à-dire que l'espace temps admette une orientation temporelle globale.

<sup>(2)</sup> La signature de  $g$ , tenseur métrique fondamental, est choisie (+ - - -).

<sup>(3)</sup> La barre désigne le covecteur  $[dX]_{\mu} = g_{\mu\nu}dX^{\nu}$ .

La 2-forme  $\sigma_{\mathcal{V}}$  est définie par :

$$\sigma_{\mathcal{V}}(dy)(\delta y) = \overline{\delta X} \hat{dP} - \overline{dX} \hat{\delta P}$$

où  $\hat{dP}$  est le vecteur de composante :

$$[\hat{dP}]^{\mu} = dP^{\mu} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} P^{\nu} dX^{\rho}$$

Les mouvements de la particule, courbes intégrales du champ d'espaces vectoriels  $[y \mapsto \ker \sigma_{\mathcal{V}}]$ , sont évidemment les mouvements géodésiques. Ainsi l'analogie est totale entre la relativité générale et la mécanique newtonienne : il y a permanence de la structure symplectique de l'espace des mouvements de la particule.

Nous pouvons donc appliquer au cas d'une (ou plusieurs) particule(s) soumise(s) à un champ de gravitation en relativité générale la théorie et les méthodes de la mécanique statistique dans son formalisme symplectique, c'est-à-dire :

un état statistique d'une (ou plusieurs) particule(s) dans le champ de gravitation en relativité générale est une *densité de probabilité* définie sur son espace des mouvements.

Ce qui peut s'écrire :

$$\int_{\mathcal{M}_6} \rho \lambda(x) dx = 1$$

où  $[x \mapsto \lambda]$  est la *densité de Liouville* associée à la forme symplectique  $\sigma_{\mathcal{M}}$  définie sur  $\mathcal{M}_6$  et  $[x \mapsto \rho]$  est une fonction réelle à valeurs positives.

D'autre part, l'existence d'équilibre est comme nous le savons associée étroitement à l'existence de *groupes dynamiques* agissant sur l'espace mouvements, c'est-à-dire des groupes de transformations de l'espace  $\mathcal{V}_7$  qui respectent la structure pré-symplectique (comme c'est le cas en mécanique newtonienne des translations temporelles pour les systèmes conservatifs). Dans le cas relativiste, ce sont des isométries de la métrique d'univers, leur action infinitésimale sur l'espace temps définissent des *vecteurs de Killing*.

Si nous notons  $\Theta$  un élément de l'algèbre de Lie du groupe dynamique et  $\Theta_{\mathcal{V}}(X) = \theta$  son action infinitésimale sur  $V_4$ ,  $[X \mapsto \theta]$  est un champ de vecteur de  $V_4$ , que l'on interprétera comme le vecteur température, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_{\Theta_{\mathcal{V}}}(g) = 0 \\ \text{ou} \\ \hat{\partial}_{\mu} \theta_{\nu} + \hat{\partial}_{\nu} \theta_{\mu} = 0 \end{array} \right.$$

$g$  est la métrique d'espace temps et  $\mathcal{L}_{\Theta_V}(g)$  la dérivée de Lie de  $g$  par le champ  $[x \mapsto \theta]$ ,  $\hat{\delta}$  représente la dérivation covariante.

La grandeur conservée associée à l'action de  $\Theta$  sur l'espace temps est le *moment M du groupe* engendré par  $\Theta$  [8], c'est elle qui joue le rôle de l'énergie de la mécanique newtonienne à condition de considérer que l'action de  $\Theta$  sur  $V_4$  définit l'évolution temporelle du système. On supposera alors  $\theta$  du genre temps, il définira le futur, et on posera :

$$\bar{\theta}\theta = \beta^2$$

le moment  $M$ , c'est-à-dire l'énergie de la particule définie par l'état de Gibbs considéré, est donné par :

$$M\Theta = \bar{\theta}P$$

L'état de Gibbs associé à ce groupe à un paramètre d'isométries de l'espace temps est donné par la formule classique de la mécanique statistique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = e^{-\bar{\theta}P - z} \\ z = \text{Log} \left\{ \int_{\mathcal{M}_6} e^{-\bar{\theta}P} \lambda(x) dx \right\} \end{array} \right\}$$

$z$  est appelé *potentiel de Planck* ou fonction de partition. Ceci nécessite évidemment que l'intégrale ci-dessus converge, ce qui sera assuré si le gaz est contenu dans une boîte ayant, naturellement, les symétries de  $\theta$  (4).

Nous allons formuler géométriquement ces hypothèses, en introduisant les variables adaptées qui seront utilisées dans la suite pour le calcul explicite des grandeurs thermodynamiques associées à l'état de Gibbs du système dynamique considéré.

a) L'espace temps  $V_4$  est un espace temps stationnaire au sens de Lichnerowicz [6] : il existe un groupe à un paramètre d'isométries opérant sur  $V_4$ , les orbites de ce groupe sont orientées dans le temps et constituent une variété  $V_3$  de dimension 3 que nous appellerons *espace de configuration*. Nous noterons  $q$  un point de  $V_3$  et  $\Pi : x \mapsto q$  la projection naturelle de  $V_4$  à  $V_3$ .

b) La boîte  $B$  est un ouvert relativement compact de  $V_3$ , le tube de  $V_4$  qui se projette sur  $B$  sont les lieux d'espace temps qui peuvent être occupés par la particule :

(4) Cette condition est suffisante, il est possible toutefois que pour certaines distributions  $[q \rightarrow \beta]$  elle ne soit pas nécessaire, le champ de gravitation jouant le rôle de la boîte, les trous noirs par exemple ?

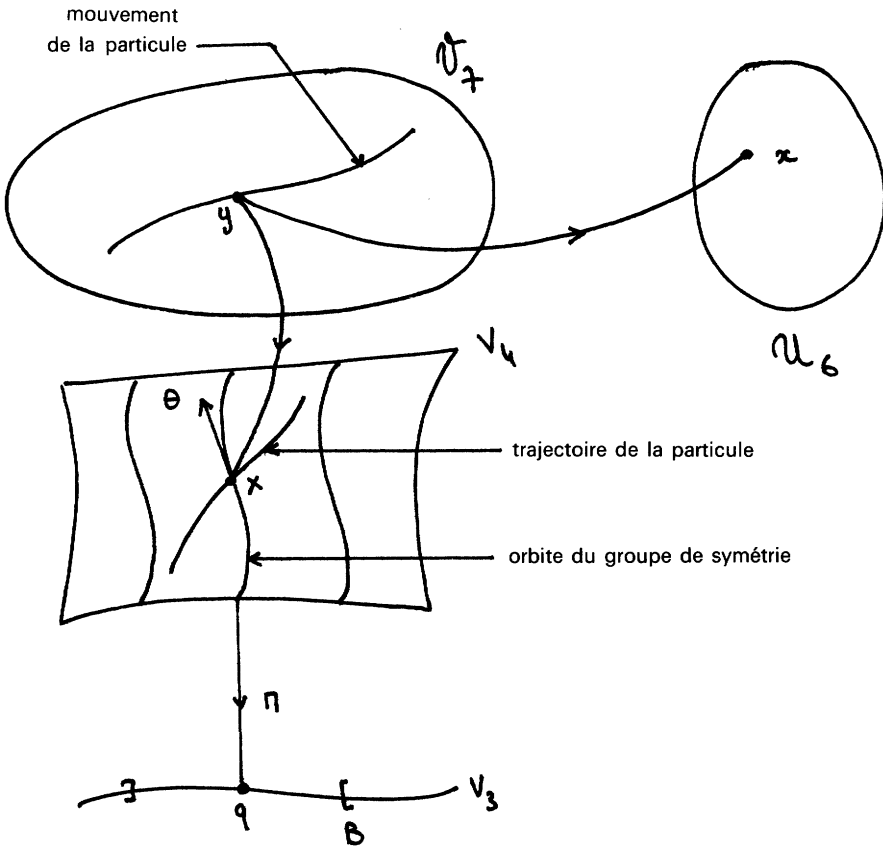


FIG. 1.

Il existe une méthode (Souriau [9]), méthode de la *susceptibilité gravitationnelle*, qui permet d'associer à un état statistique d'une particule dans le champ de gravitation un 2-tenseur symétrique  $T_{\mu\nu}$  vérifiant les équations d'Euler :

$$\hat{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0$$

ce tenseur assimilé au *tenseur impulsion-énergie* d'un milieu continu permet d'interpréter un état statistique d'une particule (ou plusieurs) comme un milieu matériel (un fluide) soumis au champ de gravitation.

Il est défini par la formule :

$$\frac{1}{2} \int_{V_4} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \text{vol}_4 = \int_{U_6} \varphi \rho \lambda(x) dx$$

où  $\varphi$  est un hamiltonien défini sur l'espace des mouvements par :

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_x \delta g_{\mu\nu} P^\mu \frac{dX^\nu}{dS} dS$$

l'intégrale étant prise sur la trajectoire du mouvement  $x$ . Nous allons calculer ce tenseur pour un état de Gibbs.

### Calcul du tenseur impulsion énergie pour un état de Gibbs.

Il est commode pour le calcul de  $z$  et  $T$  d'introduire les variables adaptées :

Grâce à la projection  $\Pi$  de  $V_4$  à  $V_3$ , l'espace d'évolution  $\mathcal{V}_7$  est fibré sur le tangent à  $V_3$  :  $TV_3$  par la projection :

$$\begin{pmatrix} X \\ P \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$

où  $q$  est la projection de  $X$  et  $p$  la projection de  $P$  par l'application linéaire tangente de  $\Pi$ , c'est-à-dire :

$$p^i = \frac{\partial q^i}{\partial X^\mu} P^\mu$$

les variables  $(q, p)$  sont appelées variables adaptées. Il est facile de vérifier alors que les points de  $\mathcal{V}_7$  qui se projettent sur un même point  $(q, p)$  de  $TV_3$  sont les orbites, de dimension 1, du groupe d'isométries opérant sur  $\mathcal{V}_7$ .

Ainsi, étant donnée une section locale  $s : q \mapsto x$  de  $V_4$  au-dessus de la boîte  $B$  il existe une section associée, de  $\mathcal{V}_7$  au-dessus de  $TB$ , la restriction de la projection de  $\mathcal{V}_7$  à  $\mathcal{U}_6$  au domaine de valeur de cette section est un difféomorphisme à valeur dans un ouvert de  $\mathcal{U}_6$  : on oublie les mouvements qui ne coupent pas la section  $s$ , nous ferons alors l'hypothèse <sup>(5)</sup> que cet ouvert est dense dans  $\mathcal{U}_6$  et ainsi les calculs sur  $\mathcal{U}_6$  peuvent être ramenés sur  $TB$ .

Cette construction est l'analogue exact de la construction *des espaces de phases* en mécanique newtonienne, la section  $s$  revient en effet à choisir une date arbitraire relativement au *temps thermodynamique* défini par le vecteur  $\theta$ . *Ainsi l'espace des phases d'une particule soumise au champ de gravitation en relativité générale est, comme en mécanique newtonienne, une variété différentielle de dimension 6 et s'identifie à un ouvert du fibré tangent à l'espace de configuration  $V_3$ .* Ces remarques devraient permettre

<sup>(5)</sup> Cela contient l'hypothèse des cœurs durs, des chocs élastiques, cela suppose qu'il n'existe pas de trous noirs dans le domaine d'espace temps considéré, etc.

d'unifier les définitions des espaces des phases en relativité, dont la dimension varie, suivant certains auteurs, entre 7 et 8.

Le vecteur P s'écrit en terme de variables adaptées :

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta}(m^2 + \gamma(p)(p))^{1/2} - A(p) \\ p \end{bmatrix}$$

où

a)  $\beta = [\theta^\mu \theta_\mu]^{1/2}$  est une fonction de  $q$  uniquement.

b)  $\gamma = -h^{-1}$ ,  $h$  est la conformation [2], c'est-à-dire la projection par  $\Pi$  du tenseur contravariant  $g^{-1}$  :

$$h^{ij} = q^{\mu\nu} \partial_\mu q^i \partial_\nu q^j$$

$\gamma$  munit  $V_3$  d'une structure de variété riemannienne positive.

c)  $A$  est un covecteur défini sur  $V_3$  comme l'image réciproque par la section  $s$  du covecteur de  $V_4$  :  $\frac{1}{\beta^2} \bar{\theta}$

$$A^i = \frac{1}{\beta^2} \theta_\mu \partial_i X^\mu$$

Le moment  $\bar{\theta}P$  s'écrit aussi en termes de variables adaptées :

$$\bar{\theta}P = \beta(m^2 + \gamma(p)(p))^{1/2}$$

La forme présymplectique  $\sigma_\gamma$  qui nous permettra d'écrire les équations du mouvement, et la densité de Liouville, s'écrit en posant :

$$X = \begin{pmatrix} \tau \\ q \end{pmatrix}$$

le réel  $\tau$  représente le « *temps thermodynamique* »

$$\begin{aligned} & \sigma_\gamma(dy)(\delta y) \\ &= \left\langle \hat{\delta}p + [\delta\tau + A(\delta q)] [m^2 + \gamma(p)(p)]^{1/2} \text{grad } \beta, \left[ 1 - \frac{\beta}{[m^2 + \gamma(p)(p)]^{1/2}} p \cdot A \right] dq \right. \\ & \left. - \frac{\beta p d\tau}{(m^2 + \gamma(p)(p))^{1/2}} \right\rangle - \langle \text{symétrique} \rangle + \beta [m^2 + \gamma(p)(p)]^{1/2} \Omega(dq)(\delta q) \end{aligned}$$

La forme  $\Omega$  est la dérivée extérieure de  $A$  (6) :

$$\Omega_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i$$

(6) En fait,  $\theta/\beta^2$  est une forme de connexion sur  $V_4$  considéré comme fibré principal sur  $V_3$  et  $\Omega$  sa forme de courbure.



et le symbole  $\hat{\delta}$  représente la différentiation covariante sur  $V_3$  par rapport à  $\gamma$ . Les équations du mouvement sont alors données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} dq = \frac{p}{\frac{1}{\beta} [m^2 + \gamma(p)(p)]^{1/2} - A(p)} \\ \frac{dp}{d\tau} + \left[ 1 - A \left( \frac{\hat{d}q}{d\tau} \right) \right] (m^2 + \gamma(p)(p))^{1/2} \text{grad} \beta + \beta (m^2 + \gamma(p)(p))^{1/2} \cdot h \left[ \Omega \left( \frac{dq}{d\tau} \right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

La restriction de  $\sigma_{\gamma}$  à  $\tau = cst$  (on fait  $d\tau = \delta\tau = 0$ ) permet de calculer la densité de Liouville et, combinée avec la première équation du mouvement et la formule donnant l'expression du tenseur énergie-impulsion, permet le calcul de  $z$  et  $T$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} z = \text{Log} \left\{ \int_{\mathbf{B}} l \text{vol}_3 \right\} \\ l = 4\pi m^3 \frac{K_2(m\beta)}{m\beta} \end{array} \right.$$

$\text{Vol}_3$  est le volume riemanien défini par  $\gamma$  et  $K_2$  la fonction de Bessel modifiée d'ordre 2.

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} T = \varepsilon \bar{U} \otimes \bar{U} - \mathcal{P}(g - \bar{U} \otimes \bar{U}) \quad U = \frac{1}{\beta} \theta \\ \varepsilon = -l e^{-z} \frac{\partial z}{\partial \beta} \\ \mathcal{P} = l \frac{e^{-z}}{\beta} \end{array} \right.$$

Ceci est l'expression du tenseur impulsion énergie d'un fluide de densité spécifique  $\varepsilon$  et de pression  $\mathcal{P}$ .

## § 2. ENTROPIE SPÉCIFIQUE ET FLUX D'ENTROPIE

Nous savons que l'entropie d'un état statistique est donné par :

$$s = - \int_{\mathcal{W}_6} \rho \text{Log} \rho \lambda(x) dx$$

en remarquant que la densité définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q \mapsto n \text{vol}_3 \\ n = l e^{-z} \end{array} \right.$$

est une densité de probabilité sur  $\mathbf{B}$  que nous pouvons interpréter comme

la *probabilité de présence de la particule* ou *densité nombre de particules* :

$$\int_{\mathbf{B}} n \text{ vol}_3 = 1$$

on peut construire la densité d'entropie définie sur  $V_3$  par :

$$q \mapsto \sigma = s.n \text{ vol}_3$$

l'intégrale de  $\sigma$  étant l'entropie totale du système :

$$\int_{\mathbf{B}} \sigma = s$$

Cette densité définit par image réciproque sur  $V_4$  un flux que nous appellerons flux d'entropie, caractérisé par un vecteur  $S$  tel que :

$$\Pi_-(\sigma) = \text{vol}_4(S)$$

le calcul montre alors que  $S$ ,  $T$  et  $\theta$  sont liés par l'équation :

$$S^\mu = T^\mu \theta^\nu - F \theta^\mu$$

où  $F$  est la fonction définie sur  $V_3$  par :

$$F = -z l \frac{e^{-z}}{\beta}$$

La construction de  $S$  a comme conséquence immédiate l'équation de conservation de l'entropie :

$$\hat{\partial}_\mu S^\mu = 0$$

### § 3. COMPARAISON ENTRE UN MODÈLE MACROSCOPIQUE ET LA THÉORIE STATISTIQUE

L'expression du vecteur flux d'entropie suggère une analogie entre cette construction et le modèle phénoménologique de milieu continu proposé par J. M. Souriau, C. Vallé et l'auteur dans les articles [7] [11] [2], dans ce modèle est introduite une fonction arbitraire  $F$  des variables indépendantes  $(n, \beta)$  où  $n$  représente le nombre de particules et  $\beta$  la température réciproque  $\beta = 1/kT$ , de telle sorte que le tenseur impulsion énergie s'écrive à l'équilibre :

$$T = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) \bar{U} \otimes \bar{U} - \left( \frac{\partial F}{\partial n} n - F \right) (g - \bar{U} \otimes \bar{U})$$

et le vecteur flux d'entropie :

$$S^\mu = T^\mu \theta^\nu - F \theta^\mu$$

avec les équations de conservation :

$$\hat{\partial}_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \hat{\partial}_\mu S^\mu = 0$$

Si nous posons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} (n, \beta) \mapsto z = \text{Log} \left( \frac{l}{n} \right) \\ l = 4\pi m^3 \frac{K_2(m\beta)}{m\beta} \end{array} \right.$$

$n$  et  $\beta$  sont prises ici comme variables indépendantes.

Et si nous posons :

$$F = -n \frac{z}{\beta}$$

la densité spécifique  $\varepsilon$  et la pression spécifique  $\mathcal{P}$  du tenseur impulsion énergie associé à l'état de Gibbs s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = -n \frac{\partial z}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} (\beta F) \\ \mathcal{P} = -\frac{n^2}{\beta} \frac{\partial z}{\partial n} = \frac{\partial F}{\partial n} n - F \end{array} \right.$$

ces expressions étant calculées pour la valeur  $n$  et  $\beta$  au point  $q$ , les expressions de  $T$  données par les deux modèles coïncident alors. Nous pouvons donc conclure que le modèle macroscopique donné dans [7] et [2] est compatible avec la mécanique statistique dans la description de l'équilibre et c'est la mécanique statistique qui nous fournit la valeur de la fonction énergie libre  $F$  en terme des variables indépendantes  $(n, \beta)$  :

$$F = -\frac{n}{\beta} \text{Log} \left\{ \frac{1}{n} 4\pi m^3 \frac{K_2(m\beta)}{m\beta} \right\}$$

Ainsi, le vecteur  $\theta$  de l'espace temps qui définit l'action infinitésimale du groupe à un paramètre de symétries s'interprète bien comme le vecteur température, sa longueur  $\beta$  est la température réciproque  $1/kT$ , sa direction  $U = \theta/\beta$  définit l'évolution du milieu. D'un autre côté, la fonction arbitraire  $F$  du modèle macroscopique voit bien son nom d'énergie libre justifié, puisque c'est l'énergie libre du système au sens statistique du terme. Enfin le flux du vecteur  $T(\theta) - F\theta$  est égal à l'entropie de Boltzman de l'état statistique :

$$\int_{\text{hypersurface}} \text{vol}_4(S) = - \int_{\mathcal{M}_6} \rho \text{Log} \rho \lambda(x) dx$$

ce qui justifie son nom de vecteur flux d'entropie, l'équation de conservation :

$$\hat{\partial}_\mu S^\mu = 0$$

caractérise la non dissipation liée au caractère Killing du vecteur température.

Remarquons enfin que les définitions que nous avons posées pour comparer les deux descriptions ne sont pas arbitraires et peuvent faire l'objet d'une formulation entièrement géométrique que voici.

#### § 4. GÉOMÉTRIE DE LA THÉORIE CINÉTIQUE DE L'ÉQUILIBRE

Il est possible en choisissant une section  $s$  de  $V_4$  au-dessus de la boîte  $B$  d'associer à presque tout mouvement le point  $q$  de  $V_3$  image par la projection  $\Pi$  de l'intersection de la trajectoire de la particule et de la section  $s$  :

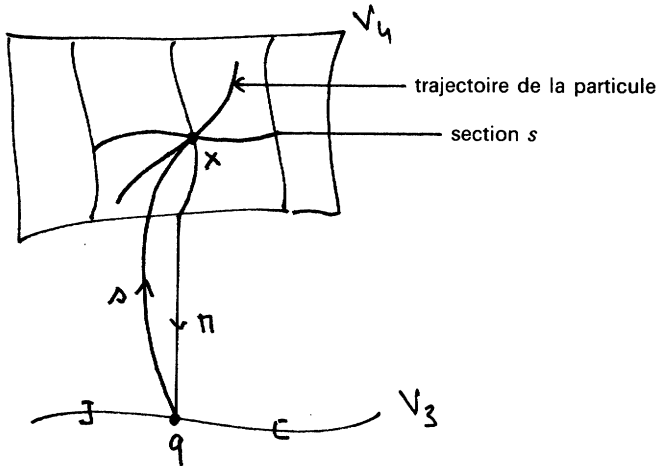


FIG. 2.

Ceci définit alors une projection  $\mathbb{P}$  de  $\mathcal{U}_6$  à  $V_3$ , il est facile de vérifier que les points  $x$  de  $\mathcal{U}_6$  qui se projettent sur un même point  $q$  de  $V_3$  constituent une sous-variété lagrangienne de  $\mathcal{U}_6$ , le feuilletage induit par  $\mathbb{P}$  est donc une polarisation de l'espace des mouvements au sens de Kostant, c'est ce qui justifie le nom d'*espace de configuration* donné à  $V_3$ .

Considérons alors une mesure de probabilité  $\alpha$  définie sur  $\mathcal{U}_6$ , son image directe sur  $V_3$  :  $\nu = \mathbb{P}(\alpha)$  est aussi une loi de probabilité qu'il est naturel de définir comme la *probabilité de présence* de la particule, en effet, l'intégrale de  $\nu$  sur un domaine  $\mathcal{D}$  de  $V_3$  est la probabilité de trouver le système dans une « configuration » quelconque de  $\mathcal{D}$ . Puisque  $V_3$  est muni naturel-

lement, par la structure riemannienne définie par  $\gamma$  (§ 1), d'un élément de volume  $\text{Vol}_3$ , on peut poser alors :

$$v = n \text{vol}_3$$

où  $[q \mapsto n]$  est une fonction positive,  $n$  s'interprète comme le nombre de particules et coïncide dans l'étude de l'équilibre avec la définition que nous avons données au § 2.

D'autre part, toute variable dynamique  $[x \mapsto u]$  (c'est-à-dire une fonction réelle définie sur l'espace des mouvements)  $\alpha$ -intégrable, définit sur  $\mathcal{U}_6$  une mesure  $\mathbb{P}$ -transportable par multiplication avec  $\alpha : [x \mapsto u \cdot \alpha]$ . Il existe alors une fonction réelle  $[q \mapsto \tilde{u}]$  définie presque partout sur l'espace de configuration  $V_3$  telle que :

$$\mathbb{P}(u \cdot \alpha) = \tilde{u} \mathbb{P}(\alpha)$$

c'est-à-dire :

$$\mathbb{P}(u \cdot \alpha) = \tilde{u} n \text{vol}_3$$

l'image réciproque par la projection  $\Pi$  de  $V_4$  à  $V_3$  de cette densité  $y$  définit un flux associé à la variable dynamique  $u$  :

$$\tilde{u} J^\mu$$

où  $J^\mu$  est défini comme le vecteur flux de particules par :

$$\Pi_*(n \text{vol}_3) = \text{vol}_4(J)$$

$J$  et  $\tilde{u}J$  vérifiant les équations de conservation :

$$\hat{\partial}_\mu J^\mu = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\partial}_\mu \tilde{u} J^\mu = 0$$

C'est cette opération qui nous a permis de construire entre autre le vecteur flux d'entropie  $S$ .

Enfin, il faut remarquer que lors de l'équilibre, ces quantités sont indépendantes du choix de la section de l'espace temps et sont des grandeurs intrinsèques à l'état statistique. Elles *localisent*, sur l'espace temps, les variables dynamiques définies sur les mouvements et définissent ainsi une relation entre le microscopique et le macroscopique.

Remarquons que ceci peut être réalisé grâce à l'utilisation de densités transverses définies sur les feuilles  $\mathbb{P}^{-1}(q)$  à partir de la densité de Liouville définie sur  $\mathcal{U}_6$  et de la densité riemannienne définie par  $\gamma$  sur  $V_3$ . C'est par cette méthode que l'on a effectué les calculs explicites de  $z$ ,  $T$ , ...

## CONCLUSION

La description géométrique des équilibres statistiques d'une particule dans le champ de gravitation en Relativité générale, au sens généralisé

de la mécanique symplectique, permet de retrouver, par déduction, une description complète des équilibres cinétiques : tenseur impulsion-énergie, flux d'entropie, flux nombre de particules, équilibre thermodynamique local [1] [3] [4] [5] [10].

Par contre si on assemble autrement des équilibres thermodynamiques locaux, on obtient un modèle qui n'est pas descriptible en terme de statistique sur des particules gravitant suivant le principe des géodésiques.

En associant l'expression du tenseur impulsion-énergie et des autres grandeurs thermodynamiques, construites dans le cadre de la théorie, avec les équations d'Einstein, on a un système complet permettant de décrire non seulement des systèmes isothermes et homogènes, mais des systèmes plus compliqués, comme par exemple des étoiles doubles en rotation des galaxies..., tant qu'on peut considérer l'approximation du gaz parfait comme légitime.

En ce qui concerne la dimension des espaces des phases d'une particule dans le champ de gravitation en relativité générale, qui est souvent prise égale à 7 ou 8 suivant les auteurs, nous adoptons ici la description géométrique qui donne aux espaces de phases de ce système leur statut de « cartes locales » de l'espace des géodésiques ; ce sont alors des variétés de dimension 6, comme leurs analogues classiques, munies d'une structure symplectique de l'espace cotangent à la variété de configuration  $V_3$ .

Enfin, la formulation géométrique des équilibres statistiques permet ici de définir, nous l'avons vu, une nouvelle variable que nous appelons le *temps thermodynamique* : c'est le paramètre d'évolution du groupe de transformations engendré par le vecteur température définissant l'état de Gibbs du système, ce temps thermodynamique ne doit pas être confondu avec le temps propre de la particule. Par analogie avec la mécanique newtonienne où l'énergie est définie, pour les systèmes conservatifs, comme la grandeur conjuguée du temps, il est raisonnable de définir, dans ce cadre relativiste, *l'énergie de la particule comme la quantité conjuguée de ce temps thermodynamique*, c'est le moment, au sens de Souriau [8], du groupe à un paramètre assurant la stationarité du champ gravitationnel : cette définition originale de l'énergie d'une particule semble imposée par la nature de l'équilibre, c'est cette énergie qui est la variable figurant dans la loi de Gibbs.

Il est, toutefois, peu probable que de tels états se rencontrent, par exemple en astrophysique, la valeur de ce modèle est alors de donner une idée des états asymptotiques vers lesquels évoluent les systèmes dissipatifs.

#### REMERCIEMENTS

Les discussions que j'ai eues avec J. M. Souriau et J. M. Stewart m'ont été précieuses pour la rédaction de cet article ; je les en remercie.

## REFERENCES

- [1] J. EHLERS, *Progress in relativistic statistical mechanics, thermodynamics and continuum mechanics*.
- [2] P. IGLÉSIAS, Essai de thermodynamique rationnelle des milieux continus, *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. XXXIV, Section A, 1981.
- [3] W. ISRAËL, *Papers in honour of J. L. Synge*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
- [4] W. ISRAËL, *Non stationary irreversible thermodynamics: a causal relativistic theory*. Preping OAP-444. California Institute of Technology, Pasadena.
- [5] W. ISRAEL et J. M. STEWART, Transcient relativistic thermodynamics and kinetic theory, *Annals of Physics*, t. 118, n° 2, 1979.
- [6] A. LICHNEROWICZ, *Théories relativistes de la gravitation*, Ed. Masson, 1955.
- [7] J. M. SOURIAU, *Thermodynamique et Géométrie*, Preprint, 78/P. 1008, Centre de Physique Théorique, C. N. R. S., Luminy, Marseille.
- [8] J. M. SOURIAU, *Structure des systèmes dynamiques*, Ed. Dunod.
- [9] J. M. SOURIAU, *Structure of Dynamical Systems*, North Holland Publ. Co., à paraître.
- [10] J. M. STEWART, Non equilibrium relativistic theory, *Lecture Notes in Physics*, t. 10, Springer, Berlin, 1971.
- [11] C. VALLE, *Thermodynamique relativiste des milieux continus*, Institut de Mécanique des Fluides, Poitiers.

(Manuscrit reçu le 1<sup>er</sup> octobre 1981)