

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

SPYROS N. PNEVMATIKOS

Singularités génériques en géométrie de contact

Annales de l'I. H. P., section A, tome 41, n° 3 (1984), p. 237-253

http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1984__41_3_237_0

© Gauthier-Villars, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Singularités génériques en géométrie de contact

par

Spyros N. PNEVMATIKOS

Université de Dijon, Département de Mathématiques,
21100 Dijon, France

RÉSUMÉ. — Soit α une forme de Pfaff générique sur une variété différentiable M de dimension impaire. Nous étudions les propriétés géométriques du lieu de dégénérescence de la classe de α et nous déterminons l'algèbre des hamiltoniennes de contact admissibles pour α , i. e. les fonctions différentiables f qui possèdent un champ de contact X_f solution différentiable sur M du système d'équations : $\alpha(X_f) = f$ et $L_{X_f}\alpha \wedge \alpha = 0$.

ABSTRACT. — Let α be a generic pfaffian form on an odd dimensional differentiable manifold M . We study the geometrical properties of the singular locus of the structure (M, α) and we characterize the algebra of the admissible contact hamiltonians for (M, α) , i. e. differentiable functions f with contact vector field X_f on M , s. t. $\alpha(X_f) = f$ and $L_{X_f}\alpha \wedge \alpha = 0$.

INTRODUCTION

En Géométrie de Contact, la donnée d'une forme de Pfaff α de classe maximale sur une variété différentiable M de dimension impaire donne naissance à une dualité classique entre les fonctions différentiables et les champs de contact sur M définie par

$$\alpha(X_f) = f.$$

Si α est une forme de Pfaff quelconque sur M , l'apparition éventuelle d'un lieu de dégénérescence de sa classe, s'oppose à la réalisation de cette dualité.

L'objet de l'article est l'étude de cette dualité dans un contexte générique et l'extension des propriétés des structures symplectiques génériques, cf. [9], dans le cadre de la Géométrie de Contact.

Dans cet article, nous étudions tout d'abord les propriétés des lieux de dégénérescence de la classe des formes de Pfaff génériques en complétant l'étude correspondante de J. Martinet, cf. [4]. Plus précisément, nous déterminons les modèles locaux algébriques de ces lieux singuliers et ceci après avoir effectué l'étude analogue pour les lieux de dégénérescence du rang des couples de (1, 2)-formes différentielles. La connaissance de ces propriétés permet d'aborder le problème de la détermination des fonctions différentiables, dites *hamiltoniennes de contact admissibles*, qui réalisent la dualité précitée sur une variété M de dimension impaire munie d'une forme de Pfaff α générique. Par un procédé de *symplectisation générique*, on ramène le problème dans le cadre des structures symplectiques génériques et on obtient la caractérisation de ces fonctions par des conditions ponctuelles portant uniquement sur la partie lisse du lieu singulier de (M, α) . L'ensemble des hamiltoniennes de contact admissibles reçoit une structure très naturelle d'algèbre de Lie, structure définie par le *crochet de Lagrange générique* qui est identifié au crochet de Lagrange classique sur le lieu régulier et le prolonge sur le lieu singulier de (M, α) . L'article s'achève par la description du comportement des champs de contact associés à ces fonctions au voisinage des singularités de (M, α) .

Notons que ces singularités apparaissent aussi dans les problèmes qui concernent les structures induites sur les variétés d'états permis génériques dans un espace de phases muni d'une structure de contact, cf. [7] [8].

I. POINTS SINGULIERS DES FORMES DE PFAFF GÉNÉRIQUES

1. Préliminaires sur les formes génériques.

Soit M une variété différentiable à base dénombrable de voisinages de dimension finie n . On désigne par $\Lambda^p(M)$ l'espace des p -formes différentielles à coefficients C^∞ -différentiables sur M muni de la C^∞ -topologie de Whitney ; cette topologie fait de $\Lambda^p(M)$ un espace vectoriel topologique localement convexe et de plus un espace de Baire.

La théorie classique de transversalité affirme que les p -formes différentielles dont les k -jets sont transverses à une stratification dénombrable du fibré ${}^p T_k^* M$ des k -jets de sections de ${}^p T^* M$ constituent un ensemble partout dense dans $\Lambda^p(M)$ et de plus un ouvert dès que cette stratification est localement triviale, cf. [4].

Dans ce qui suit, on s'en servira essentiellement de la *stratification par la classe* du fibré des 1-jets de sections de T^*M qui provient par relèvement de la *stratification par le rang* du fibré $T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M$. La construction et les propriétés de ces stratifications sont données par J. Martinet dans [4]. Nous donnerons ici les conséquences qui interviendront dans notre étude.

Tout d'abord, si $(\alpha, \beta) \in \Lambda^1(M) \times \Lambda^2(M)$ alors son *espace associé* $\Delta_x(\alpha, \beta)$ est défini comme l'intersection des espaces associés $\Delta_x(\alpha)$ de α et $\Delta_x(\beta)$ de β au point x , autrement dit l'intersection des noyaux des applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} T_x M \rightarrow \mathbb{R} & & T_x M \rightarrow T_x^* M \\ X(x) \mapsto X(x) \lrcorner \alpha(x) & \text{et} & X(x) \mapsto X(x) \lrcorner \beta(x). \end{array}$$

L'ensemble des points x de M sur lesquels l'espace associé $\Delta_x(\alpha, \beta)$ n'est pas réduit à l'élément nul constitue le *lieu de dégénérescence du rang* de (α, β) :

$$\Xi(\alpha, \beta) = \{ x \in M / \text{rang}_x(\alpha, \beta) < n \},$$

le $\text{rang}_x(\alpha, \beta)$ étant précisément défini comme la codimension de l'espace $\Delta_x(\alpha, \beta)$ dans $T_x M$. Lorsque le couple (α, β) est transverse à la stratification par le rang du fibré $T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M$, alors la variété M reçoit une stratification finie et localement triviale en des sous-variétés :

$$\Xi_v(\alpha, \beta) = \{ x \in M / \alpha(x) \neq 0 \quad \& \quad \dim \Delta_x(\alpha, \beta) = v \}$$

et

$$\Xi'_v(\alpha, \beta) = \{ x \in M / \alpha(x) = 0 \quad \& \quad \dim \Delta_x(\alpha, \beta) = v \}.$$

Précisons que, si $v(v+1)/2 > n$ alors $\Xi_v(\alpha, \beta)$ est vide et si $v(v+1)/2 \leq n$ alors $\Xi_v(\alpha, \beta)$ est, si non vide, une sous-variété de codimension $v(v+1)/2$ dans M ; aussi, les $\Xi'_v(\alpha, \beta)$ sont vides sauf le $\Xi'_0(\alpha, \beta)$ en dimension paire et le $\Xi'_1(\alpha, \beta)$ en dimension impaire qui apparaissent éventuellement comme points isolés sur lesquels β est de rang maximal. L'adhérence de chaque strate est localement difféomorphe à une sous-variété algébrique de \mathbb{R}^n et vérifie :

$$\overline{\Xi_v(\alpha, \beta)} = \bigcup_{v' \geq v} \Xi_{v'}(\alpha, \beta)$$

sauf pour les strates, en dimension paire $\Xi_0(\alpha, \beta)$ dont l'adhérence contient éventuellement les points de $\Xi'_0(\alpha, \beta)$, et en dimension impaire $\Xi_0(\alpha, \beta)$ et $\Xi_1(\alpha, \beta)$ dont les adhérences peuvent contenir les points de $\Xi'_1(\alpha, \beta)$.

Nous dirons qu'un couple (α, β) de $(1, 2)$ -formes différentielles sur M est *générique* si il est transverse à la stratification par le rang du fibré $T^*M \times \overset{2}{\wedge} T^*M$. De même, nous dirons qu'une 2-forme différentielle β sur M est *générique* si elle est transverse à la stratification par le rang du fibré $\overset{2}{\wedge} T^*M$. L'ensemble des couples de $(1, 2)$ -formes différentielles, resp. des 2-formes différentielles, génériques est ouvert dense dans l'espace $\Lambda^1(M) \times \Lambda^2(M)$, resp. dans l'espace $\Lambda^2(M)$.

Rappelons que, si β est une 2-forme générique sur M alors les

$$\Sigma_c(\beta) = \{ x \in M / \dim \Delta_x(\beta) = c \}$$

définissent une stratification finie et localement triviale sur M ; plus précisément, si $c(c - 1)/2 > n$ alors $\Sigma_c(\beta)$ est vide et si $c(c - 1)/2 \leq n$ alors $\Sigma_c(\beta)$ est, si non vide, une sous-variété de codimension $c(c - 1)/2$ dans M . Signalons que, étant donné un couple (α, β) de (1, 2)-formes générique sur M , alors pour chaque valeur du corang c on a :

$$\Sigma_c(\beta) = \Xi_{c-1}(\alpha, \beta) \cup \Xi_c(\alpha, \beta)$$

sauf pour les strates $\Sigma_0(\beta)$ et $\Sigma_1(\beta)$ auxquelles il faut rajouter respectivement les points isolés de $\Xi'_0(\alpha, \beta)$ et $\Xi'_1(\alpha, \beta)$. On voit facilement que $\Xi_{c-1}(\alpha, \beta)$ est ouvert dans la strate $\Sigma_c(\beta)$ et que $\Xi_c(\alpha, \beta)$ est de codimension c dans la strate $\Sigma_c(\beta)$. Ce raffinement de la stratification induite sur M par la 2-forme générique β en celle qui est induite par le couple générique (α, β) nous sera bien utile par la suite.

2. Les équations algébriques du lieu de dégénérescence du rang d'un couple générique.

A chaque couple (α, β) de (1, 2)-formes différentielles sur M , nous associons l'idéal $\mathfrak{I}(\alpha, \beta)$ qui s'engendre dans l'anneau $\mathcal{E}(M)$ des fonctions différentiables sur M par :

$$\alpha \wedge \beta^m(X_1, X_2, \dots, X_{2m+1}) \quad \text{lorsque la dimension de } M \text{ est } 2m+1$$

ou

$$\beta^m(X_1, X_2, \dots, X_{2m}) \quad \text{lorsque la dimension de } M \text{ est } 2m,$$

où les X_i décrivent le module $\mathcal{X}(M)$ des champs de vecteurs différentiables sur M .

LEMME 1. — Soient (α, β) et (α', β') deux couples génériques de (1, 2)-formes différentielles définis respectivement sur les variétés M et M' de dimension n . Fixons deux points $a \in M$ et $a' \in M'$. Si

$$\text{rang}_a(\alpha, \beta) = \text{rang}_{a'}(\alpha', \beta')$$

alors il existe un difféomorphisme φ d'un voisinage de a sur un voisinage de a' qui conjugue les germes d'idéaux

$$\mathfrak{I}(\alpha, \beta)_{,a} = \varphi^*(\mathfrak{I}(\alpha', \beta')_{,a'}).$$

Démonstration. — On interprète, à l'aide d'un système de n champs de vecteurs linéairement indépendants en chaque point x d'un ouvert U de M , les formes extérieures $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ comme les matrices à paramètre :

$$\mathcal{A}(x) = (\alpha(x)(X_i(x)))_{i=1,2,\dots,n} \quad \text{et} \quad \mathcal{B}(x) = (\beta(x)(X_i(x), X_j(x)))_{i,j=1,2,\dots,n}$$

Puis, on associe au couple (α, β) le champ de matrices défini sur U par

$$({}^t\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x))$$

et on fait agir sur l'espace de ces matrices le groupe linéaire à paramètre $\text{Gl}_x(n)$ par

$$\mathcal{S}(x) * ({}^t\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)) = (\mathcal{S}(x){}^t\mathcal{A}(x), \mathcal{S}(x)\mathcal{B}(x){}^t\mathcal{S}(x)).$$

La stratification par le rang de l'espace de ces matrices est visiblement donnée par l'action précitée du groupe $\text{Gl}(n)$. En appliquant le lemme de germes reliés qui est démontré dans [9] et qui généralise un lemme classique de J. Mather donné dans [5], on en déduit que la transversalité des champs de matrices associés à (α, β) et (α', β') aux orbites du groupe $\text{Gl}(n)$, assure l'existence d'un changement de variable $x' = \varphi(x)$ et d'un changement de base simultané $\mathcal{S}(x)$ tels que

$$({}^t\mathcal{A}', \mathcal{B}') \circ \varphi = \mathcal{S} * ({}^t\mathcal{A}, \mathcal{B}). \quad (\square)$$

Il en résulte alors facilement que pour tous champs de vecteurs X_1, X_2, \dots, X_n on a :

— en dimension impaire $n = 2m + 1$

$$\begin{aligned} \alpha' \wedge \beta'^m(X_1 \circ \varphi^{-1}, X_2 \circ \varphi^{-1}, \dots, X_{2m+1} \circ \varphi^{-1}) \\ = \alpha \wedge \beta^m(\mathcal{S}X_1, \mathcal{S}X_2, \dots, \mathcal{S}X_{2m+1}) \end{aligned}$$

— en dimension paire $n = 2m$

$$\beta'^m(X_1 \circ \varphi^{-1}, X_2 \circ \varphi^{-1}, \dots, X_{2m} \circ \varphi^{-1}) = \beta^m(\mathcal{S}X_1, \mathcal{S}X_2, \dots, \mathcal{S}X_{2m}),$$

d'où la conclusion.

Le lieu de dégénérescence du rang d'un couple (α, β) de $(1, 2)$ -formes différentielles est identifié à l'ensemble des zéros de l'idéal $\mathfrak{I}(\alpha, \beta)$:

$$\Xi(\alpha, \beta) = \mathcal{Z}(\mathfrak{I}(\alpha, \beta)).$$

Afin de déterminer la liste des équations canoniques qui définissent localement le lieu $\Xi(\alpha, \beta)$ dans le cas générique, nous allons classifier les germes de couples génériques à l'aide de la relation d'équivalence « germes reliés » introduite dans [9] et puis nous en tirerons la liste des modèles locaux des générateurs de $\mathfrak{I}(\alpha, \beta)$. Nous dirons par la suite que les germes de (α, β) en a et de (α', β') en a' sont *reliés* lorsque leurs champs de matrices associés sont reliés au sens de la relation (\square) . En appliquant le lemme de germes reliés de [9] dans ce contexte on a :

LEMME 2. — *Soit (α, β) un couple générique de $(1, 2)$ -formes différentielles sur une variété M de dimension n . Si en un point a de M le rang de (α, β) est $2s$, resp. $2s + 1$, et la forme α ne s'annule pas en ce point, alors le germe*

de (α, β) en a est relié au modèle défini sur une carte centrée en ce point par :

$$(\alpha_\sigma, \beta_\sigma) = \left(dx_{2\sigma-1} + \sum_{2\sigma < k \leq n} x_{\tau'(k)} dx_k, \right. \\ \left. \sum_{1 \leq \ell \leq \sigma} dx_{2\ell-1} \wedge dx_{2\ell} + \sum_{2\sigma < i < j \leq n} x_{\tau(i,j)} dx_i \wedge dx_j \right)$$

resp.

$$(\alpha'_\sigma, \beta'_\sigma) = \left(dx_{2\sigma+1}, \sum_{1 \leq \ell \leq \sigma} dx_{2\ell-1} \wedge dx_{2\ell} + \sum_{2\sigma < i < j \leq n} x_{\tau(i,j)} dx_i \wedge dx_j \right)$$

où

$$\tau : \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 / 2\sigma < i < j \leq n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

et

$$\tau' : \{k \in \mathbb{N} / 2\sigma < k \leq n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$$

sont des applications injectives fixées avec $\tau'(k) \neq \tau(i, j)$.

Si la forme α s'annule au point considéré a alors le germe du couple (α, β) est relié au modèle :

$$(\alpha'_n, \beta'_n) = \left(\sum_{1 \leq k \leq n} x_k dx_k, \sum_{\ell \leq \ell \leq n/2} dx_{2\ell-1} \wedge dx_{2\ell} \right)$$

où n' désigne le plus grand entier pair inférieur ou égal à n .

Remarque. — On choisit τ et τ' injectives pourvu que $c(c-1)/2 \leq n$ où $c = n - 2\sigma$, et ce choix assure la généralité des modèles.

A partir des modèles précités et par un simple calcul on détermine les générateurs des leurs idéaux associés et par conséquent on obtient, à un difféomorphisme près, l'expression locale des générateurs de l'idéal associé à tout couple générique, d'où le :

THÉORÈME 3. — Soit (α, β) un couple générique de (1, 2)-formes différentielles sur une variété M de dimension n . Le lieu $\Xi(\alpha, \beta)$ est défini localement en un point a de M par :

a) En dimension paire $n = 2m$ et lorsque

$$\text{rang}_a(\alpha, \beta) = 2\sigma \quad \text{ou} \quad \text{rang}_a(\alpha, \beta) = 2\sigma + 1,$$

$$\sum_{\mathcal{P}} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} x_{\tau(\{i, j\})} = 0 \quad (\text{I})$$

où \mathcal{P} décrit l'ensemble des partitions en parties de deux éléments de

$$\{2\sigma + 1, 2\sigma + 2, \dots, 2m\} \quad \text{et} \quad \tau(\{i, j\}) = \tau(i, j) \quad \text{ou} \quad \tau(j, i)$$

suivant que $i < j$ ou $j < i$.

b) En dimension impaire $n = 2m + 1$ et lorsque $\text{rang}_\alpha(\alpha, \beta) = 2s$, resp. $\text{rang}_\alpha(\alpha, \beta) = 2s + 1$,

$$\sum_{2s < k \leq 2m+1} \left[x_{\tau'(k)} \sum_{\mathcal{P}_k} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}_k} x_{\tau(\{i, j\})} \right] = 0, \quad (\text{II})$$

resp.

$$\sum_{\mathcal{P}_{2s+1}} \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}_{2s+1}} x_{\tau(\{i, j\})} = 0 \quad (\text{III})$$

où \mathcal{P}_k décrit l'ensemble des partitions en parties de deux éléments de

$$\{2s + 1, 2s + 2, \dots, 2m + 1\} - \{k\} \quad \text{et} \quad \tau'(k) \neq \tau(\{i, j\}).$$

Le lieu $\Xi(\alpha, \beta)$ est donc défini localement, dans le cas générique, par les zéros d'un polynôme homogène affin par rapport en chaque variable ; en particulier, au voisinage de chaque point de la première strate de dégénérescence $\Xi_1(\alpha, \beta)$, il est défini par l'équation d'une seule coordonnée $x_1 = 0$. Vu que les polynômes qui sont affins en chaque variable possèdent la « propriété des zéros », cf. [9], à l'aide d'une partition de l'unité on obtient :

COROLLAIRE 4. — Si (α, β) est un couple générique de $(1, 2)$ -formes différentielles et f une fonction différentiable sur une variété M , alors :

$$f|_{\Xi(\alpha, \beta)} = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{I}(\alpha, \beta).$$

Remarque. — Le procédé de ce paragraphe permet aussi l'obtention de la liste des modèles d'équations algébriques qui définissent localement chaque strate $\Xi_s(\alpha, \beta)$ du lieu $\Xi(\alpha, \beta)$.

3. Propriétés du lieu de dégénérescence de la classe d'une forme de Pfaff générique.

Si α est une forme de Pfaff sur une variété M de dimension n , sa classe en un point x de M est définie comme la codimension dans $T_x M$ de son espace caractéristique :

$$\mathcal{K}_x(\alpha) = \Delta_x(\alpha) \cap \Delta_x(d\alpha).$$

Nous appelons *lieu singulier* de α l'ensemble des points x de M sur lesquels l'espace caractéristique $\mathcal{K}_x(\alpha)$ n'est pas réduit à l'élément nul :

$$\Xi(\alpha) = \{x \in M / \text{classe}_x \alpha < n\}$$

Le lieu singulier $\Xi(\alpha)$ est identifié à l'ensemble des zéros de l'idéal $\mathfrak{I}(\alpha) = \mathfrak{I}(\alpha, d\alpha)$, appelé *idéal associé* à α :

$$\Xi(\alpha) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{I}(\alpha)).$$

Nous dirons qu'une forme de Pfaff α est *générique* lorsque son 1-jet est transverse à la stratification du fibré des 1-jets de sections de T^*M qui provient par relèvement de la stratification par le rang du fibré

$$T^*M \times_{\wedge} {}^2 T^*M,$$

cf. [4]. Les formes de Pfaff génériques constituent donc un ouvert dense dans $\Lambda^1(M)$. Visiblement, la généricité de α équivaut à la généricité du couple $(\alpha, d\alpha)$; mais, en général, la généricité d'un couple (α, β) implique la généricité simultanée de α et β sans que la réciproque soit vraie. Les propriétés précédentes des couples génériques permettent de déduire que si α est générique alors

$$\Xi_v(\alpha) = \{ x \in M / \alpha(x) \neq 0 \ \& \ \dim \mathcal{K}_x(\alpha) = v \}$$

est, si non vide, une sous-variété de codimension $v(v+1)/2$ dans M et les zéros de α apparaissent éventuellement comme points isolés sur lesquels la différentielle de α est de rang maximal. L'adhérence de chaque $\Xi_v(\alpha)$ est localement difféomorphe à une sous-variété algébrique de \mathbb{R}^n et

$$\overline{\Xi_v(\alpha)} = \bigcup_{v' \geq v} \Xi_{v'}(\alpha)$$

sauf pour les strates, en dimension paire $\Xi_0(\alpha)$, et en dimension impaire $\Xi_0(\alpha)$ et $\Xi_1(\alpha)$, dont les adhérences peuvent contenir les zéros de α . La variété M reçoit ainsi une stratification finie et localement triviale dont le type différentiable local ne dépend que de la valeur de la classe de α au point considéré; plus précisément, par suite du lemme 1, si α et α' sont deux formes de Pfaff génériques définies respectivement sur les variétés M et M' de même dimension et $a \in M$, $a' \in M'$ deux points fixés tels que $\text{classe}_a \alpha = \text{classe}_{a'} \alpha'$, alors il existe un difféomorphisme d'un voisinage U de a sur un voisinage U' de a' qui transforme la stratification du lieu singulier de α/U en la stratification du lieu singulier de α'/U' .

Par suite du théorème 3, le lieu singulier $\Xi(\alpha)$ d'une forme de Pfaff générique α sur M est défini localement en un point a de M :

a) En dimension paire $n=2m$ et lorsque $\text{classe}_a \alpha = 2\sigma$ ou $\text{classe}_a \alpha = 2\sigma + 1$ par l'équation (I);

b) En dimension impaire $n=2m+1$ et lorsque $\text{classe}_a \alpha = 2\sigma$, resp. $\text{classe}_a \alpha = 2\sigma + 1$ par l'équation (II), resp. l'équation (III);

(cf. notations du théorème 3). Vu l'expression de ces équations, on en déduit la « propriété des zéros » du lieu singulier des formes de Pfaff génériques :

PROPOSITION 5. — *Si α est une forme de Pfaff générique et f une fonction différentiable sur une variété M , alors :*

$$f|_{\Xi(\alpha)} = 0 \Leftrightarrow f \in \mathfrak{I}(\alpha).$$

Nous démontrerons aussi dans ce cadre une autre « propriété de division » sur le lieu singulier des formes de Pfaff génériques qui nous sera utile par la suite :

PROPOSITION 6. — *Si α est une forme de Pfaff générique et η une forme de Pfaff quelconque sur une variété M telles que*

$$\alpha \wedge \eta = 0,$$

alors il existe une fonction différentiable λ unique sur M vérifiant

$$\eta = \lambda\alpha.$$

Démonstration. — Cette propriété étant toujours satisfaite sur le lieu régulier $\Xi_0(\alpha)$, il nous reste à prouver que le coefficient de proportionalité λ se prolonge différentiablement sur le lieu singulier $\Xi(\alpha)$. Dans ce cas, pour des raisons de continuité, il sera unique. Il suffit donc de se placer, dans un contexte local, au voisinage d'un point du lieu singulier. Par un simple raisonnement, le lecteur pourra prouver que cette propriété est conservée par la conjugaison faible des germes de formes de Pfaff reliés i. e. les germes de couples reliés de la forme $(\alpha, d\alpha)$. Ainsi, on se ramène à vérifier, tout simplement, que les modèles des germes de couples génériques du lemme 2 possèdent la propriété de division et cette vérification achèvera la démonstration.

II. DUALITÉ DE CONTACT GÉNÉRIQUE

1. Hamiltoniennes de contact d'une forme de Pfaff générique.

Si α est une forme de contact sur une variété différentiable M de dimension impaire, alors cette forme met en dualité les fonctions différentiables et les champs de contact sur M :

$$\alpha(X_f) = f.$$

Le terme *champ de contact* ou *champ de Lie* sur (M, α) signifie : champ de vecteurs différentiable X sur M satisfaisant la *condition de Lie*

$$L_X\alpha \wedge \alpha = 0.$$

Si α est une forme de Pfaff quelconque sur M alors cette dualité n'est réalisée que sur le lieu régulier de α où sa classe est maximale mais, les champs de Lie correspondants ne se prolongent pas toujours sur le lieu singulier de α .

Nous dirons qu'une fonction différentiable f sur M est une *hamiltonienne de contact admissible pour α* , si l'équation

$$\alpha(X_f) = f \tag{*}$$

admet une solution différentiable unique X_f satisfaisant la condition de Lie sur M .

Nous étudierons le problème de la « dualité de contact » dans le contexte des formes de Pfaff génériques.

THÉORÈME 7. — Soit α une forme de Pfaff générique sur une variété M de dimension $2m + 1$. Une fonction différentiable f sur M est une hamiltonienne de contact admissible pour α , si et seulement si, en chaque point d'une partie dense de la strate $\Xi_1(\alpha)$ les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(A) \quad d(f\alpha) \wedge (d\alpha)^{m-1} = 0$$

et

$$(B) \quad df \wedge (d\alpha)^m = 0.$$

En fait, nous obtiendrons ce théorème comme conséquence d'un théorème plus général concernant les couples génériques :

THÉORÈME 8. — Soit (α, β) un couple générique de (1, 2)-formes différentielles sur une variété M de dimension $2m + 1$. Le système d'équations

$$\begin{cases} X \lrcorner \alpha = f \\ X \lrcorner \beta = \eta + \Psi\alpha \end{cases} \quad (**)$$

où f est une fonction différentiable et η une forme de Pfaff sur M , admet une solution (unique) $(X, \Psi) \in \mathcal{X}(M) \times \mathcal{E}(M)$, si et seulement si, en chaque point d'une partie dense de la strate $\Xi_1(\alpha, \beta)$ les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(A') \quad (\eta \wedge \alpha + f\beta) \wedge \beta^{m-1} = 0$$

et

$$(B') \quad \eta \wedge \beta^m = 0.$$

Démonstration. — On considère sur la variété $M \times \mathbb{R}$ la forme

$$\omega = \alpha \wedge dt + \beta$$

dont la généricité est assurée par celle du couple (α, β) , cf. lemme 10. On vérifie que la résolution du système (**) équivaut à la résolution de l'équation

$$\left(X + \Psi \frac{\partial}{\partial t} \right) \lrcorner \omega = \eta + f dt. \quad (s)$$

En effet, le second membre de cette équation ne dépend pas de t et donc si $X(x, t) + \Psi(x, t) \frac{\partial}{\partial t}$ est une solution, il en sera de même, pour tout t_0 fixé, pour le champ $X(x, t_0) + \Psi(x, t_0) \frac{\partial}{\partial t}$ dont les coefficients ne dépendent

pas de t . L'ensemble des points (x, t) de $M \times \mathbb{R}$ sur lesquels le rang de ω est maximal étant dense dans $M \times \mathbb{R}$ (cf. § I. 1), la solution de l'équation (s), lorsqu'elle existe, elle est unique et par conséquent indépendante de t . Le problème est ainsi ramené à l'étude d'une équation générale associée à une 2-forme générique sur une variété de dimension paire et la réponse est fournie par le

THÉORÈME 9 [9]. — *Soit ω une 2-forme générique sur une variété W de dimension paire. L'équation*

$$X \lrcorner \omega = \theta$$

où θ est une forme de Pfaff sur W , admet une solution différentiable X unique sur W , si et seulement si, en chaque point d'une partie dense de la strate $\Sigma_2(\omega)$ est satisfaite la condition des noyaux : l'espace associé de ω est inclu dans l'espace associé de θ .

Notons que sur les points de la strate $\Sigma_2(\omega)$ et lorsque la dimension de la variété W est $2m + 2$, la condition des noyaux précitée s'exprime par la relation

$$\theta \wedge \omega^m = 0.$$

Dans le contexte de notre problème, comme nous le prouverons dans le lemme 10, on a la décomposition

$$\Sigma_2(\omega) = (\Xi_1(\alpha, \beta) \cup \Xi_2(\alpha, \beta)) \times \mathbb{R}.$$

Vu que la strate $\Xi_2(\alpha, \beta)$ est contenue dans l'adhérence de la strate $\Xi_1(\alpha, \beta)$, on en déduit que la résolution de l'équation (***) équivaut à la satisfaction en chaque point d'une partie dense de $\Xi_1(\alpha, \beta)$ de la condition

$$(\eta + f dt) \wedge (\alpha \wedge dt + \beta)^m = 0.$$

Un simple développement de cette condition achèvera la démonstration du théorème.

LEMME 10. — *Soit (α, β) un couple générique de (1, 2)-formes différentielles sur une variété M de dimension impaire. Alors la forme*

$$\omega = \alpha \wedge dt + \beta$$

sur $M \times \mathbb{R}$, est générique et on a :

a) *la décomposition du lieu singulier*

$$\Sigma(\omega) = \Xi(\alpha, \beta) \times \mathbb{R}$$

b) *la décomposition de chaque strate*

$$\Sigma_c(\omega) = (\Xi_{c-1}(\alpha, \beta) \cup \Xi_c(\alpha, \beta)) \times \mathbb{R}$$

c) la relation entre espaces associés

$$\Delta_x(\alpha, \beta) = \Delta_{(x,t)}(\omega) \cap T_{(x,t)}(M \times \{t\}).$$

Démonstration. — Considérons le morphisme de fibrés

$$\sigma : {}^2_\wedge T^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow T^*M \times {}^2_\wedge T^*M$$

défini sur chaque fibre par

$$\sigma : (\alpha \wedge dt + \beta) \mapsto (\alpha, \beta),$$

lequel définit visiblement, en chaque point (x, t) de $M \times \mathbb{R}$, un isomorphisme entre les espaces ${}^2_\wedge T^*_{(x,t)}(M \times \mathbb{R})$ et $T^*_x M \times {}^2_\wedge T^*_x M$. Munissons ces fibrés de leurs stratifications naturelles par le rang, cf. [4], et vérifions que leurs strates sont liées par la relation

$$\Sigma_c(M \times \mathbb{R}) = \sigma^{-1}(\Xi_c(M) \cup \Xi_{c-1}(M)).$$

En effet, la strate $\Sigma_c(M \times \mathbb{R})$ est définie par le système d'équations

$$\begin{cases} (\alpha \wedge dt + \beta)^s \neq 0 \\ (\alpha \wedge dt + \beta)^{s+1} = 0 \end{cases}$$

où $2s = 2m + 2 - c$ et par conséquent on a :

$$\left| \begin{array}{l} \beta^s \neq 0 \\ \beta^{s+1} \neq 0 \\ \alpha \wedge \beta^s = 0 \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left| \begin{array}{l} \beta^s = 0 \\ \alpha \wedge \beta^{s-1} \neq 0 \end{array} \right.$$

systèmes qui visiblement définissent respectivement les strates $\Xi_{c-1}(M)$ et $\Xi_c(M)$. Après cette décomposition, remarquons que la donnée d'une forme

$$\omega(x, t) = \alpha(x) \wedge dt + \beta(x)$$

dont les coefficients ne dépendent que de la variable x , définit la section (α, β) de la projection π'' qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}^2_\wedge T^*(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\sigma} & T^*M \times {}^2_\wedge T^*M \\ \omega \uparrow \downarrow \pi' & & \pi'' \uparrow \downarrow (\alpha, \beta) \\ M \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

et que réciproquement, toute section de π' définit sans ambiguïté une forme $\omega = \sigma^*(\alpha, \beta)$ ne dépendant pas de t . Il est clair, σ étant une submersion, que la transversalité de (α, β) à $\Xi_c(M) \cup \Xi_{c-1}(M)$ implique la transversalité de ω à $\Sigma_c(M \times \mathbb{R})$ et réciproquement. Un simple raisonnement maintenant suffit pour déduire les autres assertions du lemme.

Remarque. — Le théorème 7 résulte immédiatement du théorème que nous venons de démontrer, en notant que la genericité d'une forme de

Pfaff α équivaut à la généralité du couple $(\alpha, d\alpha)$ et en posant : $\beta = d\alpha$ et $\eta = -df$.

Les hamiltoniennes de contact admissibles pour une forme de Pfaff généralité α sur une variété M de dimension impaire forment une algèbre de Lie très naturelle définie par le *crochet de Lagrange généralité* :

$$[[f, f']] = \alpha([X_f, X_{f'}])$$

où $[,]$ désigne le crochet de Lie qui d'ailleurs attribue à l'ensemble des champs de contact associés aux hamiltoniennes de α une structure d'algèbre de Lie. Le crochet de Lagrange généralité est identifié au crochet de Lagrange classique sur le lieu régulier $\Xi_0(\alpha)$ et le prolonge sur le lieu singulier $\Xi(\alpha)$. On peut conclure :

COROLLAIRE 11. — *Soit α une forme de Pfaff généralité sur une variété M de dimension impaire. Alors, la dualité entre hamiltoniennes de contact admissibles pour α et champs de contact sur M définit un isomorphisme d'algèbres de Lie.*

2. Sur la symplectisation généralité.

Étant donnée une forme de Pfaff généralité α sur une variété M de dimension impaire, nous appellerons *structure symplectisée* de (M, α) la structure $(M \times \mathbb{R}^+, d(t\alpha))$ où $\mathbb{R}^+ =]0, +\infty[$, qui visiblement est une structure symplectique généralité i. e. une variété de dimension paire munie d'une 2-forme fermée généralité, au sens de [9].

On sait que si (W, ω) est une structure symplectique généralité, par exemple la structure symplectisée de (M, α) , alors les fonctions différentiables h sur W qui satisfont la condition des noyaux

$$\Delta_x(\omega) \subset \Delta_x(dh)$$

constituent l'algèbre des hamiltoniennes admissibles pour cette structure i. e. à chaque h est associé un champ hamiltonien X_h solution unique de l'équation de Hamilton-Jacobi :

$$X_h \lrcorner \omega = -dh.$$

PROPOSITION 12. — *Soit α une forme de Pfaff généralité sur une variété M de dimension impaire et f une fonction différentiable sur M . Alors, f est une hamiltonienne de contact admissible pour (M, α) , si et seulement si, la fonction $h = tf$ est une hamiltonienne admissible pour la structure symplectisée $(M \times \mathbb{R}^+, d(t\alpha))$. Dans ce cas, le champ hamiltonien X_h de h et le champ de contact X_f de f vérifient :*

$$X_h = X_f - \lambda t \frac{\partial}{\partial t}$$

où λ est le coefficient de proportionnalité défini sur M par

$$L_{X_f}\alpha = \lambda\alpha.$$

Démonstration. — Supposons que la fonction $h = tf$ est une hamiltonienne admissible pour la structure symplectisée de (M, α) et écrivons son champ hamiltonien X_h sous la forme

$$X_h = X' + \lambda' \frac{\partial}{\partial t}$$

où X' est un champ de vecteurs sans composante en $\partial/\partial t$. On obtient

$$\begin{cases} X' \lrcorner \alpha & = f \\ tX' \lrcorner d\alpha + \lambda'\alpha & = -tdf \end{cases}$$

et en posant $\lambda'(x, t) = -t\lambda(x, t)$, pour chaque $t_0 \in \mathbb{R}^+$ fixé, on en déduit que

$$\begin{cases} \alpha(X'(x, t_0)) & = f \\ L_{X'(x, t_0)}\alpha & = \lambda(x, t_0)\alpha. \end{cases}$$

Le champ de vecteurs $X'(x, t_0)$ est donc l'unique champ de Lie qui est en dualité avec la fonction f dans le cadre de la structure (M, α) . Le champ X' ne dépend pas donc de t et la fonction λ n'en dépend pas non plus, d'où la décomposition

$$X_h = X_f - \lambda t \frac{\partial}{\partial t}.$$

Réciproquement, si f est une hamiltonienne de contact admissible pour la structure (M, α) et X_f son champ de contact sur M , alors par un simple calcul on en déduit que le champ de vecteurs $X_f - \lambda t \partial/\partial t$ est le seul qui est en dualité avec la fonction $h = tf$ dans le cadre de la structure symplectisée de (M, α) , d'où la preuve de la proposition.

Remarque. — L'existence et l'unicité du coefficient de proportionnalité λ sont assurées par la proposition 6 de la première partie de l'article.

Nous sommes maintenant en mesure de décrire le comportement des champs de contact au voisinage des singularités de la structure (M, α) :

COROLLAIRE 13. — *Soit α une forme de Pfaff générique sur une variété M de dimension impaire. Si f est une hamiltonienne de contact admissible pour α alors le flot de son champ de contact X_f laisse invariantes les strates $\Xi_\nu(\alpha)$.*

Démonstration. — Soit (W, ω) la structure symplectisée de (M, α) et X_h le champ hamiltonien de la fonction $h = tf$ sur W qui existe d'après la proposition 12. On sait que le flot de tout champ hamiltonien d'une structure symplectique générique laisse invariantes les strates de la stratification qui lui est associée, cf. [9], et par conséquent le flot du champ X_h

laisse invariantes les strates $\Sigma_c(\omega)$ de la stratification de W qui est induite par ω . Mais, à l'aide du lemme 10, on en déduit la décomposition

$$\Sigma_c(\omega) = (\Xi_{c-1}(\alpha) \cup \Xi_c(\alpha)) \times \mathbb{R}^+$$

et donc le flot φ_t du champ X_f conserve les couples de strates

$$\Xi_{c-1}(\alpha) \cup \Xi_c(\alpha).$$

Aussi, comme X_f satisfait la condition de Lie et vu la propriété de division de la proposition 6, pour chaque t fixé on a

$$\varphi_t^* \alpha = \lambda_t \alpha.$$

Un calcul simple prouve alors l'équivalence entre

$$\alpha \wedge (d\alpha)^s = 0 \quad \text{et} \quad (\lambda\alpha) \wedge (d(\lambda\alpha))^s = 0,$$

et permet de déduire que le flot φ_t respecte aussi la parité de la classe de α d'où la conclusion.

3. Sur les conditions d'admissibilité d'une hamiltonienne de contact.

Soit α une forme de Pfaff générique sur une variété M de dimension $2m + 1$. Si f est une fonction différentiable sur M , on sait qu'elle est admissible comme hamiltonienne de contact pour α , si et seulement si, elle vérifie les conditions A et B du théorème 7 et aussi la satisfaction de ces conditions est suffisante sur les points d'une partie dense de la strate $\Xi_1(\alpha)$ du lieu singulier $\Xi(\alpha)$.

Si on impose une condition de transversalité supplémentaire : le 2-jet de α d'être transverse à la stratification par la classe du fibré des 2-jets de sections de T^*M , cf. [4], alors l'ensemble

$$\Xi_{10}(\alpha) = \{ x \in \Xi_1(\alpha) / \mathcal{H}_x(\alpha) \pitchfork T_x \Xi_1(\alpha) \}$$

est un ouvert dense de la strate $\Xi_1(\alpha)$, cf. [4]. J. Martinet a prouvé que dans ce cas la forme α peut s'exprimer dans une carte appropriée centrée en un point de cet ouvert comme

$$\alpha = dq_1 + \sum_{i=1}^m p_i dq_i + p_{2m+1} dp_{2m+1}.$$

On peut prouver facilement à l'aide de ce modèle que sous cette hypothèse de transversalité supplémentaire on a :

$$\text{Condition A} \Rightarrow \text{Condition B.}$$

Aussi, quitte à faire deux remarques, la condition A peut s'exprimer plus simplement. Si α' est la restriction de α à $\Xi_{10}(\alpha)$, alors :

— La forme $d\alpha'$ est symplectique sur $\Xi_{10}(\alpha)$ et lorsqu'on se donne une fonction différentiable f sur M , sa restriction f' à $\Xi_{10}(\alpha)$ possède un champ hamiltonien $X_{f'}$ défini sur $\Xi_{10}(\alpha)$ par

$$X_{f'} \lrcorner d\alpha' = -df'.$$

— La forme $(d\alpha')^m$ est de volume sur $\Xi_{10}(\alpha)$ et elle définit une dualité entre les champs et les $(2m-1)$ -formes sur $\Xi_{10}(\alpha)$. On se donne la forme $\alpha' \wedge (d\alpha')^{m-1}$ et on désigne par ξ son champ dual défini sur $\Xi_{10}(\alpha)$ par

$$\xi \lrcorner (d\alpha')^m = \alpha' \wedge (d\alpha')^{m-1}.$$

Nous donnerons, en adoptant ces notations, deux autres expressions équivalentes de la condition A.

PROPOSITION 14. — *Soit α une forme de Pfaff générique sur une variété M de dimension $2m+1$ et supposons que l'ensemble $\Xi_{10}(\alpha)$ est un ouvert de la strate $\Xi_1(\alpha)$. Alors, sur ses points, les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$(A_1) \quad d(f\alpha) \wedge (d\alpha)^{m-1} = 0$$

$$(A_2) \quad \alpha'(X_{f'}) + mf' = 0$$

$$(A_3) \quad \xi(f') + f' = 0$$

Démonstration. — La condition (A_1) s'écrit sur les points de $\Xi_{10}(\alpha)$

$$df' \wedge (\xi \lrcorner (d\alpha')^m) + f'(d\alpha')^m = 0$$

ou encore

$$-\xi \lrcorner (df' \wedge (d\alpha')^m) + (\xi \lrcorner df') \wedge (d\alpha')^m + f'(d\alpha')^m = 0$$

et vu la nullité du premier terme on obtient

$$\xi \lrcorner df' + f' = 0$$

d'où l'équivalence des conditions (A_1) et (A_3) . Quant à l'autre équivalence, remarquons que

$$\begin{aligned} X_{f'} \lrcorner (d\alpha')^m &= (X_{f'} \lrcorner d\alpha') \wedge (d\alpha')^{m-1} + d\alpha' \wedge (X_{f'} \lrcorner (d\alpha')^{m-1}) \\ &= \dots = m(X_{f'} \lrcorner d\alpha') \wedge (d\alpha')^{m-1} = -mdf' \wedge (d\alpha')^{m-1}. \end{aligned}$$

La condition (A_1) s'écrit sur les points de $\Xi_{10}(\alpha)$

$$\alpha' \wedge (X_{f'} \lrcorner (d\alpha')^m) + mf'(d\alpha')^m = 0$$

ou encore

$$-X_{f'} \lrcorner (\alpha' \wedge (d\alpha')^m) + (X_{f'} \lrcorner \alpha') \wedge (d\alpha')^m + mf'(d\alpha')^m = 0$$

et vu la nullité du premier terme on obtient

$$X_{f'} \lrcorner \alpha' + mf' = 0$$

d'où l'équivalence des conditions (A_1) et (A_2) .

Le lecteur pourrait dans ce contexte, en se servant du modèle de J. Martinet et en explicitant les conditions précitées d'admissibilité, déterminer les modèles locaux des hamiltoniennes de contact admissibles et d'en déduire les expressions correspondantes des champs de contact au voisinage des points singuliers de $\Xi_{10}(\alpha)$.

RÉFÉRENCES

- [1] V. I. ARNOLD, *Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique*. Éditions Mir, Moscou, 1976.
- [2] E. CARTAN, *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications en Géométrie*. Hermann, Paris, 1945.
- [3] A. LICHNEROWICZ, *Variétés Symplectiques, Variétés canoniques et Systèmes Dynamiques*. Topics in Differential Geometry, Academic Press, New York, 1976.
- [4] J. MARTINET, Sur les singularités des formes différentielles. *Annales Institut Fourier*, t. **20**, n° 1, 1970, p. 95-178.
- [5] J. N. MATHER, *Solution of generic linear equations*. Dynamical Systems, Academic Press, New York, 1973.
- [6] F. PELLETIER, *Singularités d'ordre supérieur de formes différentielles*. Thèse, Dijon, 1980.
- [7] S. N. PNEVMATIKOS, *Étude géométrique des contraintes génériques dans les espaces de phases*. Thèse, Amsterdam, 1981.
- [8] S. N. PNEVMATIKOS, Sur les formes de Pfaff et les structures de contact singulières génériques. *C. R. Acad. Sciences Paris*, t. **295 A**, 1982, p. 695-698.
- [9] S. N. PNEVMATIKOS, Structures symplectiques singulières génériques. *Annales Institut Fourier*, t. **34**, n° 3, 1984, p. 11-28.
- [10] J. C. TOUGERON, *Idéaux de fonctions différentiables*. Springer Verlag, Berlin, 1972.

(Manuscrit reçu le 26 Septembre 1983)

(Version révisée reçue le 18 Avril 1984)