

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. GUTKIN

## **Variétés bi-structurées et opérateurs de récursion**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 43, n° 3 (1985), p. 349-357

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1985\\_\\_43\\_3\\_349\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1985__43_3_349_0)

© Gauthier-Villars, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Variétés bi-structurées et opérateurs de récursion

par

**D. GUTKIN**

U. E. R. de Mathématiques, Université de Lille I,  
59655 Villeneuve-d'Ascq

---

**RÉSUMÉ.** — Nous étudions les conséquences de l'existence d'une structure de Poisson et d'une structure présymplectique, pour la complète intégrabilité au sens de Liouville, de certains champs de vecteurs hamiltoniens. Sous certaines conditions, l'opérateur de récursion défini par ces deux structures engendre des intégrales premières en involution à partir d'un hamiltonien.

**ABSTRACT.** — We study the implications of the existence of a Poisson structure and a presymplectic structure on a manifold, for the complete integrability in Liouville's sense of certain Hamiltonian vector fields. Under certain conditions, the recursion operator defined by these two structures generates first integrals in involution.

---

### INTRODUCTION

Un certain nombre d'auteurs tentent de décrire les systèmes hamiltoniens complètement intégrables, par l'existence simultanée sur l'espace des phases, de plusieurs structures géométriques liées entre elles par des relations de compatibilité [1-7].

*Mots-clés* : Complète intégrabilité. Variété de Poisson. Opérateur de récursion. Système hamiltonien. Variété symplectique.

*Classification AMS* : 58F05.

Nous essayons ici, après avoir rappelé quelques définitions, de faire apparaître l'aspect naturel de cette approche, en nous plaçant dans la situation d'une structure de Poisson et d'une structure présymplectique. Nous construisons un opérateur  $R$  de récursion qui échange les symétries infinitésimales des automorphismes infinitésimaux de cette structure double, et le lien est fait avec les équations de Lax.

Des conditions sont énoncées, qui permettent d'engendrer à partir d'un hamiltonien, une suite d'intégrales premières en involution pour le système hamiltonien correspondant.

Le cas particulier où la structure présymplectique est symplectique et « compatible » avec la structure de Poisson est étudié, et on est conduit à une caractérisation locale des systèmes complètement intégrables au sens de Liouville.

## I. NOTATIONS ET RAPPELS

Dans ce qui suit  $M$  désigne une variété différentiable  $C^\infty$ ,  $C^\infty(M)$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $TM$  (resp.  $T^*M$ ) le fibré tangent (resp. cotangent) à  $M$ , de fibre  $T_mM$  (resp.  $T_m^*M$ ) en un point  $m$  de  $M$ ,  $\Lambda^1(M)$  l'espace des 1-formes différentielles  $C^\infty$  sur  $M$  et  $\mathcal{X}(M)$  l'espace des champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ .

Soit  $\Lambda$  un champ de tenseurs  $C^\infty$  sur  $M$ , deux fois contravariant et antisymétrique. On note  $\# : T^*M \rightarrow TM$  le morphisme de fibrés vectoriels défini par

$$\forall \alpha_m \in T_m^*M, \quad m \in M, \quad \# \alpha_m = \Lambda_m(\alpha_m, \cdot)$$

et on notera encore  $\#$  son action sur les sections de fibrés

$$\# : \Lambda^1(M) \rightarrow \mathcal{X}(M).$$

Ainsi  $\langle \# \alpha, \beta \rangle = \Lambda(\alpha, \beta) \forall \alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$ , où  $\langle \rangle$  désigne le crochet naturel de dualité entre formes et vecteurs. En particulier, pour tout couple de fonctions  $C^\infty$  sur  $M$ ,  $f$  et  $g$ , on note

$$\{f, g\} = \langle \# df, dg \rangle = \Lambda(df, dg).$$

1.1. DÉFINITION. —  $(M, \Lambda)$  est une *variété de Poisson* si le crochet  $\{, \}$  précédemment défini vérifie l'identité de Jacobi :

$$\forall f, g, h \in C^\infty(M) \quad \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

On sait alors que  $\Lambda$  est un *tenseur de Poisson*, et que  $\{, \}$  est un *crochet de Poisson* (qui confère donc à  $C^\infty(M)$  une structure d'algèbre de Lie).

1.2. REMARQUES. — i) L'identité de Jacobi s'écrit encore

$[\#df, \#dg] = \#d\{f, g\}$ . Elle est donc vérifiée si et seulement si l'application

$$\#d : (C^\infty(M)/\mathbb{R}, \{ \}) \rightarrow (\mathcal{X}(M), [h])$$

est un morphisme d'algèbres de Lie.

ii) On montre que l'identité de Jacobi est encore équivalente à  $[\Lambda, \Lambda] = 0$ , où  $[ , ]$  est le crochet de Schouten-Nijenhuis [8].

1.3. DÉFINITION. — Soient  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson et  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$ . On dira que :

- $X$  est caractéristique si  $X = \# \alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda^1(M)$ ,
- $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal si

$$X\{f, g\} = \{Xf, g\} + \{f, Xg\} \quad \forall f, g \in C^\infty(M)$$

(ie.  $X$  est une dérivation de  $(C^\infty(M), \{ \})$ ),

- $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal caractéristique si  $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal et  $X$  est caractéristique,
- $X$  est localement hamiltonien si  $X$  est caractéristique, avec  $\alpha$  fermée où  $X = \# \alpha$ ,
- $X$  est hamiltonien si  $X$  est caractéristique avec  $\alpha$  exacte où  $X = \# \alpha$  ie.  $X = \#df$ ,  $f \in C^\infty(M)$ .

1.4. REMARQUES. — i) Les automorphismes de Poisson infinitésimaux, ainsi que les champs de vecteurs hamiltoniens constituent des algèbres de Lie.

ii) Tout champ localement hamiltonien est un automorphisme de Poisson infinitésimal (caractéristique). En effet un tel champ peut toujours s'écrire localement  $X = \#dh$ ,  $h$  fonction  $C^\infty$  définie localement, et alors  $\forall f, g \in C^\infty(M)$  :

$$\begin{aligned} \#dh\{f, g\} &= \{h, \{f, g\}\} = \{\{h, f\}, g\} + \{f, \{h, g\}\} \\ &= \{\#dh \cdot f, g\} + \{f, \#dh \cdot g\} = \{Xf, g\} + \{f, Xg\} \end{aligned}$$

iii)  $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal si et seulement si  $\mathcal{L}_X \Lambda = 0$ . En effet il suffit de le vérifier sur les formes exactes, localement : on a alors quelles que soient  $f$  et  $g$ , fonctions  $C^\infty$  définies localement

$$\mathcal{L}_X(\Lambda(\dot{a}f, \dot{a}g)) = (\mathcal{L}_X \Lambda)(df, dg) + \Lambda(\mathcal{L}_X df, dg) + \Lambda(df, \mathcal{L}_X dg)$$

ou encore

$$X \cdot \{f, g\} = (\mathcal{L}_X \Lambda)(df, dg) + \{X \cdot f, g\} + \{f, X \cdot g\}.$$

iv)  $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal si et seulement si  $\mathcal{L}_X \# = \# \mathcal{L}_X$ . En effet,  $\forall \alpha, \beta \in \Lambda^1(M)$

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \Lambda)(\alpha, \beta) &= \mathcal{L}_X(\Lambda(\alpha, \beta)) - \Lambda(\mathcal{L}_X \alpha, \beta) - \Lambda(\alpha, \mathcal{L}_X \beta) \\ &= \mathcal{L}_X \langle \# \alpha, \beta \rangle - \langle \# \mathcal{L}_X \alpha, \beta \rangle - \langle \# \alpha, \mathcal{L}_X \beta \rangle \\ &= \langle \mathcal{L}_X \# \alpha, \beta \rangle - \langle \# \mathcal{L}_X \alpha, \beta \rangle. \end{aligned}$$

Il en résulte en particulier que les automorphismes de Poisson infinitésimaux caractéristiques forment un idéal de l'algèbre de Lie des automorphismes de Poisson infinitésimaux.

Il en résulte également que si  $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal,  $\#$  transforme les formes invariantes par  $X$ , en symétries infinitésimales de  $X$  :

$$L_X \alpha = 0 \quad \text{implique} \quad L_X(\# \alpha) = 0.$$

On a la caractérisation suivante des automorphismes de Poisson infinitésimaux :

1.5. DÉFINITION. — Soient  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson et  $\alpha \in \Lambda^1(M)$ . On dit que  $\alpha$  est *C-fermée* si pour tout couple  $(X, Y)$  de champs de vecteurs caractéristiques, on a  $d\alpha(X, Y) = 0$ .

1.6. PROPOSITION. — (Lichnerowicz, Marle [8] [9]).

Soient  $(M, \Lambda)$  une variété de Poisson et  $X = \# \alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda^1(M)$ , un champ de vecteurs caractéristique. Alors  $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal (caractéristique) si et seulement si  $\alpha$  est C-fermée. De plus, l'idéal dérivé de l'algèbre de Lie des automorphismes de Poisson infinitésimaux caractéristiques est contenu dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs hamiltoniens.

En effet pour tout couple  $f, g$  de fonctions  $C^\infty$  définies localement, on a :

$$\begin{aligned} d\alpha(\# df, \# dg) &= \# df \cdot \langle \alpha, \# dg \rangle - \# dg \cdot \langle \alpha, \# df \rangle - \langle \alpha, [\# df, \# dg] \rangle \\ &= -\# df \cdot \langle \# \alpha, dg \rangle + \# dg \cdot \langle \# \alpha, df \rangle + \langle \# \alpha, d\{f, g\} \rangle \\ &= -\{f, X \cdot g\} + \{g, X \cdot f\} + X \cdot \{f, g\}, \end{aligned}$$

et ceci est nul si et seulement si  $X$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal.

Tout champ caractéristique pouvant s'écrire localement  $\# \sum_{i=1}^n X_i df^i$ , la première propriété est donc démontrée.

De plus soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux formes C-fermées, on a :

$$[\# \alpha, \# \beta] = \mathcal{L}_{\# \alpha} \# \beta = \# \mathcal{L}_{\# \alpha} \beta = \#(i_{\# \alpha} d\beta + di_{\# \alpha} \beta)$$

et

$$\begin{aligned} \forall f \in C^\infty(M), \quad \#(i_{\# \alpha} d\beta) \cdot f &= \langle \# i_{\# \alpha} d\beta, df \rangle = -\langle i_{\# \alpha} d\beta, \# df \rangle \\ &= -d\beta(\# \alpha, \# df) = 0 \end{aligned}$$

car  $\beta$  est C-fermée. Ainsi  $[\# \alpha, \# \beta] = \#(di_{\# \alpha} \beta)$  est un champ hamiltonien (de hamiltonien  $\langle \beta, \# \alpha \rangle$ ).

1.7. DÉFINITION. —  $(M, \omega)$  est une *variété présymplectique* si  $\omega$  est une 2-forme différentielle  $C^\infty$  sur  $M$ , fermée, non nulle.

On note  $b : TM \rightarrow T^*M$  le morphisme de fibrés vectoriels défini par

$$\forall X_m \in T_m M, \quad m \in M, \quad bX_m = -i_{X_m} \omega_m$$

et on notera encore  $b : \mathcal{X}(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$  son action sur les sections de fibrés.

Un champ de vecteurs  $X$  sur  $M$ ,  $C^\infty$ , est un *automorphisme présymplectique infinitésimal* si et seulement si  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ .

1.8. REMARQUES. — *i)*  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  si et seulement si  $bX$  est fermée.

*ii)*  $\mathcal{L}_X \omega = 0$  si et seulement si  $\mathcal{L}_X b = b\mathcal{L}_X$  : en effet,  $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$  on a :

$$\mathcal{L}_X bY = -\mathcal{L}_X i_Y \omega = -i_{[X, Y]} \omega - i_Y \mathcal{L}_X \omega = b\mathcal{L}_X Y - i_Y \mathcal{L}_X \omega$$

compte tenu de l'identité  $i_{[X, Y]} = \mathcal{L}_X i_Y - i_Y \mathcal{L}_X$ . Il en résulte en particulier que si  $X$  est un automorphisme présymplectique infinitésimal,  $b$  transforme les symétries infinitésimales de  $X$  en formes invariantes par  $X$  :

$$\mathcal{L}_X Y = 0 \quad \text{implique} \quad \mathcal{L}_X (bY) = 0.$$

## II. BI-STRUCTURES

2.1. DÉFINITION. —  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$  est une *variété bi-structurée* si

1.  $(M, \tilde{\Lambda})$  est une variété de Poisson,
2.  $(M, \omega)$  est une variété présymplectique,
3.  $R = \#b : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  est différent de  $k \cdot Id$ ,  $k$  constante réelle.

Un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $M$  sera dit *bi-automorphisme infinitésimal* s'il est à la fois automorphisme de Poisson infinitésimal (pour  $\tilde{\Lambda}$ ) et automorphisme présymplectique infinitésimal (pour  $\omega$ ).

$R = \#b$  est appelé *opérateur de récursion*.

2.2. REMARQUES. — *i)* Il résulte immédiatement des définitions que, si  $X$  est un bi-automorphisme infinitésimal,  $R$  transforme les symétries infinitésimales de  $X$  en symétries infinitésimales de  $X$  :  $[X, Z] = 0$  implique  $[X, RZ] = 0$ . En particulier, pour tout  $k \geq 0$ ,  $R^k X$  est une symétrie infinitésimale de  $X$ .

*ii)* Posons  $S = b\tilde{\#} : \Lambda^1(M) \rightarrow \Lambda^1(M)$ . On vérifie immédiatement que  $S$  est le transposé de  $R$ . Ainsi si  $X$  est un bi-automorphisme infinitésimal,  $S$  transforme les 1-formes invariantes par  $X$  en 1-formes invariantes par  $X$ .

*iii)* Si  $X$  est un bi-automorphisme infinitésimal, alors  $\mathcal{L}_X R = 0$ . En effet,  $\forall Z \in \mathcal{X}(M)$ ,  $\mathcal{L}_X R(Z) = \mathcal{L}_X (RZ) - R\mathcal{L}_X Z = 0$  car  $\tilde{\#}$  et  $b$  et donc  $R$  commutent avec  $\mathcal{L}_X$ .

*iv)* Si l'on calcule en coordonnées locales la quantité  $\mathcal{L}_X R$ , il vient :

$$(\mathcal{L}_X R)_k^j = X^i \partial_i (R_k^j) - R_k^i \partial_i (X^j) + R_i^j \partial_k (X^i)$$

ce qui donne le long d'une courbe intégrale  $x(t)$  de  $X$  :

$$(\mathcal{L}_X R)_k^i(x(t)) = \frac{d}{dt} R_k^i(x(t)) + [R, A]_k^i(x(t))$$

où on a posé  $A_i^j = \partial_i(X^j)$  et où  $[R, A]$  représente le commutateur des matrices  $R$  et  $A$ . Ainsi dans tout ouvert de coordonnées locales, l'équation  $\mathcal{L}_X R = 0$  est équivalente à l'équation  $\frac{dR}{dt} = [A, R]$  (Équation de Lax de couple  $(A, R)$ ) [10].

v) L'image par  $R$  d'un bi-automorphisme infinitésimal  $X$  est un bi-automorphisme infinitésimal si et seulement si  $S(bX)$  est fermée. En effet,  $RX = \#(bX)$  est un automorphisme de Poisson infinitésimal puisque  $bX$  fermée. Il est présymplectique si et seulement si  $b(RX) = S(bX)$  est fermée.

2.3. PROPOSITION. — Soit  $X$  un bi-automorphisme infinitésimal. Alors  $\forall k > 0$ ,  $\text{Tr } R^k$  est une intégrale première de  $X$ .

En effet :  $\mathcal{L}_X R = 0$  implique  $\mathcal{L}_X R^k = 0$  pour tout  $k > 0$ , et  $\text{Tr}(\mathcal{L}_X R^k) = \mathcal{L}_X(\text{Tr } R^k) = 0$ .

Remarque. — Les valeurs propres de  $R$  sont donc également des intégrales premières de  $X$ .

Une classe particulièrement importante de variétés bi-structurées, est constituée par celles dont la structure présymplectique est symplectique, c'est-à-dire où  $b$  est inversible, d'inverse  $\#$ . On a alors le résultat suivant :

2.4. PROPOSITION. — Soit  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$  une variété bi-structurée, où  $(M, \omega)$  est une variété symplectique. Soient  $\tilde{\#}$  et  $\#$  les morphismes  $\Lambda^1 M \rightarrow \mathcal{X}(M)$  respectivement associés à  $\tilde{\Lambda}$  et à  $\omega$ . Supposons que  $\# + \tilde{\#} : \Lambda^1(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  définisse une structure de Poisson sur  $M$  (on dira que  $\omega$  et  $\tilde{\Lambda}$  sont *Poisson-compatibles*). Alors  $R$  transforme les bi-automorphismes infinitésimaux en bi-automorphismes infinitésimaux.

En effet soit  $X = \# \alpha$ , où  $\alpha \in \Lambda^1(M)$  est une forme fermée,  $RX = \tilde{\#} \#^{-1} X = \tilde{\#} \alpha$  est localement hamiltonien pour  $(M, \tilde{\Lambda})$  et est donc en particulier un automorphisme de Poisson infinitésimal.

Alors  $\mathcal{L}_{(\# + \tilde{\#})\alpha}(\Lambda + \tilde{\Lambda}) = 0$  car  $\alpha$  est fermée et donc en particulier  $(C + \tilde{C})$ -fermée.

Ainsi  $\mathcal{L}_{(\# + \tilde{\#})\alpha}(\Lambda + \tilde{\Lambda}) = \mathcal{L}_{\# \alpha} \Lambda + \mathcal{L}_{\tilde{\#} \alpha} \tilde{\Lambda} + \mathcal{L}_{\tilde{\#} \alpha} \tilde{\Lambda} + \mathcal{L}_{\tilde{\#} \alpha} \Lambda$  où les trois premiers termes sont nuls. Cela implique  $\mathcal{L}_{\tilde{\#} \alpha} \Lambda = 0$  ie.  $RX$  est un automorphisme (pré)symplectique infinitésimal pour  $(M, \omega)$ .

2.5. REMARQUES. — i) La condition «  $\# + \tilde{\#}$  est une structure de Poisson » équivaut à  $[\Lambda, \tilde{\Lambda}] = 0$ .

ii) On a montré en fait que  $R$  envoie les bi-automorphismes infinitési-

maux dans les bi-automorphismes infinitésimaux qui sont localement hamiltoniens pour  $\#$ .

iii) Par itération, on construit ainsi à partir d'un bi-automorphisme infinitésimal  $X$ , une suite de bi-automorphismes infinitésimaux  $R^k X$ , ou de façon équivalente une suite  $S^k(bX)$  de 1-formes fermés ( $R^0$  et  $S^0$  représentent les applications identités).

### III. COMPLÈTE INTÉGRABILITÉ

3.1. DÉFINITION. — Soient  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$  une variété bi-structurée et  $X = \# dH_0$  un bi-automorphisme infinitésimal hamiltonien,  $H_0 \in C^\infty(M)$ . On dira que  $X$  définit un *système hamiltonien d'ordre  $k$*  ( $k \geq 2$ ) si pour  $i = 1, \dots, k-1$ ,  $S^i(dH_0)$  est fermée et si la famille  $(dH_0, S(dH_0), \dots, S^{k-1}(dH_0))$  est libre.

Dans cette situation, on a alors sous certaines conditions cohomologiques des résultats sur l'existence d'intégrales premières en involution :

3.2. PROPOSITION. — Soit  $X$  un système dynamique d'ordre  $k$  sur  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$ . Si le premier espace de cohomologie de  $M$  est nul,  $X$  admet  $k$  intégrales premières en involution, linéairement indépendantes.

En effet, pour tout  $i$  compris entre 1 et  $k-1$ , on a  $S^i(dH_0) = dH_i$ ,  $H_i \in C^\infty(M)$  et pour tout couple  $(i, j)$ ,  $i$  et  $j$  compris entre 0 et  $k-1$  :

$$\{H_i, H_j\} = \langle \# dH_i, dH_j \rangle = \langle \# S^i(dH_0), S^j(dH_0) \rangle = \langle R^{i+j} \# dH_0, dH_0 \rangle = 0$$

par antisymétrie du crochet.

3.3 REMARQUES. — i) Évidemment si  $\dim M = 2n$  un système hamiltonien d'ordre  $n$  est complètement intégrable au sens de Liouville.

ii) La condition cohomologique peut être remplacée par :  $S^i(dH_0)$  exacte pour  $i = 1$  à  $k-1$ .

3.4. COROLLAIRE. — Soient  $(M, \tilde{\Lambda}, \omega)$  une variété bi-structurée avec  $\tilde{\Lambda}$  et  $\omega$  Poisson-compatibles, et  $X = \# dH_0$  un bi-automorphisme infinitésimal hamiltonien. Pour tout  $i \geq 0$ ,  $S^i(bX)$  est fermée. Si pour tout  $i \geq 0$ ,  $S^i(bX)$  est exacte,  $S^i(bX) = dH_{i+1}$ , alors les fonctions  $H_i$  sont des intégrales premières de  $X$  en involution (non nécessairement linéairement indépendantes).

On peut énoncer une réciproque partielle de la proposition précédente :

3.5. PROPOSITION. — Soient  $(M, \tilde{\omega})$  une variété symplectique de dimension  $2n$ ,  $X$  un champ de vecteurs hamiltonien sur  $M$ , définissant un système hamiltonien complètement intégrable, et  $(f_1, \dots, f_n)$  des intégrales premières de  $X$ , linéairement indépendantes, en involution. Soit  $\mathcal{F}$  le feuilletage défini



par  $f_i = c_i$ ,  $c_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $(c_1, \dots, c_n)$  étant une valeur régulière de l'application  $(f_1, \dots, f_n)$ . Alors si  $\mathcal{F}$  admet une sous-variété lagrangienne transverse  $N$ , on peut trouver dans un voisinage de  $N$  une bi-structure pour laquelle  $X$  soit un système dynamique d'ordre  $n$ .

En effet, on peut toujours supposer  $X = \# \tilde{d}f_1$ .  $\mathcal{F}$  étant un feuilletage lagrangien, il résulte d'un théorème de Weinstein [11], qu'on peut trouver

dans un voisinage  $U_N$  de  $N$  des fonctions  $g_1, \dots, g_n$  telles que  $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dg_i$ . Définissons alors sur  $U_N$

$$\omega = df_2 \wedge dg_1 + df_3 \wedge dg_2 + \dots + df_n \wedge dg_{n-1} + df_1 \wedge dg_n;$$

$\omega$  est une forme symplectique sur  $U_N$ , qui vérifie  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ .  $X$  est donc un bi-automorphisme infinitésimal pour les structures  $\omega$  et  $\tilde{\omega}$ . Enfin, si l'on pose  $S = b \#$  (où  $b$  est associé à  $\omega$ ) on vérifie immédiatement que

$$S(df_i) = df_{i+1} \quad \forall i < n \quad \text{et} \quad S(df_n) = df_1.$$

Les  $S^k(df_1)$  décrivent ainsi toutes les différentielles des intégrales premières  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $X$ .

3.6. EXEMPLE. — L'oscillateur harmonique à  $n$  degrés de liberté. Soit

$M = T^*\mathbb{R}^n$ , muni de sa structure symplectique canonique  $\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n dy_i \wedge dx_i$

et soit  $f_1 = \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2)$  le hamiltonien. On sait alors qu'on peut trouver

sur  $T^*\mathbb{R}^n - \{0\}$  des coordonnées canoniques  $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$  telles que  $f_1, \dots, f_n$  soient des intégrales premières du système hamiltonien de hamiltonien  $f_1$  (« coordonnées action-angle ») [12].

Le résultat précédent s'étend alors à  $T^*\mathbb{R}^n - \{0\}$  que l'on peut donc munir de la bi-structure donnée par :

$$\tilde{\omega} = \sum_{i=1}^n df_i \wedge dg_i$$

et par  $\omega = df_2 \wedge dg_1 + \dots + df_{i+1} \wedge dg_i + \dots + df_n \wedge dg_{n-1} + df_1 \wedge dg_n$ .

Pour cette bi-structure,  $X = \# \tilde{d}f_1$  est un système hamiltonien d'ordre  $n$ .

Le cadre géométrique particulièrement simple qui précède semble ainsi permettre une approche de la complète intégrabilité des systèmes hamiltoniens. Il se généralise dans plusieurs directions : variétés de Poisson-Nijenhuis, variétés banachiques [1] [2].

## RÉFÉRENCES

- [1] F. MAGRI, A geometrical approach to the nonlinear solvable equations, *Lecture Notes in Physics*, t. **120**, Springer-Verlag, 1980, p. 233-263.
- [2] F. MAGRI, C. MOROSI, *A geometrical characterization of integrable Hamiltonian systems through the theory of Poisson-Nijenhuis manifolds*, preprint Milano Univ., 1984.
- [3] F. MAGRI, C. MOROSI, O. RAGNISCO, Reduction techniques for infinite-dimensional Hamiltonian systems: some ideas and applications. *Communications in Mathematical Physics*, t. **99**, 1985, p. 115-140.
- [4] G. MARMO, *A geometrical characterization of completely integrable systems*, in Proceedings of the meeting « Geometry and Physics », Florence, 1982, p. 257-262.
- [5] S. DE FILIPPO, G. MARMO, M. SALERNO, G. VILASI, *A new characterization of completely integrable systems*, preprint Salerno Univ., 1983.
- [6] DE FILIPPO, M. SALERNO, G. VILASI. A geometrical approach to the integrability of soliton equations. *Letters in Mathematical Physics*, t. **9**, n° 2, 1985, p. 85-91.
- [7] B. FUCHSSTEINER, The Lie algebra structure of degenerate Hamiltonian and bi-hamiltonian systems, *Progress of Theoretical Physics*, t. **68**, n° 4, 1982, p. 1082-1104.
- [8] A. LICHNEROWICZ. Les variétés de Poisson et leurs algèbres de Lie associées, *Journal of Differential Geometry*, t. **12**, 1977, p. 253-300.
- [9] C. M. MARLE, *Poisson manifolds in mechanics*, in *Bifurcation Theory, Mechanics and Physics*, Reidel Publishing Company, 1983, p. 47-76.
- [10] Y. KOSMANN-SCHWARZBACH, *Cours de 3<sup>e</sup> cycle*, Université de Lille, 1984.
- [11] A. WEINSTEIN, Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds, *Advances in Mathematics*, t. **6**, 1971, p. 329-346.
- [12] V. I. ARNOLD, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1978.

(Manuscrit reçu le 29 avril 1985)