ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

ERNESTO LACOMBA
LUCETTE LOSCO

Caractérisation variationnelle globale des flots canoniques et de contact dans leurs groupes de difféomorphismes

Annales de l'I. H. P., section A, tome 45, nº 1 (1986), p. 99-116
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1986__45_1_99_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. 45, n° 1, 1986, p. 99-116. *Physique théorique*

Caractérisation variationnelle globale des flots canoniques et de contact dans leurs groupes de difféomorphismes

par

Ernesto LACOMBA (*) et Lucette LOSCO (**)

RÉSUMÉ. — Nous établissons tout d'abord une généralisation d'une étude faite par V. Arnold à propos des équations de l'Hydrodynamique, basée sur le groupe (de dimension infinie) des difféomorphismes conservant le volume. Nous caractérisons alors par des principes variationnels les champs de vecteurs hamiltoniens d'une variété compacte à bord, considérés comme éléments de l'Algèbre de Lie du groupe des difféomorphismes canoniques, ainsi que les champs de vecteurs de contact associés aux difféomorphismes de contact.

ABSTRACT. — We consider here a generalization of a variational principle due to V. Arnold for Euler equations in hydrodynamics, in terms of the (infinite dimensional) groups of volume preserving diffeomorphisms. Then we apply it to the characterization of hamiltonian vector fields in a compact manifold M, with boundary, as elements of the Lie algebra of canonical diffeomorphisms. A similar, but not so simple characterization, is made for the contact vector fields associated to contact diffeomorphisms.

(*) Departamento de Mátematicas, Universidad Autónoma Metropolitana Iztapalapa, Apdo Postal 55-534, Mexico 13, DF, Mexico.

Recherche partiellement subventionnée par la bourse PCCBBNA 022553 du CONACYT (Mexique).

(**) École Nationale Supérieure de Mécanique et des Microtechniques, La Bouloie, Route de Gray, 25030 Besançon Cedex, France.

1. INTRODUCTION

En 1966 V. I. Arnold [*2*] [*3*] a établi une généralisation du problème d'Euler-Poinsot aux Groupes de Lie. Cette généralisation peut s'étendre en particulier à la cinématique des fluides parfaits incompressibles. La lecture simultanée des deux travaux est intéressante car l'un [*2*] est dans un contexte très général de géométrie différentielle (voir aussi [*4*]), alors que les mêmes idées sont présentées de manière très classique par le calcul vectoriel dans [*3*]. La structure différentiable des groupes de difféomorphismes utilisée par Arnold n'a été bien précisée qu'en 1970 par Ebin et Marsden [*5*] (voir aussi [*12*]) qui ont obtenu simultanément des résultats d'existence et d'unicité des solutions pour les fluides.

Ce sont les idées de ces articles qui sont à la base d'un théorème plus général, que le deuxième auteur a conjecturé à propos d'un principe variationnel dans des groupes de difféomorphismes convenables. Cette généralisation a été signalée pour la première fois en [*11*] avec une application à la caractérisation variationnelle des champs canoniques d'une variété symplectique. Nous avons repris ce travail en collaboration avec le premier auteur [*8*] [*9*] en y ajoutant une discussion relative à l'introduction d'un moment cinétique global et en prolongeant par une caractérisation variationnelle des champs globalement hamiltoniens d'une variété symplectique exacte et des champs de contact d'une variété de contact. Le but du présent article est de présenter la démonstration et quelques prolongements des résultats de nos notes précédentes. En particulier, on étudie ici avec plus de détails le cas où le champ de vecteurs est dépendant du temps.

2. LE PROBLÈME D'EULER-POINSOT

C'est l'étude du mouvement d'un solide S mobile autour d'un point fixe O, la liaison en O étant supposée parfaite, S n'étant soumis à aucune autre action extérieure. C'est aussi le problème du mouvement autour de son centre d'inertie d'un solide S soumis à des actions équivalentes à une force appliquée en ce centre d'inertie. Pour repérer le solide S on lui associe un repère $\mathscr{R}_S$ d'origine O, lié à S, et on considère simultanément un repère absolu de référence $\mathscr{R}$. Le passage de $\mathscr{R}$ à $\mathscr{R}_S$ s'effectue par une rotation g, élément de SO(3), de telle sorte que l'étude du mouvement de S est la détermination de l'arc $t \to g_t$ de SO(3) qui lui est associé. SO(3) est un groupe de Lie de dimension 3 : G, dont l'Algèbre de Lie $\mathscr{G}$ est l'ensemble des endomorphismes antisymétriques de $\mathbb{R}^3$. Soit M un point de S, x_t sa configuration dans $\mathscr{R}$ à l'instant t, X sa configuration dans $\mathscr{R}_S$ (bien sûr indépendante de t), v_t sa vitesse relative à $\mathscr{R}$, nous avons les relations fondamentales :

$$x_t = g_t(\mathrm{X}) \qquad v_t = \dot{x}_t = \dot{g}_t(\mathrm{X}) = g_t \circ \Omega_t(\mathrm{X}) = \omega_t(x_t)$$

où Ω_t et ω_t sont les éléments de $\mathscr{G}$ définis respectivement par

$$\Omega_t = g_t^{-1} \circ \dot{g}_t \qquad \text{et} \qquad \omega_t = \dot{g}_t \circ g_t^{-1}.$$

Le passage de ω_t à Ω_t s'effectue par $\Omega_t = g_t^{-1} \circ \omega_t \circ g_t$.

Considérons le produit scalaire de $\mathscr{G}$:

$$\mathscr{I}(\Omega_1, \Omega_2) = \int_{\mathrm{S}} \Omega_1(\mathrm{X}) \,.\, \Omega_2(\mathrm{X}) dm$$

associé à l'énergie cinétique $2\mathrm{T} = \mathscr{I}(\Omega, \Omega)$.

Par translation à gauche dans G on peut définir en chaque élément g de G un produit scalaire sur $\mathrm{T}_g\mathrm{G}$:

$$\langle \dot{g}_1, \dot{g}_2 \rangle_g = \mathscr{I}(g^{-1}\dot{g}_1, g^{-1}\dot{g}_2)\,.$$

On obtient ainsi sur G une métrique riémannienne invariante à gauche, obtenue par translation à gauche du produit scalaire sur $\mathscr{G} = \mathrm{T}_e\mathrm{G}$. Le mouvement du solide satisfait au principe de moindre action, associé à

$$\mathscr{A} = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{T}dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2}\mathscr{I}(\Omega, \Omega)dt = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{g}, \dot{g} \rangle \, dt\,.$$

Les équations d'Euler du Calcul des Variations sont ici les équations d'Euler du problème d'Euler-Poinsot, que nous pouvons écrire directement par application du théorème du moment cinétique et que nous énonçons ici dans le contexte général de la façon suivante :

Définissons le moment cinétique J_{Ω_t} comme étant l'élément de $\mathscr{G}^*$, dual de $\mathscr{G}$, tel que pour tout Ω':

$$\langle \mathrm{J}_{\Omega_t}, \Omega' \rangle = \mathscr{I}(\Omega_t, \Omega')\,,$$

soit $\mathrm{F}(\Omega_t)$ l'élément de $\mathscr{G}^*$ défini par :

$$\langle \mathrm{F}(\Omega_t), \Omega' \rangle = \langle \mathrm{J}_{\Omega_t}, [\Omega_t, \Omega'] \rangle \quad \forall \Omega'\,,$$

alors $\dfrac{d}{dt}\mathrm{J}_{\Omega_t} = \mathrm{F}(\Omega_t)$ est l'équation cherchée, traduisant le théorème du moment cinétique appliqué au corps solide en son centre d'inertie.

Posons alors $\mathrm{J}_{\Omega_t} = \overline{\mathscr{I}}(\Omega_t)$, l'application $\overline{\mathscr{I}}$ est une application linéaire constante, inversible lorsque le solide comporte 3 points non alignés (c'est le tenseur d'inertie classique des mécaniciens). Alors :

$$\frac{d}{dt}\Omega_t = \overline{\mathscr{I}}^{-1}\mathrm{F}(\Omega_t) = f(\Omega_t)\,.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre dans l'Algèbre de Lie $\mathscr{G}$.

V. Arnold a généralisé cette équation pour la caractérisation des géodésiques d'un groupe de Lie muni d'une métrique riemannienne invariante à gauche (respectivement à droite). Elle a été obtenue pour le groupe des difféomorphismes associés aux mouvements d'un fluide parfait par Arnold [*2*] et détaillée par Marsden-Abraham [*12*].

Le schéma suivant de l'étude des mouvements d'Euler-Poinsot est fondamental pour les généralisations considérées dans le présent article :

1) Équation différentielle dans l'Algèbre de Lie $\mathcal{G}$ de G :

$$\text{(E)} \qquad \frac{d}{dt}\Omega_t = f(\Omega_t).$$

2) Intégrale première du moment cinétique : $\langle \mathrm{J}_{\Omega_t}, \Omega' \rangle$ est une intégrale première pour tout $\Omega' = g_t^{-1} \circ \omega' \circ g_t$ où ω' est indépendant de t.

3) Intégrale de l'énergie : $\frac{1}{2}\mathscr{I}(\Omega_t, \Omega_t) = h.$

4) Solutions stationnaires : positions d'équilibre de l'équation (E) correspondant aux éléments fixes de (E) annulant f, associés aux arcs solutions groupes à un paramètre de G.

5) Polhodies : l'étude générale des polhodies d'après l'étude du corps solide a été faite dans le cadre général d'un groupe de Lie de dimension finie par Abraham et Marsden [*1*]. Cette étude est relative à l'aspect géométrique. E. Lacomba [*7*] a effectué une caractérisation topologique pour le cas général d'un espace homogène. Nous n'avons pas traité la généralisation des polhodies pour les Groupes de Lie de dimension infinie. Ceci reste donc un problème ouvert.

3. LE PROBLÈME DU FLUIDE PARFAIT INCOMPRESSIBLE EN HYDRODYNAMIQUE

Considérons le mouvement d'un fluide parfait incompressible limité à un domaine M de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. M est supposé être une variété riemannienne différentiable, orientée, à bord. Le mouvement est régi par les équations d'Euler :

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathrm{X}_t}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{X}_t}{\partial t} + (\mathrm{X}_t \,.\, \nabla)\mathrm{X}_t = -\operatorname{grad}\alpha \\ \operatorname{Div}\mathrm{X}_t = 0 \end{cases}$$

X_t est le champ de vecteurs représentant la vitesse des particules du fluide dans M, à l'instant t, dépendant éventuellement du temps, $\alpha = -\mathrm{U} + p$ est la somme de la fonction de forces associée aux forces extérieures et de la pression intérieure. $\operatorname{Div}\mathrm{X}_t = 0$ traduit l'incompressibilité du fluide. De plus sur le bord $\partial\mathrm{M}$, X_t est nécessairement tangent en chaque point à $\partial\mathrm{M}$.

La position des particules du fluide, à chaque instant t, est obtenue par l'application d'un difféomorphisme g_t de M dans M, dépendant de t et conservant l'élément de volume v, associé à la métrique riemannienne de M. Soit G le groupe des difféomorphismes de M conservant v, la trajectoire d'une particule occupant la position x_0 à t_0 est l'arc $t \to x(t, x_0) = g_t(x_0)$. La correspondance entre X_t et g_t est donnée par

$$\dot{g}_t(x) = \frac{d}{dt} g_t(x) = X_t(g_t(x))$$

ou de façon équivalente

$$X_t(x) = \dot{g}_t \circ g_t^{-1}(x) .$$

L'ensemble $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs satisfaisant aux deux conditions :

1) $\operatorname{Div} X = 0$
2) X tangent à ∂M

est une algèbre de Lie $\mathcal{G}$, associée à G (cf. cas général par. 4). La proposition qui suit établit une correspondance entre deux principes variationnels. Le premier principe est l'énoncé du Principe de Moindre Action pour les particules fluides dans M, le deuxième principe apparaît comme global.

1) Les trajectoires du champ X_t sont extrémales sur M de l'action

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{\| \dot{x} \|^2}{2} + U(x, t) \right) dt$$

où U contient la fonction des forces extérieures et la pression intérieure, et où $\| \quad \|$ désigne la norme pour les vecteurs tangents, associé à la métrique riemannienne.

2) L'arc $t \to g_t$ est extrémale, sur G, de l'action « globale »

$$\mathcal{A} = \int_{t_0}^{t_1} \int_M \frac{1}{2} \| \dot{g}_t \circ g_t^{-1}(x) \|^2 v dt$$

L'intégrale sur M est l'énergie cinétique totale du fluide au facteur près de la masse volumique qui est constante.

PROPOSITION (Arnold [*2*], [*4*]).

Si les trajectoires de X_t sont extrémales sur M de A, alors l'intégrale g_t de X_t est extrémale sur G de $\mathcal{A}$. Réciproquement si g_t est extrémale de $\mathcal{A}$ sur G, il existe une fonction $U(x, t)$ telle que les trajectoires de $X_t = \dot{g}_t \circ g_t^{-1}$ sont extrémales de A.

Le paragraphe suivant donne une généralisation fondamentale qui sera appliquée à des cas originaux (cas symplectique, cas de contact). Nous développerons dans le cas général l'équation d'Euler (qui est dans le cadre de ce paragraphe l'équation de Bernoulli), l'intégrale du moment cinétique, l'intégrale de l'énergie.

4. RÉSULTAT GÉNÉRAL

Soit M une variété riemannienne différentiable orientée, de dimension n, à bord ∂M. Soit ν une forme élément de volume (ou orientation) de M. C'est une n-forme qui ne s'annule en aucun point de M. Notons par G le groupe des difféomorphismes de M, laissant ∂M invariant et conservant le volume. Leslie [*10*] et Omori [*13*] ont montré que le groupe de tous les difféomorphismes de M a une structure de variété différentiable C^∞, modelée dans un espace de Fréchet et constitue un Groupe de Lie (la multiplication et l'inverse étant différentiables). Ebin et Marsden [*5*] ont montré que G lui aussi est un Groupe de Lie, modelé dans un espace de Fréchet, et en fait un sous-groupe de Lie du précédent. L'Algèbre de Lie $\mathcal{G} = T_eG$ peut s'identifier à l'ensemble de champs de vecteurs X, indépendants du temps, et satisfaisant aux deux conditions :

1) $\mathrm{Div}_\nu X = 0$
2) $\mathrm{inc}_* \, i_X \nu = 0$ où inc : $\partial M \to M$ est l'inclusion.

La dernière condition explicite que X est tangent à ∂M, comme dans le paragraphe précédent. Pour le groupe complet de tous les difféomorphismes on omet la condition 1).

Signalons en remarque qu'un champ de vecteurs dépendant du temps t apparaît comme étant un arc de l'Algèbre de Lie, paramétré par t. Nous verrons ultérieurement que cet arc est solution de l'équation d'Euler généralisée dans $\mathcal{G}$. On définit une structure riemannienne faible pour G ou plus généralement pour le groupe de tous les difféomorphismes, en écrivant

$$\langle X, Y \rangle = \int_M X \, . \, Y \nu$$

pour tous X, Y, champ de vecteurs éléments de $\mathcal{G}$. X.Y signifie le produit intérieur relatif à la métrique riemannienne de M. On étend partout dans G par translation à droite.

Soit $t \to g_t$ un arc, intégrale d'un champ de vecteurs dépendant éventuellement de t. Alors $t \to g_t$ est un sous-groupe à un paramètre de G, si et seulement si ce champ de vecteurs est élément fixe de $\mathcal{G}$. On a donc d'une part les trajectoires de X_t sur M, qui peuvent se relever sur TM, et d'autre part sur G l'arc $t \to g_t$ de X_t satisfaisant à $X_t = \dot{g}_t \circ g_t^{-1}$ comme on l'a vu dans le cas hydrodynamique.

On suppose aussi donné un Lagrangien, c'est-à-dire une fonction L : $TM \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont les trajectoires de X dans M sont extrémales. Notre résultat principal ci-dessous établit qu'il est possible d'obtenir pour l'arc $t \to g_t$ de G, intégrale de X_t, un principe variationnel dans le groupe G correspondant à un principe variationnel associé aux trajectoires de X_t

dans M. Les arcs g_t sont géodésiques si et seulement si L provient d'une métrique riemannienne faible pour G, à une fonction près de x et de t, comme dans le cas de l'hydrodynamique.

THÉORÈME PRINCIPAL.

1) Si les trajectoires de X_t sont extrémales sur M de la fonctionnelle

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L(\xi_x, t)dt \quad \text{où} \quad \xi_x \text{ appartient à } T_xM$$

alors son arc intégral g_t dans G est extrémale sur G de la fonctionnelle

$$\mathscr{A} = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_M L(\dot{g}_t \circ g_t^{-1}(x), t)v \right) dt$$

2) Réciproquement, si g_t est un arc extrémal sur G de $\mathscr{A}$ alors les trajectoires de $X_t = \dot{g}_t \circ g_t^{-1}$ sont extrémales sur M de

$$A + \int_{t_0}^{t_1} U(x, t)dt$$

où U est une fonction arbitraire de $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Démonstration. — Si $(x, \dot{x})$ sont des coordonnées locales de TM, on peut écrire

$$A = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t)dt .$$

Comme $g^*v = v$ par hypothèse, effectuons pour t fixé la transformation $y = g_t^{-1}(x)$ qui conserve v. En globalisant les coordonnées locales sur des cartes qui couvrent M, nous avons (voir [*1*], par. 5.5) :

$$\mathscr{A}(g_t, \dot{g}_t) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_M L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t)v .$$

Soit $g_t h \in G$ et $\dot{g}_t + \dot{h} \in T_{g_t h}G$, où on fixe une parallélisation convenable de $TG \simeq G \times g$.

Alors :

$$D\mathscr{A}(g_t, \dot{g}_t)(h, \dot{h}) = D_{g_t}\mathscr{A}(g_t, \dot{g}_t).h + D_{\dot{g}_t}\mathscr{A}(g_t, \dot{g}_t).\dot{h}$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_M \partial_{g_t} L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t)hv + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_M \partial_{\dot{g}_t} L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t)\dot{h}v.$$

En intégrant par parties

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_M \partial_{\dot{g}_t} L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t)\dot{h}v = \int_M v \int_{t_0}^{t_1} - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{g}_t} L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t) h dt$$

avec $h(t_0) = h(t_1) = 0$.

Donc

$$\begin{aligned} D\mathscr{A}(g_t, \dot{g}_t)(h, \dot{h}) &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_M \left[\partial_{g_t} L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t) - \frac{d}{dt} \partial_{\dot{g}_t} L(g_t(y), \dot{g}_t(y), t) \right] hv \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt \int_M \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) (x, X_t(x), t) h_i \circ g_t^{-1}(x) v \end{aligned}$$

où on a effectué la transformation inverse g_t^{-1}.

Posons $Y_t = \sum_i h_i \circ g_t^{-1} \frac{\partial}{\partial x^i}$. C'est un champ de vecteurs élément de $\mathscr{G}$ à chaque instant t.

Posons $\beta_X = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \right)_{\dot{x}=X} dx^i$.

C'est une forme différentielle dans M, dépendant de t. Nous verrons ultérieurement une expression intrinsèque de β_X, indépendante de la carte locale. On peut écrire $D\mathscr{A} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_M i_Y \beta_X v$.

L'arc g_t, flot de X, est extrémale si et seulement si $D\mathscr{A} = 0$ quel que soit Y de $\mathscr{G}$ et à chaque instant t, soit si $i_Y \beta_X = 0$ pour tout Y à divergence nulle et tangent à ∂M. Nous allons en conclure que β_X est exacte en appliquant le théorème de Hodge pour le cas des formes différentielles (cf. Lemme suivant). Par conséquent si, sur M, les trajectoires de X sont extrémales de A, l'équation d'Euler classique du Calcul des Variations implique que en coordonnées locales

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = 0$$

pour tout i, le long de toute solution. Donc $\beta_X = 0$ et g_t est extrémale de $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{G}$.

Réciproquement si g_t est extrémale de $\mathscr{A}$ sur G on peut écrire $\beta_X = -dU$, d'après le lemme, avec $U : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonction C^∞. Donc en coordonnées locales

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right)_{\dot{x}=X} = - \frac{\partial U}{\partial x^i}.$$

Ce sont les équations d'Euler de $\overline{L} = L + U$ et par conséquent les trajectoires de X sont extrémales de

$$A = \int_{t_0}^{t_1} \overline{L}dt \quad \text{avec} \quad \overline{L} = L + U .$$

Les parties directe et réciproque du théorème sont donc démontrées. On remarque que la même action $\mathscr{A}$ sur G correspond à des actions A sur M qui diffèrent d'une fonction U arbitraire ($V = -U$ est l'énergie potentielle en Mécanique).

Notons $\mathscr{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs indépendants du temps dans M, et $\Lambda^1(M)$ l'ensemble des 1-formes différentielles dans M. Ces deux ensembles peuvent être considérés comme espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$:

LEMME. — *(Théorème de Hodge [1] pour une forme différentielle).*

Soit X *un champ de vecteurs de* M *(indépendant du temps), soit* θ *une 1-forme différentielle dans* M.

Définissons le crochet de dualité $\langle\ ,\ \rangle : \Lambda^1(M) \times \mathscr{X}(M) \to \mathbb{R}$ *par* $\langle \theta, X \rangle = \int_M i_x\theta v$:

L'orthogonal de $\mathscr{G}$ *par rapport au crochet de dualité est l'ensemble* $\mathscr{D}$ *des différentielles exactes de* M.

Démonstration. — Si X élément de $\mathscr{X}(M)$ est tangent à ∂M, son flot g_τ est un difféomorphisme de M donc $g_\tau(M) = M$ de telle sorte que

$$\int_{g_\tau(M)} Fv = \int_M g_\tau^*(Fv)$$

pour toute fonction $F : M \to \mathbb{R}$. Donc :

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\left(\int_{g_\tau(M)} Fv\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{g_h(M)} Fv - \int_M Fv\right] = 0 .$$

Mais d'autre part :

$$\left.\frac{d}{d\tau}\right|_{\tau=0}\left(\int_{g_\tau(M)} Fv\right) = \lim_{h\to 0}\int_M \frac{g_h^*(Fv) - Fv}{h} = \int_M \mathscr{L}_X(Fv) .$$

Donc pour toute fonction F :

$$0 = \int_M \mathscr{L}_X(Fv) = \int_M F(\mathscr{L}_X v) + \int_M (\mathscr{L}_X F)v .$$

Par conséquent si X et θ appartiennent respectivement à $\mathcal{G}$ et à $\mathcal{D}$ on a $\theta = d\mathrm{F}$ et

$$\langle \theta, \mathrm{X} \rangle = \int_{\mathrm{M}} d\mathrm{F}(\mathrm{X})v = \int_{\mathrm{M}} (\mathcal{L}_{\mathrm{X}}\mathrm{F})v = - \int_{\mathrm{M}} \mathrm{F}(\mathcal{L}_{\mathrm{X}}v) = 0$$

car $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}v = 0$.

Donc $\mathcal{G}$ est inclus dans l'orthogonal de $\mathcal{D}$.

De plus si X est orthogonal à $\mathcal{D}$, nous avons $\langle \theta, \mathrm{X} \rangle = 0$ pour tout $\theta = d\mathrm{F}$, or $\int_{\mathrm{M}} \mathrm{F}(\mathcal{L}_{\mathrm{X}}v) = 0$ pour tout F.

Par conséquent $\mathcal{L}_{\mathrm{X}}v = 0$, donc X est élément de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est l'orthogonal de $\mathcal{D}$. Pour montrer que réciproquement $\mathcal{D}$ est l'orthogonal de $\mathcal{G}$, plongeons $\mathcal{G}$ dans l'espace de Hilbert des champs de vecteurs de M à composantes dans L^2 et faisons de même pour $\mathcal{D}$.

Soient $\overline{\mathcal{G}}$ et $\overline{\mathcal{D}}$ les adhérences de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$. $\overline{\mathcal{G}}$ est l'orthogonal de $\overline{\mathcal{D}}$ et comme il s'agit de sous-espaces fermés, symétriquement $\overline{\mathcal{D}}$ est l'orthogonal de $\overline{\mathcal{G}}$. Donc $\mathcal{D}$ est l'orthogonal de $\mathcal{G}$.

Remarquons que le lemme est aussi valable dans le cas où champs de vecteurs, formes différentielles, fonctions, dépendent aussi du temps t. Dans ce cas il faudra considérer partout t comme un paramètre fixé : X_t, θ_t, F_t où par exemple $\mathrm{F}_t : \mathrm{M} \to \mathbb{R}$ est la fonction F de $\mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ obtenue en fixant t. Désormais F, X, θ... désignent respectivement la fonction de $\mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ., . et F_t, X_t, θ_t, ... la restriction à l'instant t.

Nous avons ainsi obtenu que g_t est extrémale de $\mathcal{A}$ si et seulement si β_{X_t} est une forme différentielle exacte. Ce résultat n'était connu que pour l'hydrodynamique, voir Marsden, Abraham [*12*].

Il y a deux autres formulations équivalentes pour les équations d'Euler pour $\mathcal{A}$. Il est pour cela nécessaire d'introduire quelques notations.

Soit d_v la différentielle verticale dans TM [*6*, Ch. X] d'expression locale pour une fonction f : TM $\to \mathbb{R}$:

$$d_v f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \dot{x}^i} dx^i .$$

Pour chaque t fixé, on définit la forme différentielle suivante, élément de $\Lambda^1(\mathrm{M})$, par

$$\alpha_{\mathrm{X}_t} = (d_v\mathrm{L}) \circ \mathrm{X}_t .$$

Désignons par $\alpha_{\mathrm{X}} : t \to \alpha_{\mathrm{X}_t}$ et par $\dfrac{\partial \alpha_{\mathrm{X}_t}}{\partial t}$ la dérivée par rapport à t. α_{X_t} s'écrit en coordonnées locales : $\alpha_{\mathrm{X}_t}(x) = \left.\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \dot{x}^i}\right|_{\dot{x} = \mathrm{X}_t} dx^i$.

Si d désigne la différentiation dans M, pour t fixé, β_{X_t} a alors l'expression intrinsèque suivante :

$$\beta_{X_t} = d(L \circ X_t) - \mathscr{L}_{X_t}\alpha_{X_t} - \frac{\partial \alpha_{X_t}}{\partial t}.$$

THÉORÈME. — *Les équations d'Euler Lagrange pour $\mathscr{A}$ ont les 3 formulations équivalentes suivantes :*

E$_1$) β_{X_t} *est exacte pour tout* t ;

E$_2$) $\mathscr{L}_{X_t}\alpha_{X_t} + \dfrac{\partial \alpha_{X_t}}{\partial t}$ *est exacte pour tout* t ;

E$_3$) $\dfrac{\partial \alpha_{X_t}}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_{X_t}$ *est exacte pour tout* t.

Pour simplifier l'écriture nous écrirons désormais β_X, α_X, ... au lieu de β_{X_t}, α_{X_t}, ...

Démonstration. — D'après l'expression intrinsèque de β_X il est évident que E$_1$ est équivalente à E$_2$.

D'autre part $\mathscr{L}_X\alpha_X = (i_X d + d i_X)\alpha_X = i_X d\alpha_X + d(i_X\alpha_X)$.

On en conclut que E$_2$ est équivalente à E$_3$.

En Mécanique des Fluides, pour un fluide dans un domaine M de $\mathbb{R}^3$ nous avons :

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{\| \dot{x} \|^2}{2} + U(x, t)$$

et si $X = \sum_i X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ on obtient $\alpha_X = \sum_i X^i dx^i$,

$$\beta_X = dU - \sum_i L_X(X^i dx^i) - \sum_i \frac{\partial}{\partial t}(X^i dx^i)$$

et les 3 conditions du théorème deviennent :

E$_1$) $\dfrac{\partial X}{\partial t} + (X . \nabla)X = \operatorname{grad}(U - p)$ (Équation d'Euler) ;

E$_2$) $\displaystyle\oint_{C_t} \alpha_X = \oint_{C_0} \alpha_X$ (Théorème de Helmotz ou de Kelvin).

C_t est l'image à l'instant t de C_0 considérée à l'instant t_0 ;

E$_3$) $\dfrac{\partial X}{\partial t} - X \wedge \operatorname{rot} X = -\operatorname{grad}(h + p)$ (Équation de Bernoulli).

$h = \dfrac{\| X \|^2}{2} - U$ est l'énergie.

Les solutions stationnaires sont les solutions dans $\mathcal{G}$ qui sont des groupes à un paramètre et dont par conséquent les champs de vecteurs associés ne dépendent pas de t.

5. ÉNERGIE. INTÉGRALE DE L'ÉNERGIE

Soit $E = i_X\alpha_X - L \circ X$. Définissons l'énergie du problème globale par $\mathcal{E} = \int_M Ev$. Supposons que L ne dépende pas du temps $\left(\frac{\partial L}{\partial t} = 0\right)$ et effectuons le calcul de $\frac{\partial E}{\partial t}$. En coordonnées locales :

$$\alpha_X = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ X\right) dx^i$$

$$i_X\alpha_X = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ X\right) X^i$$

$$E = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \circ X\right) X^i - L \circ X$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} \circ X \frac{\partial X^j}{\partial t} X^i .$$

Par conséquent sous forme intrinsèque $\frac{\partial E}{\partial t} = i_X \frac{\partial \alpha_X}{\partial t}$.

Donc :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_M i_X \frac{\partial \alpha_X}{\partial t} v .$$

La condition E_3 implique que $\frac{\partial \alpha_X}{\partial t} + i_X d\alpha_X = dF$, donc que $i_X \frac{\partial \alpha_X}{\partial t} = i_X dF$. Donc $\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_M (i_X dF)v = 0$ du fait de l'orthogonalité de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$.

En Mécanique des Fluides $\mathcal{E} = \int_M \frac{\|X\|^2}{2} v$ correspond à l'énergie cinétique totale du fluide incompressible au facteur près de sa masse volumique constante. Dans ce cas il y a donc intégrale de l'énergie cinétique globale, conformément au résultat de Arnold.

6. MOMENT CINÉTIQUE. INTÉGRALE DU MOMENT CINÉTIQUE

Nous allons définir un moment associé au groupe G et donner le théorème de Noether correspondant.

De façon analogue à ce qui a été fait pour le corps solide (par. 2) définissons le moment associé à X : J_X comme étant l'élément de $\mathcal{G}^*$ tel que pour tout X′ de $\mathcal{G}$:

$$J_X(X') = \int_M i_{X'}\alpha_X v \,.$$

En particulier dans le cas de la Mécanique des Fluides :

$$J_X(X') = \int_M X.X'v$$

où le produit scalaire est le produit associé à la métrique riemannienne de M. Le théorème de Noether, associé à l'invariance de $\mathcal{A}$ par les translations à droite de G, se traduit de la façon suivante.

THÉORÈME. — *Pour tout champ de vecteurs* $X' \in g$ *invariant par l'arc intégral* g_t *de* X, $J_X(X')$ *est une intégrale première.*

En effet $J_X(X') = \int_M i_{X'}\alpha_X v = \int_M i_{g_t{}^*X'}(g_t^*\alpha_X)v$ puisque $g_t(M) = M$ et $g_t^*(v) = v$. Par hypothèse $g_{t*}X' = X'$. On peut vérifier que

$$\frac{g_{t+h}^*\alpha_{X_{t+h}} - g_t^*\alpha_{X_t}}{h} = g_{t+h}^* g_h^{*-1}\frac{g_h^*\alpha_{X_{t+h}} - \alpha_{X_{t+h}}}{h} + g_t^*\frac{\alpha_{X_{t+h}} - \alpha_{X_t}}{h}$$

donc :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}J_X(X') &= \int_M i_{X'}\left(g_t^*\mathcal{L}_X\alpha_X + g_t^*\frac{\partial\alpha_X}{\partial t}\right)v\\ &= \int_M i_{X'}\left(g_t^*\left(\mathcal{L}_X\alpha_X + \frac{\partial\alpha_X}{\partial t}\right)\right)v\end{aligned}$$

mais en vertu de la caractérisation (E2) $\mathcal{L}_X\alpha_X + \dfrac{\partial\alpha_X}{\partial t}$ est une différentielle exacte, donc $g_t^*\left(\mathcal{L}_X\alpha_X + \dfrac{\partial\alpha_X}{\partial t}\right)$ est aussi une différentielle exacte du fait de la commutation de g_t^* et d ; par conséquent $\dfrac{d}{dt}J_X(X') = 0$ en vertu de l'orthogonalité de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{D}$.

7. MÉCANIQUE SYMPLECTIQUE

Considérons maintenant une variété symplectique compact à bord d'élément de volume $v = \omega^n$, où $\omega = d\alpha$ est sa 2-forme canonique et ω^n la $n^{\text{ème}}$ puissance extérieure de ω. Nous considérons l'Algèbre de Lie $\mathcal{G}$ des champs de vecteurs globalement hamiltoniens X de M, qui sont tangents à ∂M et pour lesquels $i_X\omega$ est une différentielle exacte $i_X\omega = -d$H. Ces champs de vecteurs laissent invariant v. Si g_t est l'arc intégral de X, on continuera à noter $\dot{g}_t \circ g_t^{-1}$ par X.

En coordonnées canoniques $x = (q, p)$, α s'écrit $\alpha = \sum_i p_i dq^i$. Afin d'appliquer le théorème principal du paragraphe 4, définissons

$$\mathrm{L}(x, \dot{x}) = \sum_i p_i \dot{q}^i ,$$

de telle sorte que

$$\mathrm{L}(x, \mathrm{X}) = i_{\mathrm{X}}\alpha \qquad \text{pour X élément de } \mathscr{G}.$$

Le théorème général exprime alors que les champs de vecteurs globalement hamiltoniens de M sont ceux dont l'arc intégral est extrémale de

$$\mathscr{A} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathrm{M}} i_{\mathrm{X}}\alpha v ,$$

alors que les trajectoires correspondantes sont extrémales sur M de

$$\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} (i_{\xi_x}\alpha - \mathrm{H} \circ \Pi) dt ,$$

où $\Pi : \mathrm{TM} \times \mathbb{R} \to \mathrm{M} \times \mathbb{R}$ provient de la projection du fibré tangent.

Le Lagrangien de A en coordonnées locales est $\sum_i p_i \dot{q}^i - \mathrm{H}(q, p, t)$ de telle sorte que les équations d'Euler de A sont les équations hamiltoniennes de H :

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial q}.$$

Dans le cas présent α_{X} ne dépend pas de X : $\alpha_{\mathrm{X}} = \alpha$ et est donc indépendante de t, et $\beta_{\mathrm{X}} = d(i_{\mathrm{X}}\alpha) - \mathscr{L}_{\mathrm{X}}\alpha$.

Les formes équivalentes de l'équation d'Euler-Lagrange peuvent s'exprimer pour ce problème de la façon suivante :

E'_1) β_{X} est exacte ($\beta_{\mathrm{X}} = d\mathrm{H}$) ;
E'_2) $\mathscr{L}_{\mathrm{X}}\alpha$ est exacte ;
E'_3 $i_{\mathrm{X}}\omega$ est exacte ($i_{\mathrm{X}}\omega = -d\mathrm{H}$),

les différentiations étant toujours prises à temps fixé, c'est-à-dire sur M et non $\mathrm{M} \times \mathbb{R}$. Dans le cas présent L étant homogène de degré 1, $\mathscr{E} = 0$ et l'intégrale de l'énergie est triviale. D'autre part

$$\mathrm{J}_{\mathrm{X}}(\mathrm{X}') = \int_{\mathrm{M}} i_{\mathrm{X}'}\alpha v$$

de telle sorte que J_{X} ne dépend pas de X.

Quant aux solutions stationnaires, elles correspondent aux champs globalement hamiltoniens indépendants de t, c'est-à-dire à la Mécanique Hamiltonienne conservative.

8. CHAMPS DE CONTACT

Considérons maintenant une variété compacte, à bord, de dimension impaire, munie d'une 1-forme de contact α. On peut lui associer l'élément de volume $v = \alpha \wedge (d\alpha)^n$. Alors que le cas hamiltonien (par. 7) est analogue au cas d'un mouvement de fluide incompressible puisque l'élément de volume est invariant, le cas de contact est plutôt analogue au mouvement d'un fluide compressible. En effet la dérivée de Lie de α pour un champ de vecteurs de contact X donné sur M satisfait par définition à la relation $\mathscr{L}_X\alpha = \lambda\alpha$, où λ est une fonction sur M si X est conservatif, ou bien sur $M \times \mathbb{R}$ si X dépend de t, de telle sorte que $\mathscr{L}_X v = \lambda(n + 1)v$ n'est pas en général nulle.

Nous allons examiner s'il est possible de trouver un principe variationnel sur M pour les trajectoires d'un champ de vecteurs de contact X, dépendant éventuellement de t. En coordonnées locales de Darboux (p_i, q^i, s) nous pouvons écrire $\alpha = ds - \Sigma p_i dq^i$. Définissons le hamiltonien de contact de X par $K = - i_X\alpha$, l'équation $\mathscr{L}_X\alpha = \lambda\alpha$ est équivalente au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{q}^i = \dfrac{\partial K}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\dfrac{\partial K}{\partial q^i} - \dfrac{\partial K}{\partial s} p_i \\ \dot{s} = \Sigma p_i \dfrac{\partial K}{\partial p_i} - K \end{cases}$$

avec la relation supplémentaire $\lambda = -\dfrac{\partial K}{\partial s}$.

D'autre part les équations d'Euler-Lagrange de

$$\Lambda = \dot{s} - \Sigma p_i \dot{q}^i + K$$

sont

$$-\dot{p}_i - \frac{\partial K}{\partial q^i} = 0 \qquad \dot{q}^i - \frac{\partial K}{\partial p_i} = 0 \qquad -\frac{\partial K}{\partial s} = 0\,.$$

En notation intrinsèque $\Lambda = i_{\xi_X}\alpha + K \circ \Pi$ où Π a été défini au paragraphe 7. Soit G_1 le groupe des difféomorphismes de M conservant v, nous obtenons alors.

THÉORÈME. — *Si* $\lambda = 0$, *les trajectoires du champ de contact* X *de* M *sont* *les extrémales de* $\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda dt$ *satisfaisant à la condition supplémentaire* $\Lambda = 0$. *Alors le volume* v *est invariant et l'arc intégral* g_t *de* X *est extrémal sur* G_1 *de* $\mathscr{A} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathrm{M}} i_{\mathrm{X}} \alpha v$. *Réciproquement, si* g_t *est arc extrémal de* $\mathscr{A}$, *il existe une fonction* $\mathrm{K} : \mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *telle que les trajectoires de* X *sont extrémales de* $\mathrm{A} = \int_{t_0}^{t_1} (i_{\xi_x}\alpha + \mathrm{K} \circ \Pi) dt$. *Alors nécessairement* $\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial s} = 0$ *pour n'importe quelles coordonnées de Darboux, mais* X *n'est de contact que si l'équation* $\Lambda = 0$ *est vérifiée.*

Supposons maintenant qu'il existe une solution globale $\rho : \mathrm{M} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de « l'équation de continuité » :

$$\mathscr{L}_{\mathrm{X}}(\rho\alpha) + \frac{\partial \rho}{\partial t} \alpha = 0$$

ou de façon équivalente (car $\mathscr{L}_{\mathrm{X}}\alpha = \lambda\alpha$)

$$\mathscr{L}_{\mathrm{X}}\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} + \lambda\rho = 0 .$$

ρ est analogue à la densité d'un fluide compressible et $v' = \rho\alpha\Lambda(\rho d\alpha)^n = \rho^{n+1}v$ est un volume invariant.

Soit G_0 le groupe des difféomorphismes conservant v' et soit $\Lambda' \equiv \rho(i_{\xi_x}\alpha + \mathrm{K} \circ \Pi)$. Les équations d'Euler-Lagrange de Λ' sont :

$$- \rho_{q_i}(\dot{s} - p_i\dot{q}^i + \mathrm{K}) - \rho\left(\dot{p}_i + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial q_i}\right) = \dot{\rho} p_i$$

$$- \rho_{p_i}(\dot{s} - p_i\dot{q}^i + \mathrm{K}) - \rho\left(- \dot{q}_i + \frac{\partial \mathrm{K}}{\partial p_i}\right) = 0$$

$$- \rho_s(\dot{s} - p_i\dot{q}^i + \mathrm{K}) = 0 .$$

Ces équations sont vérifiées si X est de contact de hamiltonien de contact K. Le cas $\rho = 1$ correspond à $\lambda = 0$.

THÉORÈME. — *Soit* X *un champ de vecteurs de contact tel que* $\mathscr{L}_{\mathrm{X}}(\rho\alpha) + \frac{\partial(\rho\alpha)}{\partial t} = 0$. *Son arc intégral* g_t *est extrémale sur* G_ρ *de*

$$\mathscr{A} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{\mathrm{M}} \rho i_{\mathrm{X}} \alpha v'$$

où $v' = \rho^{n+1}v$.

Réciproquement si g_t *est extrémale de* $\mathscr{A}$ *sur* G_ρ, *les trajectoires sur* M *de* X *associé* g_t *sont extrémales de* $A = \int_{t_0}^{t_1} \rho(i_{\xi_X}\alpha + K \circ \Pi)dt$ *pour une certaine fonction* K *de* $M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. *Si* $\rho_s \neq 0$ *les équations d'Euler-Lagrange de* A *sont de contact pour* X *et de hamiltonien de contact associé* K. *Si* $\rho_s \equiv 0$, X *n'est de contact que si on a la relation supplémentaire* $\Lambda = 0$.

Notons que $\mathscr{L}_X K = \lambda K$, de telle sorte que si $\dfrac{\partial K}{\partial t} = 0$ et si K ne s'annule en aucun point de M, alors on peut prendre $\rho = \dfrac{1}{K}$ comme solution de l'équation de continuité, qui dans le cas général peut ne pas admettre de solutions. On trouve ici que $L \circ X = \rho(i_X\alpha + K)$ et $\alpha_X = \rho\alpha$. Par conséquent, les formulations équivalentes des équations d'Euler-Lagrange s'écrivent dans le cas présent comme des conditions remarquablement naturelles :

E_1'') $\beta_X = d(\rho i_X\alpha + \rho K) - \mathscr{L}_X(\rho\alpha) - \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\alpha$ est exacte, en fait est nulle à cause de l'équation de continuité et de $i_X\alpha = -K$.

E_2'') $\mathscr{L}_X(\rho\alpha) + \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\alpha$ est exacte, en fait est nulle (équation de continuité).

E_3'') $i_X d(\rho\alpha) + \dfrac{\partial}{\partial t}(\rho\alpha)$ est exacte, en fait est égale à $-d(i_X\rho\alpha) = d(\rho K)$.

L'énergie est nulle puisque le Lagrangien est encore dégénéré et le moment J_X est tel que :

$$J_X(X') = \int_M \rho i_{X'}\alpha v' .$$

Il est indépendant de X dans $\mathscr{G}_\rho$. Les solutions stationnaires correspondent toujours aux solutions de la Mécanique Conservative de contact.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. ABRAHAM, J. MARSDEN, *Foundations of Mechanics*, 2nd. Ed. Benjamin-Cummings, New York, 1978.

[2] V. ARNOLD, *Ann. Inst. Fourier* (Grenoble), t. **16**, 1966, p. 319-361.

[3] V. ARNOLD, *Journal de Mécanique*, t. **5**, n° 1, 1966, p. 29-43.

[4] V. ARNOLD, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 1978.

[5] D. EBIN, J. MARSDEN, *Ann. of Math.*, t. **92**, 1970, p. 102-163.

[6] C. GODBILLON, *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann, Paris, 1969.

[7] E. LACOMBA, *Symplectic Geometry*, Crumeyrolle, Grifone, Eds., Pitman Books, Londres, 1982, p. 66-75.

[8] E. LACOMBA, L. LOSCO, *Group Theoretical Methods in Physics*, K. B. Wolf, Ed., *Lecture Notes in Physics*, t. **135**, Springer Verlag, New York, 1980, p. 122-128.

[9] E. Lacomba, L. Losco, *Physica*, t. **114 A**, 1982, p. 124-128.
[10] J. Leslie, *Topology*, t. **6**, 1967, p. 263-271.
[11] L. Losco, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **278 A**, 1974, p. 1641-1643.
[12] J. Marsden, R. Abraham, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **16**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, p. 237-243.
[13] H. Omori, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **15**, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1970, p. 167-184.

(Manuscrit reçu le 18 novembre 1986)