

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

G. BOHNKE

## **Treillis d'ondelettes associés aux groupes de Lorentz**

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 54, n° 3 (1991), p. 245-259

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1991\\_\\_54\\_3\\_245\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1991__54_3_245_0)

© Gauthier-Villars, 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Treillis d'ondelettes associés aux groupes de Lorentz

par

**G. BOHNKE**

Département de Mathématiques, Université de Nancy-I,  
B.P. 239, 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex, France

RÉSUMÉ. — Soit

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 > 0, x_0 > 0 \}$$

le cône du futur et soit  $G$  le produit semi-direct  $[\mathbb{R}_*^+ \times \text{SO}_0(1, n)] \times \mathbb{R}^{n+1}$ . En utilisant une représentation de carré intégrable de  $G$ , on définit une transformation par ondelettes et on construit des treillis d'ondelettes qui permettent l'analyse et la synthèse de fonctions définies sur  $C$ .

ABSTRACT. — Let

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 > 0, x_0 > 0 \}$$

be the "forward cone" and let  $G$  be the semi-direct product  $[\mathbb{R}_*^+ \times \text{SO}_0(1, n)] \times \mathbb{R}^{n+1}$ . By using a square integrable representation of  $G$ , we define a wavelet transform and we construct some tight "frames" which give a framework for analysing and synthetising functions on  $C$ .

### 1. INTRODUCTION

#### 1. Représentation de carré intégrable sur un groupe localement compact

Soit  $G$  un groupe localement compact,  $dg$  sa mesure de Haar invariante à gauche,  $U$  une représentation unitaire irréductible, de carré intégrable,

de  $G$  dans un espace hilbertien  $H$  dont le produit hermitien sera noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dans la suite. Rappelons qu'il existe alors un vecteur non nul  $\xi$  de  $H$  (dit « vecteur admissible ») tel que l'on ait :

$$\int_G |\langle U(g)(\xi), \xi \rangle|^2 dg < +\infty;$$

de plus, on a la décomposition continue suivante de l'unité :

$$(1) \quad \int_G \langle U(g)(\xi), \varphi \rangle \overline{\langle U(g)(\xi), \psi \rangle} dg = c(\xi) \overline{\langle \varphi, \psi \rangle}$$

pour tout couple  $\varphi, \psi$  de  $H$ . La constante  $c(\xi)$  est donnée par la formule :

$$(2) \quad c(\xi) = \frac{1}{\|\xi\|^2} \int_G |\langle U(g)(\xi), \xi \rangle|^2 dg$$

où  $\|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle$ . Il en résulte que l'application

$$f \in H \mapsto (c(\xi))^{-1/2} \langle U(g)(\xi), f \rangle$$

est une isométrie de  $H$  dans  $L^2(G)$ ; de plus, puisque  $U$  est irréductible, le vecteur  $\xi$  est cyclique, c'est-à-dire que son orbite  $\{U(g)(\xi)\}_{g \in G}$  est totale dans  $H$ .

Rappelons aussi que si  $G$  est unimodulaire alors si un vecteur de  $H$  est admissible, tous les vecteurs de  $H$  le sont et, dans ce cas,  $c(\xi) = c \|\xi\|^2$  où  $c$  est une constante qui ne dépend pas de  $\xi \in H$ . Tous les groupes nilpotents sont unimodulaires ainsi que tous les groupes de Lie semi-simples. Le groupe affine «  $ax + b$  » n'est pas unimodulaire.

Des transformations associées à des représentations de carré intégrable ont été étudiées par différents auteurs, notamment pour les groupes de Weyl-Heisenberg (*i. e.* groupes de Heisenberg à centre compact) et pour le groupe des transformations affines de la droite ([1], [2], [5], [6], [7]).

## 2. Treillis d'ondelettes

Si, à partir d'un vecteur admissible  $\xi$  de  $H$ , on choisit un sous-ensemble discret  $\Omega$  de l'orbite de  $\xi$  :

$$\Omega = \{ \xi_i = U(g_i)(\xi) / i \in I \}$$

où  $I$  est un ensemble d'indices dénombrable, on peut remplacer (1) par une version discrète approchée (ne serait-ce qu'en prenant des sommes de Riemann). On peut même, en imposant à  $\xi$  certaines conditions (*cf.* [3] et [4] lorsque  $G$  est le groupe de Weyl-Heisenberg ou le groupe «  $ax + b$  »), obtenir une décomposition de la forme :

$$(3) \quad \sum_{i \in I} |c_i \langle U(g_i)(\xi), \varphi \rangle|^2 = \alpha \|\varphi\|^2$$

pour une suite de réels  $(c_i)_{i \in I}$  et un nombre  $\alpha > 0$  indépendants de  $\varphi \in H$ . Dans ce cas on dira que la famille d'« ondelettes »  $\{U(g_i)(\xi)\}_{i \in I}$  constitue un *treillis d'ondelettes* pour  $H$  (« Tight frame » dans la terminologie de [4]).

### 3. Treillis d'ondelettes sur un espace symétrique

Dans les exemples traités plus loin, on choisit un compact  $K$  (compact maximal) d'un groupe de Lie  $G$  semi-simple et le vecteur  $\xi$  admissible est choisi quasi invariant par rapport à la restriction de  $U$  à  $K$ , c'est-à-dire que l'on a :

$$U(k)(\xi) = e^{i\varphi(k)} \xi, \quad (\varphi \text{ réelle}) \text{ pour } k \in K,$$

ce qui permet de transporter la formule (1) sur l'espace symétrique  $G/K$ . C'est le point de vue adopté dans [11] où  $\Pi \simeq SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$  est le demi-plan de Poincaré. Dans ce cas particulier,  $\xi = \psi_1$  (« état cohérent fondamental ») est une fonction propre de la première valeur propre  $\frac{\lambda + 1}{2}$  de l'opérateur de Laguerre :

$$L = \frac{1}{4\pi} t \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\lambda - 1}{4\pi} \frac{d}{dt} + \pi t.$$

La fonction  $\psi_1$  vérifie :

$$U_{k_\theta}(\psi_1) = \exp(i\theta L)(\psi_1) = e^{i\theta((\lambda + 1)/2)} \psi_1$$

pour  $k_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2) = K$ . D'autre part, les représentations considérées  $U_\lambda$ ,  $\lambda > 0$ , de  $G = SL(2, \mathbb{R})$  dans les espaces  $H_\lambda$  des fonctions de carré intégrable sur  $\mathbb{R}^+ = \{t \geq 0\}$  pour la mesure  $t^{-\lambda} dt$ , sont des éléments de la « série discrète holomorphe » de  $SL(2, \mathbb{R})$  (en fait, pour  $\lambda \neq \frac{2k + 1}{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , ce sont des représentations *projectives* de  $SL(2, \mathbb{R})$  restrictions des représentations  $\tilde{U}_\lambda$  de la *série discrète* du groupe  $SL(2, \mathbb{R})$  de *recouvrement universel* de  $SL(2, \mathbb{R})$ , cf. [10], chapitre II).

Prenons  $\lambda = \frac{1}{2}$ . La représentation  $U_{1/2}$  de  $SL(2, \mathbb{R})$  dans  $H_{1/2} = L^2(\mathbb{R}^+, t^{-1/2} dt)$  est un élément de la *série discrète* de  $SL(2, \mathbb{R})$  et la formule (1) se réduit à :

$$(4) \quad \int_{\pi} \langle \psi_x, u \rangle \overline{\langle v, \psi_x \rangle} d\mu(X) = 8\pi \langle u, v \rangle \quad ([10], \text{ p. 6, (1.14)})$$

où  $\psi_X(t) = U_{1/2}((na)^{-1})(\psi_1)$ ; comme on le voit en identifiant le point  $X$  de  $\Pi$  à la partie résoluble  $na$  de  $g \in G$  de la décomposition d'Iwasawa  $NAK = G$ .

Dans des travaux plus récents ([12] et [13]), A. et J. Unterberger utilisent d'une manière essentielle une formule de type (4) pour étudier des opérateurs pseudo-différentiels dont les symboles vivent sur le domaine de Cartan BDI ( $q=2$ ). Ce domaine hermitien symétrique peut être réalisé comme un tube complexe  $\Pi$  de  $\mathbb{C}^{n+1}$ :

$$\Pi = \mathbb{C} + i\mathbb{R}^{n+1}$$

où  $\mathbb{C}$  est le cône  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} / x_0 > 0, x_0^2 - x_1^2 - \dots - x_n^2 > 0\}$  du futur isomorphe à  $\mathbb{R}_*^+ \times SO_0(1, n) / SO(n)$ . Ce sera notre point de départ pour discrétiser des formules de type (4).

## 2. TREILLIS D'ONDELETES SUR LE TUBE COMPLEXE $\Pi$

### 1. Action du groupe de Poincaré-Weyl sur $\Pi$

Soit  $n$  un entier  $\geq 0$  et  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \in GL(\mathbb{R}^{n+1})$ . On pose  $r(x) = \langle x, Jx \rangle$  pour tout  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  où  $\langle x, y \rangle$  est le produit scalaire euclidien ordinaire.

On considère le groupe  $O(1, n)$  des matrices qui conservent la forme quadratique  $\langle x, Jy \rangle$  et on note  $SO_0(1, n)$  la composante connexe de l'identité. Notons  $G_0 = \{a\Lambda / a > 0, \Lambda \in SO_0(1, n)\}$ .

Le groupe  $G_0$  agit transitivement sur le cône  $\mathbb{C}$ .

Si  $M'$  désigne la matrice transposée de  $M$ , le produit semi-direct  $G = G_0 \ltimes$  (groupe de Poincaré-Weyl) agit sur  $\Pi$  par :

$$(5) \quad [M, b]X = JM'^{-1}JX - ib$$

pour tout  $(M, b) \in G$  et tout  $X = x + i\xi \in \Pi$ . On notera enfin  $\omega = (1, 0, \dots, 0) + i.0$  pris pour point base de  $\Pi$ .

### 2. Représentation unitaire irréductible de $G$

Pour des raisons d'isométries entre espaces hilbertiens de représentations (cf. [13], p. 29), nous ne considérons qu'une seule représentation unitaire irréductible de  $G$  [issue, par restriction à  $G$ , d'une représentation projective unitaire du groupe  $SO_0(2, n+1)$ ].

Soit  $H$  l'espace de Hilbert  $L^2(C, dm)$  des fonctions de carré intégrable sur le cône  $\mathbb{C}$  pour la mesure  $G_0$ -invariante  $dm(x) = (r(x))^{-(n+1)/2} dx$  et

soit  $V$  la représentation unitaire de  $G = G_0 \ltimes$  dans  $H$  définie par :

$$(6) \quad (V_{(M, b)}(u))(x) = u(M^{-1}x) e^{2in \langle Jx, b \rangle}$$

pour tout  $u \in H$  et tout  $(M, b) \in G$ .

### 3. États cohérents

Soit  $\psi \in H$  et notons, pour tout  $X = x + i\xi \in \Pi$ , par  $\psi_X$  la fonction définie à l'aide de la représentation  $V$  par :

$$(7) \quad \psi_X(t) = \psi(M^{-1}t) e^{2in \langle Jt, b \rangle}$$

où  $X = x + i\xi = [M, b]\omega$ . D'après (5) on a :

$$b = -\xi, \quad (JM'^{-1}J)\omega = x.$$

Comme il existe plusieurs matrices  $M \in G_0$  satisfaisant à cette dernière équation, on prendra  $M = M_x = a\Lambda$ ,  $a = (r(x))^{-1/2}$  et  $\Lambda \in SO_0(1, n)$  sous la forme d'un produit  $\Lambda = K_1 A_1$  d'une rotation euclidienne  $K_1 \in SO(n)$  (laissant fixe  $\omega$ ) par une matrice  $A_1$  de translation hyperbolique appartenant à la partie abélienne positive  $A^+$  de la décomposition de Cartan  $KA^+K$  de  $SO_0(1, n)$  où  $K = SO(n)$ .

Dans [13], proposition 3.4, on a la résolution de l'identité suivante :

$$(8) \quad \int_{\Pi} |\langle v, \psi_X \rangle|^2 \underline{dm}(X) = (2\pi)^{n+1} \frac{2}{(n+1)!} \|v\|_H^2$$

pour toute fonction  $v \in H$  en prenant pour  $\psi = \psi_\omega$  la fonction

$$C_{n+1}(r(t))^{(n+1)/2} e^{-2nt_0},$$

$$C_{n+1} = 4^{n+1} \pi^{(3n+4)/2} \left( \frac{\Gamma(2n+3/2)}{(2n+1)! \Gamma(n+3/2)} \right)^{1/2}.$$

Dans cette formule (8) la mesure  $dm(X) = (r(x))^{-(n+1)} dx d\xi$  est la mesure  $SO_0(2, n+1)$ -invariante du domaine  $\Pi \approx SO_0(2, n+1)/SO(2) \times SO(n+1)$ . L'action de  $SO_0(2, n+1)$  sur  $\Pi$  est engendrée (cf. [12], p. 9) par les transformations suivantes :

- 1°  $X \mapsto X + ib, b \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,
- 2°  $X \mapsto aX, a > 0$ ,
- 3°  $X \mapsto \Lambda X, \Lambda \in SO_0(1, n)$ ,
- 4°  $X \mapsto \Sigma X = \frac{JX}{r(X)}$  (symétrie riemannienne autour de  $\omega$ )

et  $SO_0(2, n+1)$  apparaît comme le groupe conforme de l'espace hermitien symétrique  $\Pi$ . Notons par  $g \cdot X$  l'action de  $g \in SO_0(2, n+1)$  sur  $X \in \Pi$ . La formule (8) provient alors du fait que  $V$  est la restriction d'une représentation  $M_{n+1}$  de  $SO_0(2, n+1)$  dans  $H$ , elle-même unitairement équivalente à la représentation  $\mathcal{M}_{n+1}$  définie par  $(\mathcal{M}_g(f))(X) = (\bar{j}(X))f(g^{-1}X)$ , où  $j(X)$

est le jacobien de la transformation  $X \mapsto g^{-1}X$ , pour toute  $f$  de carré intégrable sur  $\Pi$  pour la mesure de Lebesgue  $dX = dx d\xi$  et anti-holomorphe sur  $\Pi$  ([12], p. 15-19).

L'opérateur d'entrelacement de  $M_{n+1}$  et  $\mathcal{M}_{n+1}$  est une transformation de Laplace  $K_{n+1}$  définie par :

$$(K_{n+1}(u))(X) = k_{n+1}^{-1/2} \int_{\mathbb{C}} u(t) e^{-2\pi \langle Jt, \bar{X} \rangle} dt$$

$$\text{pour toute } u \in \mathbb{H}, k_{n+1} = \frac{n!}{4^{n+1} \pi^{n+2} \Gamma(n+2/2)}.$$

On a, en outre, pour toute  $f$  continue sur  $\Pi$  et à support compact :

$$\int_{\Pi} f(X) \underline{dm}(X) = \int_{\text{SO}_0(2, n+1)} f(g \cdot \omega) dg$$

où  $dg$  est la mesure de Haar à gauche de  $\text{SO}_0(2, n+1)$  convenablement normalisée.

Pour une  $\psi$  quelconque de  $\mathbb{H}$  nous aurons l'égalité

$$\int_{\Pi} |(v, \psi_X)|^2 \underline{dm}(X) = \alpha \|v\|^2$$

pour toute  $v \in \mathbb{H}$  et  $\alpha > 0$  si et seulement si

$$I(t) = \int_{\mathbb{C}} |\psi|^2 (M_{(r(t))^{-1/2} x \cdot t}) \frac{dx}{(r(x))^{n+1}}$$

est égale à  $\alpha$  pour tout  $t \in \mathbb{C}$ .

En effet, par la formule de Plancherel, nous avons :

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} |(v, \psi_X)|^2 \underline{dm}(X) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left| \int_{\mathbb{C}} v(t) \cdot \psi(M_x^{-1} \cdot t) e^{-2i\pi \langle Jt, \xi \rangle} \frac{dt}{(r(t))^{(n+1)/2}} \right|^2 \\ & \quad \times \frac{dx d\xi}{(r(x))^{n+1}} \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{dx}{(r(x))^{n+1}} \left( \int_{\mathbb{C}} |v^2(t)| \cdot |\psi|^2(M_x^{-1} \cdot t) \frac{dt}{(r(t))^{n+1}} \right) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{|v^2(t)| dt}{(r(t))^{n+1}} \left( \int_{\mathbb{C}} |\psi|^2(M_x^{-1} \cdot t) \frac{dx}{(r(x))^{n+1}} \right) \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{|v(t)|^2}{(r(t))^{(n+1)/2}} I(t) dt, \end{aligned}$$

après avoir interverti l'ordre des intégrations et effectué le changement de variable

$$x' = (r(t))^{1/2} x$$

et tenu compte de la formule

(9) 
$$r(M_x^{-1} \cdot t) = r(x)r(t) \quad ([13], \text{ p. } 23).$$

*Remarques* ( $n \geq 1$ ). — Soit  $\mathbb{H}_n$  l'espace symétrique  $SO_0(1, n)/SO(n)$  réalisé comme nappe d'hyperboloïde :

$$\mathbb{H}_n = \{ r(x) = 1, x_0 > 0 \}.$$

(a) Supposons que  $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$  où  $\psi_1$  (resp.  $\psi_2$ ) ne dépend que de  $r(x)$  (resp. que de la première coordonnée  $x_0$  de  $x$ ). Posons  $M_1 = M_{(r(t))^{1/2} \cdot x}$ . On a :

$$\begin{aligned} \langle \omega, M_1^{-1} \cdot t \rangle &= \langle (M_1^{-1})' \cdot \omega, t \rangle \\ &= \langle J(M_1^{-1})' \cdot \omega, Jt \rangle \\ &= \langle (r(t))^{1/2} \cdot x, Jt \rangle \\ &= \langle Jt_1, x \rangle \end{aligned}$$

où  $t_1 = (r(t))^{-1/2} t \in \mathbb{H}_n$ . Soit  $\Lambda \in SO_0(1, n)$  tel que  $t_1 = \Lambda \omega$  et effectuons le changement de variable  $x = \Lambda y$  dans l'intégrale  $I(t)$ . On obtient, grâce à l'invariance de  $r(x)$  :

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_C |\psi_1|^2(r(x)) |\psi_2|^2(M_1^{-1} \cdot t) \frac{dx}{(r(x))^{n+1}} \\ &= \int_C |\psi_1|^2(r(y)) |\psi_2|^2(y_0) \frac{dy}{(r(y))^{n+1}} \\ &= \int_0^\infty |\psi_2|^2(x_0) dx_0 \int_{\|x^*\| < x_0} |\psi_1|^2(x_0 - \|x^*\|) \frac{dx^*}{(x_0^2 - \|x^*\|^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

où l'on a noté  $x^* = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $n \geq 1$ ).

Si  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont continues à support compact,  $\text{supp } \psi_1 = [r_1, r_2]$ ,  $\text{supp } \psi_2 = [a, b]$ , alors, sous la condition  $b > r_1 > 0$ , on voit que l'intégrale précédente est finie et strictement  $> 0$ , puisque à un facteur constant multiplicatif près, elle vaut

$$\int_{r_1^{1/2}}^b |\psi_2|^2(x_0) dx_0 \int_{r_1}^{x_0^2} \frac{|\psi_1|^2(u)}{u^{n+1}} (x_0^2 - u)^{(n-2)/2} du.$$

(b) Soit maintenant  $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$  où  $\psi_1$  (resp.  $\psi_2$ ) ne dépend que de  $r$  (resp. que de  $\sigma \in \mathbb{H}_n$ ). Le changement de variable  $u = M_1^{-1} \cdot t$  s'écrit :

$$x = (r, \sigma) \mapsto u = (r, \varphi_t(\sigma))$$

et  $\sigma \mapsto \varphi_t(\sigma)$  est un difféomorphisme de  $\mathbb{H}_n$  pour tout  $t \in \mathbb{C}$ . Si  $\psi_1$  est continue à support compact,  $\text{supp } \psi_1 = [r_1, r_2]$ ,  $r_1 > 0$ , la condition



$0 < I(t) = \alpha < \infty$  pour tout  $t \in C$  se réduit à

$$0 < \int_{\mathbb{H}_n} |\psi_2|^2(\varphi_t(\sigma)) d\sigma = \beta < \infty$$

pour tout  $t \in C$ .

#### 4. Exemples d'ondelettes associées à $SO_0(1, n)$

(a) Examinons d'abord le cas  $n = 1$ .

Nous avons  $G_0 = \mathbb{R}_*^+ \times SO_0(1, 1)$  et  $G = G_0 \times \mathbb{R}^2$ . L'espace  $H$  de la représentation  $V$  est  $L^2\left(C, \frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2}\right)$  où  $C$  est le cône défini par  $t_0^2 - t_1^2 > 0$  et  $t_0 > 0$ .

Rappelons que la représentation  $V$  est définie par :

$$V_{(M, b)}(u)(t) = u(M^{-1} \cdot t) e^{2i\pi \langle Jt, b \rangle}$$

où  $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Nous sommes donc conduits à choisir une sous-famille discrète  $\{\psi_k\}$  d'une famille  $\{\psi_X\}_{X \in C + i\mathbb{R}^2}$  de fonctions  $\psi_X$  obtenues à partir d'une fonction génératrice  $\psi_\omega$  par l'action du groupe  $G$  :

$$\psi_X = V_{(M, b)}(\psi_\omega), \quad [M, b]\omega = X.$$

Soient  $M = a\Lambda$ ,  $a \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\Lambda \in SO_0(1, 1)$ ,  $b = (\alpha, \beta)$ ,  $X = x + i\xi$ ,  $x = (x_0, x_1)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ . Nous avons :

$$[a\Lambda, b](\omega) = \frac{1}{a}\Lambda \cdot \omega - ib = X = x + i\xi,$$

ou, en coordonnées, avec  $\Lambda = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau & \text{sh } \tau \\ \text{sh } \tau & \text{ch } \tau \end{pmatrix}$ ,  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \text{ch } \tau - i\alpha &= x_0 + i\xi_1 \\ \frac{1}{a} \text{sh } \tau - i\beta &= x_1 + i\xi_2 \end{aligned}$$

ce qui donne immédiatement :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} \text{ch } \tau &= x_0, & \alpha &= -\xi_1 \\ \frac{1}{a} \text{sh } \tau &= x_1, & \beta &= -\xi_2 \end{aligned}$$

et puisque  $M^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} \text{ch } \tau & -\text{sh } \tau \\ -\text{sh } \tau & \text{ch } \tau \end{pmatrix}$ , on en déduit que

$$\psi_X(t_0, t_1) = \psi_\omega(x_0 t_0 - x_1 t_1, -x_1 t_0 + x_0 t_1).$$

Ici, il est facile de trouver une condition nécessaire et suffisante pour la validité de la formule ( $\alpha \neq 0$ ) :

$$(10) \quad \int_{\Pi} |\langle v, \psi_X \rangle|^2 \underline{dm}(X) = \alpha \|v\|^2, \quad v \in H.$$

La constante  $\alpha$  peut se calculer en prenant une fonction  $v$  particulière (par exemple  $\psi_\omega$ ) et en calculant les deux membres de cette égalité (dans [12], où les  $\psi_X$  jouent le rôle de gaussiennes, on a  $\alpha = 4\pi^2$  pour  $n = 1$ ).

Posons, pour simplifier,  $u = \psi_\omega$ . Le premier membre de (10) s'explícite comme suit :

$$I(v, u) = \int_C \frac{dx_0 dx_1}{(x_0^2 - x_1^2)^2} \times \int_{\mathbb{R}^2} d\xi \left| \int_C v(t) \bar{u}(x_0 t_0 - x_1 t_1, -x_1 t_0 + x_0 t_1) \times e^{-2in \langle \eta, \xi \rangle} \frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2} \right|^2$$

qui est égal, par la formule de Plancherel, à

$$\int_C \frac{dx_0 dx_1}{(x_0^2 - x_1^2)^2} \left[ \int_C |v|^2(t) |u|^2(x_0 t_0 - x_1 t_1, -x_1 t_0 + x_0 t_1) \frac{dt_0 dt_1}{(t_0^2 - t_1^2)^2} \right].$$

En intégrant d'abord par rapport à  $dx$  puis en effectuant le changement de variables

$$\begin{cases} y_0 = x_0 t_0 - x_1 t_1 \\ y_1 = -x_1 t_0 + x_0 t_1 \end{cases}$$

on obtient :

$$\int_C \frac{|v|^2(t) dt}{(t_0^2 - t_1^2)^2} \left[ \int_C |u|^2(t_0 x_0 - t_1 x_1, t_1 x_0 - t_0 x_1) \frac{dx}{(x_0^2 - x_1^2)^2} \right] = \int_C \frac{|v|^2(t)}{(t_0^2 - t_1^2)^2} \left[ (t_0^2 - t_1^2) \int_C |u|^2(y) \frac{dy_0 dy_1}{(y_0^2 - y_1^2)^2} \right] = I(u) \|v\|^2$$

où

$$I(u) = \int_C \frac{|u|^2(x) dx}{(r(x))^2}.$$

Il en résulte que (10) est vraie si et seulement si  $I(u)$  est finie et non nulle. On dira, dans ce cas, que  $u$  est admissible. C'est en particulier vrai

si  $u$  est à support compact dans le cône  $C$ . D'où le :

*Choix d'une famille d'ondelettes à support compact*

Soit  $u$  une fonction réelle, continue, à support compact dans  $C$ . On a donc :

$$\text{supp } u \subset \left[ \alpha_0, \alpha_0 + \frac{1}{b_1^0} \right] \times \left[ \beta_0, \beta_0 + \frac{1}{b_2^0} \right]$$

avec des nombres réels  $\alpha_0, \beta_0, b_1^0$  et  $b_2^0 > 0$ .

Soit  $a_0 > 1$  fixé et soit  $(\tau_l)_{l \in \mathbb{Z}}$  une suite de nombres réels tels que l'on ait :

$$(H) \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \frac{u^2(a_0^m \Lambda_{-l}(t))}{a_0^{2m} (t_0^2 - t_1^2)} = 1, \quad t \in C,$$

$$\Lambda_l = \begin{pmatrix} \text{ch } \tau_l & \text{sh } \tau_l \\ \text{sh } \tau_l & \text{ch } \tau_l \end{pmatrix}.$$

*Remarque.* — La condition (H) impose de considérer un réseau du cône  $C$  (comme dans [4] pour le groupe «  $ax + b$  ») engendré par des dilatations dyadiques et des rotations lorentziennes. L'action (discrétisée) du groupe complet de Weyl-Heisenberg  $G$  apparaît alors dans la famille d'ondelettes (où désormais  $\tau_l = l \in \mathbb{Z}$ ) suivante :

$$u_{(l, m; j, k)}(t_0, t_1) = u(a_0^m \Lambda_{-l}(t)) e^{2i\pi \langle Jt, a_0^m \Lambda_l(kb_1^0, jb_2^0) \rangle}$$

pour tout  $(l, m; j, k) \in \mathbb{Z}^4$ . Notons  $C_{l, m; j, k}$  les coefficients d'ondelettes :

$$C_{l, m; j, k}(v) = \int_C v(t) u_{l, m; j, k}(t) \frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2}.$$

On a le théorème :

**THÉORÈME.** — *Pour toute fonction  $u$  continue réelle à support compact dans le cône  $C$ , vérifiant la condition (H), la famille  $u_{l, m; j, k}$  est un treillis d'ondelettes et l'on a*

$$(1) \quad \sum_{\mathbb{Z}^4} |C_{l, m; j, k}|^2 = \frac{1}{b_1^0 b_2^0} \|v\|^2$$

pour toute fonction  $v \in H$ .

En remplaçant  $u$  par  $|u|$  dans (H), on obtient un énoncé analogue pour  $u$  à valeurs complexes.

*Démonstration.* — En effectuant le changement de variable  $t \mapsto \Lambda_l(t)$ , compte tenu de l'invariance de la forme bilinéaire  $[t, x] = \langle Jt, x \rangle$  ainsi

que de l'invariance de la mesure  $\frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2}$  sur C, on obtient les égalités :

$$\begin{aligned} \sum |C_{l, m; j, k}|^2 &= \sum \left| \int_C v(t) u(\Lambda_l(a_0^m t_0, a_0^m t_1)) \right. \\ &\quad \left. \times e^{2in \langle Jt, \Lambda_l(ka_0^m b_1^0, ja_0^m b_2^0) \rangle} \frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2} \right|^2 \\ &= \sum_{m, l} \sum_{j, k} \left| \int_C v(\Lambda_{-l}(t)) u(a_0^m t_0, a_0^m t_1) \right. \\ &\quad \left. \times e^{2in \langle Jt, (ka_0^m b_1^0, ja_0^m b_2^0) \rangle} \frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2} \right|^2. \end{aligned}$$

Pour  $m$  et  $l$  fixés, considérons la fonction périodisée  $\underline{u}(a_0^m t_0, a_0^m t_1)$  pour les périodes  $T_1 = \frac{1}{a_0^m b_1^0}$  (pour la variable  $t_0$ ) et  $T_2 = \frac{1}{a_0^m b_2^0}$  (pour la variable  $t_1$ ). Par la formule de Plancherel appliquée à la fonction  $t \mapsto \underline{u}(a_0^m t)$  on obtient que la somme précédente est égale à :

$$\frac{1}{b_1^0 b_2^0} \sum_{m, l} \int_C |v|^2(\Lambda_l(t)) \frac{u^2(a_0^m t_0, a_0^m t_1)}{a_0^{2m} (t_0^2 - t_1^2)^2} dt_0 dt_1$$

ou encore (par le changement de variable  $t \mapsto \Lambda_l(t)$ ) à :

$$\frac{1}{b_1^0 b_2^0} \int_C |v|^2(t) \left[ \sum_{m, l} \frac{u^2(\Lambda_{-l}(a_0^m t_0, a_0^m t_1))}{a_0^{2m} (t_0^2 - t_1^2)} \right] \frac{dt_0 dt_1}{t_0^2 - t_1^2}$$

qui vaut précisément  $\frac{1}{b_1^0 b_2^0} \|v\|^2$  grâce à la condition (H).

*Exemples de fonction u vérifiant la condition (H)*

Écrivons  $(t_0, t_1)$  dans les coordonnées hyperboliques de C :

$$(\mu, \tau) \xrightarrow{\mathcal{H}} (t_0 = \mu \operatorname{ch} \tau, t_1 = \mu \operatorname{sh} \tau), \quad \mu \in \mathbb{R}_*^+, \quad \tau \in \mathbb{R}.$$

Notons  $\tilde{u}$  la fonction  $u \circ \mathcal{H}$  et supposons que  $\tilde{u} = u_1 \otimes u_2$  où  $u_1$  ne dépend que de  $\tau$  et  $u_2$  ne dépend que de  $\mu$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} u^2(\Lambda_{-l}(a_0^m t_0, a_0^m t_1)) &= \tilde{u}^2(a_0^m \mu, \tau - l) \\ &= u_1^2(a_0^m \mu) u_2^2(\tau - l). \end{aligned}$$

Il suffit alors, pour que (H) soit vraie, de choisir les fonctions d'une seule variable  $v_1(\mu) = \frac{u_1^2(\mu)}{\mu^2}$  et  $v_2(\tau) = u_2^2(\tau)$  respectivement dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_*^+)$  et

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$  de telle sorte que :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} v_1(a_0^m \mu) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \sum_{l \in \mathbb{Z}} v_2(\tau - l) \equiv 1$$

ce qui est possible.

(b) *Cas général* ( $n \geq 1$ )

Soit  $u$  une fonction réelle, continue à support compact dans  $\mathbb{C}$  telle que

$$\text{supp } u \subset \prod_{i=0}^n \left[ \alpha_i, \alpha_i + \frac{1}{b_i} \right]$$

avec  $\alpha_i, b_i, i=0, 1, \dots, n$  des nombres tous  $> 0$ .

Soit  $a_0 > 1$  fixé et soit  $\{\Lambda_l\}_{l \in \mathbb{L}}$  une famille dénombrable de matrices de  $\text{SO}_0(1, n)$  tels que l'on ait la condition :

$$(H)' \quad \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{L}} \frac{u^2(a_0^m \Lambda_l^{-1}(t))}{a_0^{n+1} (t_0^2 - t_1^2 \dots t_n^2)^{(n+1)/2}} = 1$$

pour tout  $t \in \mathbb{C}$ .

Notons  $\Xi = \prod_{i=0}^n \mathbb{Z} b_i$  le réseau de  $\mathbb{R}^{n+1}$  associé au vecteur  $b = (b_0, b_1, \dots, b_n)$  et définissons la famille d'ondelettes  $u_{l, m; \theta}$  par :

$$u_{l, m; \theta}(t) = u(a_0^m \Lambda_l^{-1}(t)) e^{2i\pi \langle Jt, a_0^m \Lambda_l(\theta) \rangle}$$

pour  $(l, m, \theta) \in \mathbb{L} \times \mathbb{Z} \times \Xi$ . Enfin, posons, pour un coefficient d'ondelette :

$$C_{l, m; \theta}(v) = \int_{\mathbb{C}} v(t) u_{l, m; \theta}(t) \frac{dt}{(r(t))^{(n+1)/2}}$$

La démonstration du théorème de la partie (a) s'applique ici avec des changements mineurs concernant les ordres d'homogénéité et, sous la condition (H)', on obtient que la famille  $\{u_{l, m; \theta}\}$  est un treillis d'ondelettes et que l'on a

$$\sum_{l, m; \theta} |C_{l, m; \theta}|^2 = \frac{1}{\prod_{i=0}^n b_i} \|v\|^2$$

pour toute fonction  $v \in H$ .

*Exemples de fonction  $u$  vérifiant (H)' ( $n \geq 1$ )*

Si la démonstration du théorème énoncé en (a) s'étend presque immédiatement aux coefficients  $C_{l, m; \theta}$  de la famille d'ondelettes  $u_{l, m; \theta}, l \in \mathbb{L}, m \in \mathbb{Z}$ ,

$\theta \in \Xi$ , il est beaucoup moins élémentaire d'exhiber une fonction  $u$  vérifiant (H)'.

Remarquons que l'on peut toujours considérer les coordonnées  $(\mu, \sigma) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{H}_n$  et, en notant  $\tilde{u}$  l'image réciproque de  $u$  dans le changement de variables  $(\mu, \sigma) \mapsto t \in C$ , supposer  $\tilde{u} = u_1 \otimes u_2$  où  $u_1$  ne dépend que de  $\mu$  et  $u_2$  ne dépend que de  $\sigma$ . Il suffit alors de choisir les fonctions

$$v_1(\mu) = \frac{u_1^2(\mu)}{\mu^{n+1}} \quad \text{et} \quad v_2(\sigma) = u_2^2(\sigma)$$

respectivement dans  $\mathcal{D}(\mathbb{R}_*^+)$  et  $\mathcal{D}(\mathbb{H}_n)$  de telle sorte que :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} v_1(a_0^m \mu) \equiv 1 \quad \text{et} \quad \sum_{l \in L} v_2(\Lambda_l^{-l}(\sigma)) \equiv 1.$$

Pour la première somme, c'est possible d'une manière classique. Pour la seconde somme, on va montrer que c'est toujours possible en prenant un réseau  $\{\Lambda_l \cdot \omega\}_{l \in L}$  construit à partir d'un sous-groupe discret  $\Gamma$  de  $SO_0(1, n)$ .

Sur  $\mathbb{H}_n$  considérons la distance hyperbolique  $\rho = d(x, y)$  où  $\text{ch } \rho = x_0 y_0 - x_1 y_1 - \dots - x_n y_n$  pour  $x = (x_0, \dots, x_n)$  et  $y = (y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{H}_n$ .

En vue de construire une partition de l'unité à partir d'une seule fonction  $v_2$  à support compact dans  $\mathbb{H}_n$ , nous choisissons le sous-groupe discret  $\Gamma$  de telle sorte que  $\Gamma \setminus SO_0(1, n)$  soit compact; ce qui est possible d'après des résultats généraux sur les sous-groupes discrets des groupes de Lie semi-simples connexes (cf. [9]).

Le quotient  $\Gamma \setminus \mathbb{H}_n \approx \Gamma \setminus SO_0(1, n)/SO(n)$  est aussi compact. Il existe donc un compact  $T \subset \mathbb{H}_n$  tel que son saturé  $\tilde{T} = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma T$  recouvre  $\mathbb{H}_n$ .

Autrement dit, en prenant  $\rho_0$  assez grand, on a

$$\mathbb{H}_n \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma B'$$

où  $B' = B'(\omega, \rho_0)$  est la boule fermée de centre  $\omega$  et de rayon  $\rho_0$ . Soit maintenant  $w$  une fonction (continue) à support dans  $B'(\omega, 2\rho_0)$  et qui vaut 1 sur  $B'(\omega, \rho_0)$ . La famille

$$\{\gamma \cdot B'(\omega, 2\rho_0)\}_{\gamma \in \Gamma}$$

forme un recouvrement localement fini (uniforme ici) de  $\mathbb{H}_n$  et la fonction  $v_2$  définie sur  $\mathbb{H}_n$  par :

$$v_2(\sigma) = \frac{w(\sigma)}{\sum_{\gamma \in \Gamma} w(\gamma^{-1} \cdot \sigma)}$$

convient.

*Remarques.* — 1° Pour obtenir la condition (H)', on peut aussi prendre une fonction  $u$  de l'espace  $H$  sous la forme  $u_1 \otimes u_2$  où  $u_1$  ne dépend que

de  $r$  et  $u_2$  ne dépend que de la première coordonnée  $t_0$ . Puisque  $\langle \omega, \Lambda_l^{-1} t \rangle = \langle \Lambda_l \omega, t \rangle$  pour tout  $l \in L$ , cela revient à chercher une partition de l'unité

$$\sum_{l \in L} u_2(\langle \theta_l, t \rangle) \equiv 1$$

sous la forme d'« ondes planes »  $u_2(\langle \theta_l, t \rangle)$  où  $\theta_l \in \mathbb{H}_n$  pour tout  $l \in L$ .

2° La représentation  $V$  provient, par restriction à  $G \times \mathbb{R}^{n+1}$ , d'une représentation unitaire  $\tilde{V}$  du groupe  $SO_0(2, n+1)$ . On en déduit que tout treillis d'ondelettes  $\{\psi_{x_i}\}_{i \in I}$  sur le tube complexe  $\Pi = C + i\mathbb{R}^{n+1}$  (et, en particulier, sur le demi-plan de Poincaré pour  $n=0$ ) se transforme pour tout  $g \in SO_0(2, n+1)$  en un autre treillis d'ondelettes  $\{\psi_{g \cdot x_i}\}_{i \in I}$ , puisque  $\|\tilde{V}(g)(v)\| = \|v\|$  pour tout  $v \in H$  et que  $\tilde{V}(g)(\psi_i) = \psi_{g \cdot x_i}$  pour tout  $i \in I$ .

3° La connaissance de tous les coefficients d'ondelettes est redondante pour écrire une formule du type (3). Il serait par conséquent judicieux de trouver une base hilbertienne d'ondelettes pour l'espace  $H$ , comme dans [8], mais associée à l'action du groupe  $G$ .

## RÉFÉRENCES

- [1] S. T. ALI, J. P. ANTOINE et J. P. GAZEAU, *Square Integrability of Group Representations on Homogeneous Spaces. I. Reproducing Triples and Frames. II. Generalized Square Integrability and Equivalent Families of Coherent States*, U.C.L.-I.P.T. 89 18, preprints, décembre 1989.
- [2] J. BERTRAND et P. BERTRAND, *A Relativistic Wigner Function Affiliated with the Weyl-Poincaré Group*, preprint.
- [3] I. DAUBECHIES, Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, vol. **XLI**, 1988, p. 909-996.
- [4] I. DAUBECHIES, *The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis*, preprint.
- [5] H. FEICHTINGER et K. GRÖCHENIG, *A Unified Approach to Atomic Decompositions Through Integrable Group Representations*, preprint.
- [6] A. GROSSMANN, J. MORLET et T. PAUL, Transforms Associated to Square Integrable Group Representations. I. General results, *J. Math. Phys.*, vol. **26**, (10), 1985, p. 2473-2479.
- [7] A. GROSSMANN, J. MORLET et T. PAUL, Transforms Associated to Square Integrable Group Representations. II. Examples, *Ann. Inst. Henri-Poincaré*, vol. **45**, n° 3, 1986, p. 293-309.
- [8] P. G. LEMARIE et Y. MEYER, Ondelettes et bases hilbertiennes, *Revista Matemática Iberoamericana*, vol. **2**, n° 12, 1986, p. 1-18.
- [9] M. S. RAGHUNATHAN, Discrete Subgroups of Lie Groups, *Ergebnisse der Mathematik*, vol. **68**, Springer, 1972.
- [10] P. J. SALLY Jr, Analytic Continuation of the Irreducible Unitary Representations of the Universal Covering Group of  $SL(2, \mathbb{R})$ , *Memoirs of the A.M.S.*, n° **69**, 1967.
- [11] A. UNTERBERGER et J. UNTERBERGER, La série discrète de  $SL(2, \mathbb{R})$  et les opérateurs pseudo-différentiels sur une demi-droite, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. **17**, 1984, p. 83-116.

- [12] A. UNTERBERGER et J. UNTERBERGER, A Quantization of the Cartan Domain BDI ( $q=2$ ) and Operators on the Light Cone, *J. Funct. Anal.*, vol. **72**, n° 2, 1987, p. 279-319.
- [13] A. UNTERBERGER, Analyse harmonique et analyse pseudo-différentielle du cône de lumière, *Astérisque*, n° **156**, S.M.F., 1987.

(Manuscrit reçu le 30 avril 1990;  
version révisée le 24 juillet 1990.)