

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION A

D. BERNARD

## À propos du calcul différentiel sur les groupes quantiques

*Annales de l'I. H. P., section A*, tome 56, n° 4 (1992), p. 443-448

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPA\\_1992\\_\\_56\\_4\\_443\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPA_1992__56_4_443_0)

© Gauthier-Villars, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section A » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## A propos du calcul différentiel sur les groupes quantiques

par

**D. BERNARD**

Service de Physique Théorique de Saclay,  
91191 Gif-sur-Yvette, France

---

RÉSUMÉ. — Pour toute solution  $\mathcal{R}$  de l'équation de Yang-Baxter qui admet une décomposition quasi-triangulaire, nous définissons une algèbre de Lie quantique quasi-triangulaire. Nous indiquons comment à chacune de ces algèbres de Lie quantiques  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  est associée une algèbre de Hopf  $F(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  et un calcul différentiel sur  $F(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  dont l'algèbre des dérivées de Lie est l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ . Ceci permet d'établir un lien entre le calcul différentiel sur les groupes quantiques et les algèbres d'échange de l'ansatz de Bethe algébrique.

ABSTRACT. — Given a solution  $\mathcal{R}$  of the Yang-Baxter equation admitting a quasi-triangular decomposition we define a quasi-triangular quantum Lie algebra. We describe how to any quasi-triangular quantum Lie algebra  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  is associated a Hopf algebra  $F(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  with a differential calculus on it such that the algebra of the quantum Lie derivatives is the algebra  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ . This allows us to make the connection between the differential calculus on quantum groups and the exchange algebras of the algebraic Bethe ansatz.

## 1. INTRODUCTION

Les groupes quantiques ([1], [2], [3]) sont des déformations des algèbres de fonctions sur des groupes de Lie. Dans l'étude des modèles exacts de théories des champs en deux dimensions les groupes quantiques sont reliés aux algèbres d'échange de l'ansatz de Bethe algébrique [4]. Il est naturel de développer la géométrie différentielle sur les groupes quantiques; un schéma général pour l'étude de ce problème fut établi par Woronowicz [5]. Dans cette note nous établissons le lien entre les algèbres d'échange de l'ansatz de Bethe et le calcul différentiel sur les groupes quantiques suivant une approche similaire à celle de Woronowicz. Notre démarche est inverse de celle de Woronowicz puisque nous construisons le calcul différentiel à partir de l'algèbre des dérivées de Lie quantiques. Le lien avec les algèbres d'échange est alors transparent.

## 2. ALGÈBRES DE LIE QUANTIQUES QUASI-TRIANGULAIRES

Soit  $\mathcal{R} \in \text{End}(C^{D+1} \otimes C^{D+1})$  une solution de l'équation de Yang-Baxter :

$$(\mathcal{R} \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes 1) = (1 \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{R}) \quad (1)$$

Notons  $\mathcal{R}_{CD}^{AB}$ ,  $A = (0, a)$  avec  $a = 1, \dots, D$ , les éléments de matrice de  $\mathcal{R}$ . Nous supposons que  $\mathcal{R}$  admet la décomposition quasi-triangulaire suivante :

$$\mathcal{R}_{Cd}^{aB} = \begin{pmatrix} \delta_d^a & f_{cd}^a \\ 0 & R_{cd}^{ab} \end{pmatrix}; \quad \mathcal{R}_{C0}^{0B} = \delta_C^B \quad (2)$$

Les autres coefficients de  $\mathcal{R}$  sont supposés nuls. On définit alors l'algèbre suivante, appelée algèbre de Lie quantique quasi-triangulaire et notée  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  :

DÉFINITION. — L'algèbre de Lie quantique quasi-triangulaire  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  est l'algèbre associative avec unité engendrée par les éléments  $T_a$  et  $\theta_b^a$ ,  $a, b = 1, \dots, D$ , satisfaisant les relations d'échange suivantes :

$$\hat{\mathcal{R}}(\mathcal{T} \otimes 1)(1 \otimes \mathcal{T}) = (1 \otimes \mathcal{T})(\mathcal{T} \otimes 1)\hat{\mathcal{R}} \quad (3)$$

où  $\hat{\mathcal{R}} = P\mathcal{R}$  avec  $P$  l'opérateur d'échange :  $P(x \otimes y) = y \otimes x$ .  $\mathcal{T}$  est la matrice  $(D+1) \times (D+1)$  dont les éléments de matrice à valeur dans  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  sont :

$$\mathcal{T}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & T_b \\ 0 & \theta_b^a \end{pmatrix} \quad (4)$$

Les relations (3) sont équivalentes aux relations suivantes :

$$T_a T_b - \sum_{cd} T_c T_d R_{ab}^{cd} = \sum_d T_d f_{ab}^d \tag{5 a}$$

$$\sum_{mn} R_{nm}^{ab} \theta_c^a \theta_d^m = \sum_{mn} \theta_n^a \theta_m^b R_{cd}^{nm} \tag{5 b}$$

$$\theta_b^a T_c = \sum_{mn} T_n \theta_m^a R_{bc}^{nm} \tag{5 c}$$

$$T_c \theta_b^a + \sum_{mn} f_{nm}^a \theta_c^n \theta_b^m = \sum_n \theta_n^a f_{cb}^n + \sum_{mn} \theta_n^a T_m R_{cb}^{nm} \tag{5 d}$$

L'équation (5 a) définit des relations de commutations graduées dont la graduation est spécifiée par R. L'équation (5 b) est une équation de Yang-Baxter pour  $\theta_b^a$ . L'équation (5 c) reflète la propriété de quasi-triangularité à gauche de l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ . La relation (5 d) assure l'existence d'un co-produit.

PROPOSITION 1. — L'algèbre  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  est une algèbre de Hopf avec multiplication  $\Delta$ ,  $\Delta(\mathcal{T}_{\mathbf{A}_B}^{\mathbf{A}}) = \sum_D \mathcal{T}_{\mathbf{D}}^{\mathbf{A}} \otimes \mathcal{T}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{D}}$ , et co-unité  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon(\mathcal{T}_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}) = \delta_{\mathbf{B}}^{\mathbf{A}}$ . En particulier :  $\Delta(T_a) = \sum_d T_d \otimes \theta_a^d + 1 \otimes T_a$  et  $\Delta(\theta_b^a) = \sum_d \theta_d^a \otimes \theta_b^d$ .

Les représentations de  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  sont définies au sens usuel. Le fait que la matrice  $\mathcal{R}$  satisfait l'équation de Yang-Baxter implique que l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  admet une représentation adjointe, notée

$$\text{Adj} : \text{Adj}(\mathcal{T}) = \hat{\mathcal{R}}.$$

Dans la représentation adjointe, les équations (5) fournissent les identités de Jacobi généralisées.

Remarques. — (i) Dans le cas où  $R^2 = 1$ , la définition précédente se réduit à la définition des algèbres de Lie généralisées introduite par Gurevitch [6]. (ii) Les relations (5) étant satisfaites pour des (super)-algèbres de Lie, l'équation (2) associée une solution quasi-triangulaire de l'équation de Yang-Baxter à toute (super)-algèbre.

Par la suite nous supposons que l'algèbre  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  admet un ensemble complet de représentations (inéquivalentes) dont les produits tensoriels sont totalement réductibles sur cet ensemble. Nous notons ces représentations par  $\rho^\alpha$  avec  $\rho^\alpha(t) \in \text{End } V^\alpha, \forall t \in \mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ .

### 3. CALCUL DIFFÉRENTIEL QUASI-TRIANGULAIRE

A chaque algèbre  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$  nous associons une algèbre de Hopf  $F(G_{\mathcal{R}})$  et un calcul différentiel sur  $F(G_{\mathcal{R}})$  dont les dérivées de Lie forment une représentation de  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}})$ . Nous décrivons cette construction en cinq étapes numérotées de (i) à (v).

(i) On définit l'algèbre  $F(G_{\mathcal{A}})$  comme l'algèbre duale de  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ .  $F(G_{\mathcal{A}})$  est une algèbre de Hopf ayant une structure de Hopf duale de celle de  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$  :  $(u_1 u_2, t) = (u_1 \otimes u_2, \Delta(t))$ ,  $(\Delta(u), t_1 \otimes t_2) = (u, t_1 t_2)$  et  $\varepsilon(u) = (u, 1)$  pour tout  $u, u_1, u_2 \in F(G_{\mathcal{A}})$  et  $t, t_1, t_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ . Les éléments  $u^\alpha = (u^\alpha_{ij})$ ,  $i, j = 1, \dots, \dim V^\alpha$ , caractérisés par les relations de dualité,  $(u^\alpha, t) = \rho^\alpha(t)$ ,  $\forall t \in \mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ , constituent une base de  $F(G_{\mathcal{A}})$  formée de co-représentations. Ainsi le théorème de Peter-Weyl est satisfait sur  $F(G_{\mathcal{A}})$ . L'algèbre  $F(G_{\mathcal{A}})$  peut être décrite plus finement :

PROPOSITION 2. — Soit  $(u^\alpha_{ij})$  et  $(R^a_b)$  les éléments de matrice des co-représentations de  $F(G_{\mathcal{A}})$  associées aux représentations  $\rho^\alpha$  et adjointe de  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$ . Alors les relations (5) sont équivalentes aux relations d'échange suivantes :

$$\sum_b R^a_b u^\alpha \cdot \rho^\alpha(\theta^b_c) = \sum_b \rho^\alpha(\theta^a_b) \cdot u^\alpha R^b_c \tag{6 a}$$

$$\sum_b \rho^\alpha(T_b) \cdot u^\alpha R^b_a = u^\alpha \cdot \rho^\alpha(T_a) \tag{6 b}$$

En particulier, pour  $\rho^\alpha$  la représentation adjointe, cette proposition montre que la sous-algèbre de  $F(G_{\mathcal{A}})$  engendrée par les  $(R^a_b)$  est définie par des relations d'échange.

(ii) Sur  $F(G_{\mathcal{A}})$  on définit des applications linéaires, notées  $\nabla_a$  et  $\Theta^a_b$ ,  $a, b = 1, \dots, D$ , en précisant leur action sur la base  $(u^\alpha)_\alpha$  :  $\nabla_a(u^\alpha_{ij}) = \sum_k u^\alpha_{ik} \rho^\alpha(T_{a kj})$  et  $\Theta^a_b(u^\alpha_{ij}) = \sum_k u^\alpha_{ik} \rho^\alpha(\theta^a_b)_{kj}$ . Par construction les applications  $\nabla_a$  et  $\Theta^a_b$  sont invariantes à gauche :  $\Delta \nabla_a = (1 \otimes \nabla_a) \Delta$  et  $\Delta \Theta^a_b = (1 \otimes \Theta^a_b) \Delta$ .

PROPOSITION 3. — La définition du co-produit sur  $\mathcal{U}(\mathcal{G}_{\mathcal{A}})$  implique,  $\forall x, y \in F(G_{\mathcal{A}})$  :

$$\nabla_a(xy) = \sum_d \nabla_d(x) \Theta^d_a(y) + x \nabla_a(y) \tag{7 a}$$

$$\Theta^a_b(xy) = \sum_d \Theta^d_a(x) \Theta^d_b(y) \tag{7 b}$$

Cette proposition conduit à interpréter les  $\nabla_a$  comme des dérivées graduées par les  $\Theta^a_b$ .

(iii) Nous construisons maintenant une algèbre extérieure de formes sur  $F(G_{\mathcal{A}})$ . Soit  $\Omega$  un  $F(G_{\mathcal{A}})$ -module à gauche :

$$\Omega = \left\{ \omega = \sum_{a=1}^D x_a \omega^a; x_a \in F(G_{\mathcal{A}}) \right\}$$

où les  $(\omega^a)_a$ , forment une base de  $\Omega$ .  $\Omega$  est l'espace des une-formes.  $\Omega$  est muni d'une structure de bi-module sur  $F(G_{\mathcal{A}})$ ; l'action à droite est définie par :  $\omega^a x = \sum_b \Theta^a_b(x) \omega^b, \forall x \in F(G_{\mathcal{A}})$ .

L'algèbre extérieure  $\Omega^\wedge$  est l'algèbre extérieure associée à la solution de l'équation de Yang-Baxter donnée par  $R[5]$ . Plus précisément,  $\Omega^\wedge = \bigoplus_n \Lambda_n(\mathbb{R})$  avec  $\Lambda_0(\mathbb{R}) = F(G_{\mathcal{R}})$ ,  $\Lambda_1(\mathbb{R}) = \Omega$  et  $\Lambda_n(\mathbb{R}) = \Omega^{\otimes n} / \langle (\Lambda^s)_s \rangle$  où les  $(\Lambda^s)_s$  forment une base de  $\text{Ker } P_n$  avec  $P_n$ , le  $\mathbb{R}$ -antisymétriseur :  $P_n = \sum_{\sigma \in S_n} (-)^\sigma R_\sigma$ . Le produit extérieur est le produit sur  $\Omega^\wedge$ . Les équations

de Yang-Baxter (5 b) permettent de munir  $\Omega^\wedge$  d'une structure de bi-module sur  $F(G_{\mathcal{R}})$ .

(iv) Sur  $\Omega^\wedge$ , on définit une opération  $d$ ,  $d : \Omega^\wedge \rightarrow \Omega^\wedge$ , par,  $\forall x \in F(G_{\mathcal{R}})$ ,  $\forall \omega_p \in \Lambda_p(\mathbb{R})$  :

$$dx = \sum_a \nabla_a(x) \omega^a \tag{8 a}$$

$$d\omega^a = -\frac{1}{2} \sum_{bc} \eta_{bc}^a \omega^b \omega^c \tag{8 b}$$

$$d(\omega_p \omega_q) = d\omega_p \omega_q + (-1)^p \omega_p d\omega_q \tag{8 c}$$

où  $\eta_{bc}^a$  est implicitement défini par  $f_{bc}^a = \frac{1}{2} (\eta_{bc}^a - \sum_{mn} \eta_{mn}^a R_{bc}^{mn})$ .

L'existence de  $\eta_{bc}^a$  est assurée par l'équation (5 a). L'opération  $d$  se projette sur  $\Omega^\wedge$  parce que la matrice  $\mathcal{R}$  est solution de l'équation de Yang-Baxter, eq. (1). Cette équation de Yang-Baxter et les relations (5) assurent la compatibilité de  $d$  avec la structure de bi-module de  $\Omega^\wedge$ . Finalement nous avons le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — L'opération  $d$  définie par les équations (8) est une différentielle :  $d^2 = 0$ .

La preuve de ce théorème réside dans l'utilisation simultanée de la définition de l'algèbre extérieure et des identités de Jacobi généralisées.

(v) Un calcul différentiel invariant à droite peut être développé parallèlement au calcul différentiel invariant à gauche décrit ci-dessus. Munissons  $\mathcal{U}(G_{\mathcal{R}})$  d'une antipode  $S$  tel que  $\sum_B \mathcal{F}^A_B S(\mathcal{F}^B_C) = \sum_B S(\mathcal{F}^A_B) \mathcal{F}^B_C = \delta^A_C$ .

Notons par  $\bar{T}_b$  et  $\bar{\Theta}_b^a$  les éléments de matrices de  $\bar{\mathcal{F}}^A_B = S(\mathcal{F}^A_B)$ . Leur co-multiplication est donnée par :

$$\Delta \bar{T}_a = \bar{T}_a \otimes 1 + \sum_b \bar{\Theta}_a^b \otimes \bar{T}_b \quad \text{et} \quad \Delta \bar{\Theta}_b^a = \sum_d \bar{\Theta}_b^d \otimes \bar{\Theta}_d^a$$

Définissons les applications  $\bar{\nabla}_a$  et  $\bar{\Theta}_b^a$  sur  $F(G_{\mathcal{R}})$  par :

$$\bar{\nabla}_a(u^{\alpha}_{ij}) = \sum_k \rho^\alpha (\bar{T}_a)_{ik} u^{\alpha}_{kj} \quad \text{et} \quad \bar{\Theta}_b^a(u^{\alpha}_{ij}) = \sum_k \rho^\alpha (\bar{\Theta}_b^a)_{ik} u^{\alpha}_{kj}$$

Par construction elles sont invariantes à droite :  $\Delta \bar{\nabla}_a = (\bar{\nabla}_a \otimes 1) \Delta$  and  $\Delta \bar{\Theta}_b^a = (\bar{\Theta}_b^a \otimes 1) \Delta$ . Les applications  $\bar{\nabla}_a$  sont des dérivées graduées par les  $\bar{\Theta}_b^a$  :  $\bar{\nabla}_a(xy) = \bar{\nabla}_a(x)y + \sum_d \bar{\Theta}_d^a(x) \bar{\nabla}_d(y)$ , pour tout  $x, y \in F(G_{\mathcal{R}})$ . Alors, le

calcul différentiel spécifié par les équations (8) admet une forme invariante à droite qui s'écrit  $dx = \sum_a \bar{\omega}^a \bar{\nabla}_a(x)$ , pour tout  $x \in F(G_{\mathcal{A}})$ , avec

$$\bar{\omega}^a + \sum_b R_b^a \omega^b = 0.$$

#### 4. CONCLUSION

Il serait intéressant d'établir les liens entre ce calcul différentiel, celui de Dubois-Violette [7] et la géométrie non commutative d'Alain Connes [8].

Concluons par deux applications physiques possibles : (i) Les théories de jauge sur les groupes quantiques : puisque un calcul différentiel peut être défini, une théorie cohomologique sur les algèbres de Lie quantiques peut être développée. L'opérateur BRS des théories de jauge s'identifie alors à la différentielle. (ii) La théorie quantique des champs en deux dimensions est compatible avec l'existence de courants non-locaux. Le calcul différentiel sur les groupes quantiques semble être le cadre algébrique adapté à la description géométrique de ces courants non locaux.

Certains des résultats exposés ci-dessus ont été présentés au 'workshop' de l'E.T.H. de Zurich en juin 1989. Je remercie A. Leclair pour m'avoir encouragé à écrire ces notes et I. Frenkel pour quelques discussions.

#### RÉFÉRENCES

- [1] V. G. DRINFEL'D, Quantum Groups, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Berkeley, CA, U.S.A., 1986, p. 793-820.
- [2] S. L. WORONOWICZ, Compact Matrix Pseudogroups, *Comm. Math. Phys.*, vol. **111**, 1987, p. 613-665.
- [3] N. Y. RESHETIKHIN, L. A. TAKHTADZHIAN et L. D. FADDEEV, Quantization of Lie groups and Lie algebras, *Leningrad Math. J.*, vol. **1**, 1990, p. 193-225.
- [4] L. D. FADDEEV, *Integrable Models in (1+1)-dimensional Quantum Field Theories*, Les Houches, session XXXIX, 1982, p. 563, J.-B. ZUBER et R. STORA éd.
- [5] S. L. WORONOWICZ, Differential Calculus on Compact Matrix Pseudogroups (Quantum Groups), *Comm. Math. Phys.*, vol. **122**, 1989, p. 125-170.
- [6] D. I. GUREVITCH, The Yang-Baxter Equation and a Generalization of Formal Lie Theory, *Soviet. Math. Dokl.*, vol. **33**, 1986, p. 758-762.
- [7] M. DUBOIS-VIOLETTE, Dérivations et calcul différentiel non commutatif, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **307**, série I, 1988, p. 403-405.
- [8] A. CONNES, *Non-Commutative Differential Geometry*, Publication de l'I.H.E.S., vol. **62**, 1986, p. 257.

(Manuscrit reçu le 3 janvier 1991.)