

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

DANG NGOC NGHIEM

Convergence forte des espérances conditionnelles et des projecteurs d'un espace de Hilbert

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 1 (1970), p. 9-13

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_1_9_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Convergence forte des espérances conditionnelles et des projecteurs d'un espace de Hilbert

par

DANG NGOC NGHIEM

RÉSUMÉ. — L'objet essentiel de ce travail est de démontrer que la convergence en ordre implique la convergence au sens de L^p pour des suites d'espérances conditionnelles.

SUMMARY. — In this paper, we establish that order convergence implies L^p -convergence for sequences of conditional expectations.

I. — CONVERGENCE FORTE DES ESPÉRANCES CONDITIONNELLES

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité, $(\mathcal{B}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} , on définit la convergence au sens L^p de (\mathcal{B}_n) vers $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ par :

$\mathcal{B}_n \xrightarrow{L^p} \mathcal{B}$ si pour tout $f \in L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la suite $E^{\mathcal{B}_n} f$ des espérances conditionnelles de f converge au sens L^p vers $E^{\mathcal{B}} f$.

On définit :

$$\mathcal{B}_\infty = \limsup \mathcal{B}_n = \bigcap_n \left(\bigvee_{m \geq n} \mathcal{B}_m \right) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_0 = \liminf \mathcal{B}_n = \bigvee_n \left(\bigcap_{m \geq n} \mathcal{B}_m \right).$$

L'un des résultats essentiels de ce papier est le théorème suivant :

THÉORÈME I-3. — Si $\liminf \mathcal{B}_n = \limsup \mathcal{B}_n$. Alors la suite \mathcal{B}_n est convergente au sens L^p pour $\forall p \in (1, +\infty)$.

Ce théorème admet une généralisation dans le cas des projecteurs orthogonaux dans un espace de Hilbert qui sera traitée dans la partie II de ce papier.

Dans toute la suite $\mathcal{B}_n, \mathcal{B}'_n, \mathcal{B}''_n, \mathcal{B}$, désignent des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} .

THÉORÈME I-1. — Si (\mathcal{B}_n) et (\mathcal{B}'_n) convergent vers \mathcal{B} au sens L^p ($1 \leq p \leq \infty$) et si $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_n$, alors toute suite (\mathcal{B}''_n) , vérifiant $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}''_n \subset \mathcal{B}'_n$, converge vers la même limite.

Démonstration. — Rappelons quelques propriétés des espérances conditionnelles :

- (1) $E^{\mathcal{B}} = E^{\mathcal{B}}E^{\mathcal{B}'} = E^{\mathcal{B}'}E^{\mathcal{B}}$ p. s. si $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'$.
- (2) $\|E^{\mathcal{B}}f\|_p \leq \|f\|_p$ pour tout $f \in L^p$ ($1 \leq p \leq \infty$).

Puisque $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}''_n \subset \mathcal{B}'_n$, d'après (1) on a :

$$E^{\mathcal{B}''_n}f - E^{\mathcal{B}_n}f = E^{\mathcal{B}''_n}(E^{\mathcal{B}'_n}f - E^{\mathcal{B}_n}f) \quad \forall f \in L^p.$$

Donc, d'après (2) :

$$\|E^{\mathcal{B}''_n}f - E^{\mathcal{B}_n}f\|_p = \|E^{\mathcal{B}''_n}(E^{\mathcal{B}'_n}f - E^{\mathcal{B}_n}f)\|_p \leq \|E^{\mathcal{B}'_n}f - E^{\mathcal{B}_n}f\|_p \rightarrow 0$$

quand $n \rightarrow \infty$ par hypothèse.

Donc, au sens L^p :

$$\lim E^{\mathcal{B}''_n}f = \lim E^{\mathcal{B}_n}f = E^{\mathcal{B}}f \quad \text{pour} \quad \forall f \in L^p.$$

Le théorème est donc démontré.

COROLLAIRE 1. — Soit θ la σ -algèbre triviale de \mathcal{A} (θ est engendrée par les ensembles négligeables). Si $\mathcal{B}_n \xrightarrow{L^p} \theta$, alors toute suite (\mathcal{B}'_n) vérifiant $\mathcal{B}'_n \subset \mathcal{B}_n$ converge vers θ au sens L^p ($1 \leq p \leq \infty$).

Démonstration. — En effet, $\theta \subset \mathcal{B}'_n \subset \mathcal{B}_n$ et il suffit d'appliquer le théorème I-1.

Conséquences du théorème I-1. — Pour $p \in (1, +\infty)$, le théorème suivant est classique :

THÉORÈME I-2. — Toute suite croissante (resp. décroissante) \mathcal{B}_n converge au sens L^p ($1 \leq p < \infty$) vers $\limsup_n \mathcal{B}_n$ (resp. $\liminf \mathcal{B}_n$). On en déduit une condition suffisante de convergence :

COROLLAIRE 2. — S'il existe une suite \mathcal{B}'_n vérifiant : $\mathcal{B}'_n \subset \mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_n$) et qui converge au sens L^p vers $\mathcal{B} = \limsup \mathcal{B}_n$ (resp. $\mathcal{B} = \liminf \mathcal{B}_n$). Alors $\mathcal{B}_n \xrightarrow{L^p} \mathcal{B}$.

Démonstration. — Soit

$$\mathcal{B}''_n = \bigvee_{m \geq n} \mathcal{B}_m \quad (\text{resp. } \mathcal{B}''_n = \bigcap_{m \geq n} \mathcal{B}_n),$$

\mathcal{B}''_n est une suite monotone convergeant au sens L^p vers \mathcal{B} , et on a

$$\mathcal{B}'_n \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}''_n \quad (\text{resp. } \mathcal{B}''_n \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_n)$$

donc $\mathcal{B}_n \xrightarrow{L^p} \mathcal{B}$ d'après le théorème I-1.

THÉORÈME I-3. — Si $\limsup \mathcal{B}_n = \liminf \mathcal{B}_n = \mathcal{B}$. Alors \mathcal{B}_n converge vers \mathcal{B} au sens L^p ($1 \leq p < \infty$).

Démonstration. — Soient

$$\mathcal{B}'_n = \bigcap_{m \geq n} \mathcal{B}_m \quad \text{et} \quad \mathcal{B}''_n = \bigvee_{m \geq n} \mathcal{B}_m$$

on a $\mathcal{B}'_n \subset \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}''_n$ et (\mathcal{B}'_n) et (\mathcal{B}''_n) sont deux suites monotones convergentes, on applique le théorème I-1.

COROLLAIRE. — Toute suite (\mathcal{B}_n) de σ -algèbre indépendantes est convergente au sens L^p ($1 \leq p < \infty$) vers θ .

Démonstration. — D'après la « loi $\{0, 1\}$ » on a :

$$\limsup \mathcal{B}_n = \liminf \mathcal{B}_n = \theta.$$

Remarque. — Il n'existe pas de réciproque du théorème I-3 (voir l'exemple de Sidak [I]).

Mais on a un théorème d'encadrement suivant de \mathcal{B} :

THÉORÈME I-4. — Si $\mathcal{B}_n \xrightarrow{L^p} \mathcal{B}$ ($p \in [0, \infty]$). Alors nécessairement on a :

$$\liminf \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B} \subset \limsup \mathcal{B}_n.$$

On va d'abord montrer qu'il existe un encadrement plus précis de \mathcal{B} qui implique le théorème I-4 :

— Soit $\mathcal{B}'_\infty = \bigcap_{(\mathcal{B}_{n_k})} \limsup \mathcal{B}_{n_k}$ le signe intersection porte sur toutes

les suites extraites (\mathcal{B}_{n_k}) . On a évidemment :

$$\mathcal{B}'_x \subset \limsup \mathcal{B}_n$$

— Soit $\mathcal{B}'_0 = \bigvee_{(\mathcal{B}_{n_k})} \liminf \mathcal{B}_{n_k}$ le signe \bigvee porte sur toutes les suites les suites extraites (\mathcal{B}_{n_k}) de (\mathcal{B}_n) . On a :

$$\liminf_n \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_0.$$

THÉORÈME I-5. — Si $\mathcal{B}_n \xrightarrow{L^p} \mathcal{B}$ ($p \in [1, +\infty]$). Alors on a nécessairement :

$$\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'_x.$$

Et on a par suite :

$$\liminf_n \mathcal{B}_n \subset \mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'_x \subset \limsup_n \mathcal{B}_n.$$

Démonstration.

1) $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}'_x$: soit (\mathcal{B}_{n_k}) une suite extraite quelconque de (\mathcal{B}_n) , il suffit de montrer que

$$B \in \mathcal{B} \Rightarrow B \in \limsup_k \mathcal{B}_{n_k}.$$

Or, par hypothèse :

$$E^{\mathcal{B}_{n_k}} 1_B \xrightarrow{L^p} E^{\mathcal{B}} 1_B = 1_B$$

quand $k \rightarrow \infty$; on peut donc trouver une suite extraite de $(E^{\mathcal{B}_{n_k}} 1_B)$ que je note $(E^{\mathcal{B}_{n_k(l)}} 1_B)_{l \in \mathbb{N}}$ qui converge p. s. vers 1_B :

$$1_B = \lim_{l \rightarrow \infty} \inf_{m \geq l} E^{\mathcal{B}_{n_k(m)}} 1_B$$

le second membre est une fonction mesurable par rapport à $\limsup_k \mathcal{B}_{n_k}$.

On a donc $B \in \limsup_k \mathcal{B}_{n_k}$ pour $\forall B \in \mathcal{B}$ et pour toute suite extraite

$$(\mathcal{B}_{n_k}) \Rightarrow \mathcal{B} \subset \mathcal{B}'_x.$$

2) $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B}$: Il s'agit de montrer $\liminf_k \mathcal{B}_{n_k} \subset \mathcal{B}$ pour toute suite extraite (\mathcal{B}_{n_k}) . Or

$$\liminf_k \mathcal{B}_{n_k} = \bigvee_k \left(\bigcap_{l \geq k} \mathcal{B}_{n_l} \right)$$

est la σ -algèbre engendrée par les ensembles A appartenant à toutes les \mathcal{B}_{n_k} sauf pour un nombre fini d'indices k , il suffit de démontrer qu'un tel A appartient à \mathcal{B} .

Or, $\exists k_0$ tel que

$$\forall k \geq k_0 \quad A \in \mathcal{B}_{n_k} \Rightarrow E^{\mathcal{B}_{n_k}} 1_A = 1_A$$

et

$$\lim_k E^{\mathcal{B}_{n_k}} 1_A = E^{\mathcal{B}} 1_A.$$

Donc :

$$1_A = E^{\mathcal{B}} 1_A \Rightarrow A \in \mathcal{B};$$

on a démontré $\mathcal{B}'_0 \subset \mathcal{B}$.

II. — CONVERGENCE FORTE DES PROJECTEURS ORTHOGONAUX DANS UN ESPACE DE HILBERT

Sur l'ensemble des projecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert on peut considérer une relation d'ordre partiel (voir [2]). On obtient alors des résultats analogues sur la convergence forte des suites des projecteurs orthogonaux. On aurait pu d'ailleurs montrer ces résultats d'abord et en déduire ensuite ceux de la partie I comme cas particulier.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] SIDAČ, *Teoria Veroyatnost i Primen*, **2**, 1957, 283.
 [2] HALMÖS, *Introduction to Hilbert Space*, Chelsea Publishing Company, New York, 1951.

(Manuscrit reçu le 6 mai 1969).