

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN-PIERRE CONZE

JEAN-CLAUDE MARCUARD

Conjugaison topologique des automorphismes et des translations ergodiques de nilvariétés

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 2 (1970), p. 153-157

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_2_153_0

© Gauthier-Villars, 1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Conjugaison topologique des automorphismes et des translations ergodiques de nilvariétés

par

Jean-Pierre CONZE ⁽¹⁾

Institut H. Poincaré, 11, rue P.-Curie, Paris-5^e

et

Jean-Claude MARCUARD

Faculté des Sciences, Université de Dijon.

RÉSUMÉ. — Étant donnés deux automorphismes d'une nilvariété compacte, on montre que leur conjugaison topologique entraîne leur conjugaison algébrique. De plus, tout homéomorphisme établissant une conjugaison entre deux automorphismes ergodiques, ou entre deux translations ergodiques, sur une nilvariété compacte est une transformation affine.

SUMMARY. — We prove that if two automorphisms of a compact nilmanifold are topologically conjugate, then they are also algebraically conjugate. Moreover, every homomorphic conjugacy between two ergodic automorphisms, or two ergodic translations, on a compact nilmanifold is an affine transformation.

On appelle nilvariété compacte le quotient N/Γ d'un groupe de Lie nilpotent par un sous-groupe discret à quotient compact. Une transformation affine de N/Γ est une transformation α définie par $\alpha(x\Gamma) = aA(x)\Gamma$,

⁽¹⁾ Équipe de Recherche n° 1 « Processus stochastiques et applications » dépendant de la section n° 2 « Théories physiques et probabilités » associée au C. N. R. S.

où a est un élément de N et A un automorphisme de N tel que $A(\Gamma) = \Gamma$. Si $a = e$, α est appelé automorphisme de N/Γ , si A est l'application identique de N , α est une translation. Rappelons que la mesure sur N/Γ de masse 1 invariante par N est conservée par les transformations affines. C'est par rapport à cette mesure qu'est définie l'ergodicité d'une transformation affine de N/Γ . W. Parry a caractérisé dans [1] les transformations affines ergodiques.

Dans ce travail nous étendons aux nilvariétés les résultats de R. L. Adler et R. Palais [2] sur la conjugaison des automorphismes de tores ⁽²⁾.

Dans toute la suite, N sera un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe et Γ un sous-groupe discret de N à quotient compact.

THÉORÈME 1. — Soient α et β deux automorphismes d'une nilvariété compacte N/Γ : $\alpha(x\Gamma) = A(x)\Gamma$, $\beta(x\Gamma) = B(x)\Gamma$, $x \in N$. Si α et β sont conjugués par un homéomorphisme γ de N/Γ , $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$, alors il existe un automorphisme C du groupe N tel que $CAC^{-1} = B$. De plus, si α est ergodique, γ est une transformation affine de N/Γ .

THÉORÈME 2. — Si deux translations ergodiques d'une nilvariété compacte sont conjuguées par un homéomorphisme γ , alors γ est une transformation affine de la nilvariété.

LEMME 1 (A. Malcev [3]). — Tout automorphisme de Γ se prolonge de manière unique en un automorphisme de N .

LEMME 2. — Soit A un automorphisme de N . Si x est un élément de N tel que la fermeture de l'ensemble $\{A^n x, n \in \mathbb{Z}\}$ soit compacte et contienne l'élément neutre e de N , alors $x = e$.

Démonstration. — Soit dA l'automorphisme de l'algèbre de Lie \mathcal{N} de N dérivé de A . On a : $A(\exp X) = \exp(dAX)$, $X \in \mathcal{N}$. Comme l'application exponentielle est un homéomorphisme de \mathcal{N} sur N , il suffit de montrer que, si pour un $X \in \mathcal{N}$ la fermeture de l'ensemble $\{(dA)^n X, n \in \mathbb{Z}\}$ est compacte et contient 0, alors $X = 0$. L'ensemble des vecteurs Y tels que $\{(dA)^n Y, n \in \mathbb{Z}\}$ soit borné forme un sous-espace vectoriel invariant par dA . Il existe une norme sur ce sous-espace pour laquelle dA est une isométrie. Donc 0 ne peut être point d'accumulation de $\{(dA)^n X, n \in \mathbb{Z}\}$ que si $X = 0$.

⁽²⁾ Après la rédaction de cet article, les auteurs ont eu connaissance de résultats plus complets non encore publiés de P. Walters sur les relations entre la conjugaison topologique et l'ergodicité des transformations affines de nilvariétés compactes.

Démonstration des théorèmes

1) *Relèvement d'un homéomorphisme de N/Γ .*

Le groupe N étant le revêtement universel de N/Γ , on peut relever tout homéomorphisme γ de N/Γ en un homéomorphisme F de N . De plus, si F et F' sont deux relèvements de γ , il existe d dans Γ , indépendant de x , tel que $F'(x) = F(x) \cdot d$, $x \in N$ (L'application $x \rightarrow F(x)^{-1} \cdot F'(x)$ de N dans Γ est constante). En particulier, à tout $d \in \Gamma$ est associé un élément $L(d) \in \Gamma$ tel que $F(xd) = F(x) \cdot L(d)$, $x \in N$. On vérifie que l'application $d \rightarrow L(d)$ est un automorphisme de Γ dans Γ . D'après le lemme 1, on peut prolonger L en un automorphisme de N sur N , que nous noterons encore L . Posons $R(x) = F(x) \cdot (L(x))^{-1}$. On a

$$R(xd) = F(xd) \cdot (L(xd))^{-1} = F(x) \cdot L(d) \cdot (L(d))^{-1} \cdot (L(x))^{-1} = R(x).$$

Ainsi tout relèvement F de γ se décompose sous la forme $F(x) = c \cdot P(x) \cdot L(x)$, où L est un automorphisme de N conservant Γ , $c = F(e)$ est un élément fixé dans N , et $P(x) = c^{-1} \cdot R(x)$ est une application périodique de N dans N , ($P(xd) = P(x)$, $x \in N$, $d \in \Gamma$), vérifiant $P(e) = e$. Cette décomposition est unique.

2) *Cas des automorphismes.*

Soient α et β deux automorphismes de N/Γ : $\alpha(x\Gamma) = A(x) \cdot \Gamma$, $\beta(x\Gamma) = B(x) \cdot \Gamma$. Soit γ un homéomorphisme de N/Γ tel que $\gamma\alpha\gamma^{-1} = \beta$. Si $F(x) = c \cdot P(x) \cdot C(x)$ est un relèvement de γ , $F \circ A$ et $B \circ F$ sont deux relèvements de $\gamma\alpha = \beta\gamma$. Il existe donc $d \in \Gamma$ tel que :

$$c \cdot P(A(x)) \cdot C(A(x)) = B(c) \cdot B(P(x)) \cdot B(C(x))d.$$

Par l'unicité de la décomposition d'un relèvement, on obtient :

$$\begin{aligned} c &= B(c) \cdot d \\ P(A(x)) &= d^{-1} \cdot B(P(x)) \cdot d \\ C(A(x)) &= d^{-1} \cdot B(C(x)) \cdot d \end{aligned}$$

La première et la dernière relation montrent que

$$c \cdot C(A(x)) \cdot c^{-1} = B(c \cdot C(x) \cdot c^{-1}).$$

Les automorphismes A et B sont donc algébriquement conjugués par l'automorphisme $x \rightarrow c \cdot C(x) \cdot c^{-1}$.

Supposons maintenant α ergodique. Posons $P_1(x) = c \cdot P(x) \cdot c^{-1}$, $C_1(x) = c \cdot C(x) \cdot c^{-1}$, et formons, comme dans [2], $Q(x) = C_1^{-1}(P_1(x))$. Les

deux dernières relations montrent que les transformations Q et A commutent. Soit x un point de N dont l'orbite par A est dense dans N , mod Γ . Comme α est ergodique, il existe un ensemble dense de points de N ayant cette propriété. On peut trouver des suites $n_i \in \mathbb{N}$, $d_i \in \Gamma$ telles que

$$A^{n_i}(x)d_i \rightarrow e, n_i \rightarrow \infty.$$

D'où $A^{n_i}(Q(x)) = Q(A^{n_i}(x)) = Q(A^{n_i}(x)d_i) \rightarrow e$, $n_i \rightarrow \infty$. Ainsi e est point d'accumulation de l'ensemble $\{A^n(Q(x)), n \in \mathbb{Z}\}$. D'autre part, cet ensemble est de fermeture compacte, car Q étant périodique, l'image par Q de N est compacte et $\{Q(A^n(x)), n \in \mathbb{Z}\} = \{A^n(Q(x)), n \in \mathbb{Z}\}$. D'après le lemme 2, on a donc $Q(x) = e$, pour tout $x \in N$. D'où $P_1(x) = P(x) \equiv e$.

3) Cas des translations.

Soient α et β deux translations de N/Γ , $\alpha(x)\Gamma = ax\Gamma$, $\beta(x)\Gamma = bx\Gamma$, conjuguées par un homéomorphisme γ . Si $F(x) = c \cdot P(x) \cdot C(x)$ est un relèvement de γ , on obtient en identifiant les relèvements de $\gamma\alpha$ et $\beta\gamma$ à un élément $d \in \Gamma$ près :

$$\begin{aligned} c \cdot P(a) \cdot C(a) &= bd \\ C(a)^{-1} \cdot P(a)^{-1} \cdot P(ax) \cdot C(a) &= d^{-1} \cdot P(x) \cdot d \\ C(x) &= d^{-1} \cdot C(x) \cdot d \end{aligned}$$

La dernière relation montre que d est dans le centre de N . On peut donc récrire la deuxième relation sur la forme :

$$P(ax) = P(a) \cdot C(a) \cdot P(x) \cdot C(a)^{-1} \quad (1)$$

Supposons α ergodique. D'après un théorème de [4], p. 66, α est alors minimale. Donc l'ensemble $\{a^n d, n \in \mathbb{Z}, d \in \Gamma\}$ est dense dans N .

La transformation P étant périodique, on peut considérer que P définit une application de N/Γ dans N . Soit \tilde{P} l'application de N/Γ dans N/N' ($N' = [N, N]$ sous-groupe dérivé de N), définie par :

$$x\Gamma \rightarrow \tilde{P}(x\Gamma) = P(x\Gamma) \text{ mod } N'.$$

La relation (1), notée additivement, donne : $\tilde{P}(ax\Gamma) = \tilde{P}(a\Gamma) + \tilde{P}(x\Gamma)$. Comme N/Γ est compact, on peut intégrer la fonction à valeur vectorielle \tilde{P} sur N/Γ . On obtient, d'après l'invariance de la mesure :

$$\int_{N/\Gamma} \tilde{P}(x\Gamma) d\mu(x\Gamma) = \int_{N/\Gamma} \tilde{P}(ax\Gamma) d\mu(x\Gamma) = \tilde{P}(a\Gamma) + \int_{N/\Gamma} \tilde{P}(x\Gamma) d\mu(x\Gamma)$$

D'où $\tilde{P}(a\Gamma) = 0$, c'est-à-dire $P(a) \in N'$. La relation (1) montre alors que $P(a^n d) = P(a^n) \in N'$, $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \Gamma$.

Il en résulte que P applique N dans N' . En utilisant la série centrale descendante de N , on obtient que P applique N sur e . Donc γ est une transformation affine de N/Γ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] W. PARRY, Ergodic properties of affine transformations and flows on nilmanifolds (*à paraître*).
 - [2] R. L. ALDER and R. PALAIS, Homeomorphic conjugacy of automorphisms in the torus. *Proc. Am. Math. Soc.*, **16**, 1965, p. 1222-1225.
 - [3] A. MALCEV, On a class of homogeneous spaces. *Amer. Math. Soc. Transl. sér. 1*, vol. **9**, p. 276-307.
 - [4] L. AUSLANDER, L. GREEN and F. HAHN, Flows on homogeneous spaces. *Annals of Math. studies*, n° 53, 1963.
-