ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

N. KAROUI
H. REINHARD
B. ROYNETTE

Processus tués de processus de Hunt conservatifs et prolongements de processus standards

Annales de l'I. H. P., section B, tome 6, n° 3 (1970), p. 201-236
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1970__6_3_201_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VI, n° 3, 1970, p. 201-236. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus tués de processus de Hunt conservatifs et prolongements de processus standards

par

N. KAROUI, H. REINHARD et B. ROYNETTE

SOMMAIRE. — Soit $\hat{M}$ un processus de Markov standard tel que $\hat{X}_{\zeta-}$ existe ; P. A. Meyer a construit par des méthodes probabilistes un processus standard spécial M qui prolonge $\hat{M}$.

Cet article donne, par des méthodes plus analytiques, une condition nécessaire et suffisante pour que le processus M soit un processus de Hunt conservatif et que $\hat{M}$ soit équivalent à un processus tué de M par une fonctionnelle multiplicative.

Dans une première partie, on donne des propriétés d'un processus tué d'un processus conservatif par une fonctionnelle multiplicative $M_t = e^{-B_t}$, où B_t est une fonctionnelle additive continue.

Dans la deuxième partie, on construit à partir de $\hat{M}$ le semi-groupe de transition de M ; on montre qu'il existe une version continue à droite et on donne les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\hat{M}$ soit équivalent à un processus tué de M.

On termine par des cas particuliers et un exemple.

SUMMARY. — $\hat{M}$ being a standard Markov process such that $\hat{X}_{\zeta-}$ exists, P. A. Meyer constructed a standard special process M prolonging $\hat{M}$, by probabilistic methods. This paper provides, by more analytical methods, a necessary and sufficient condition so that M be a conservative Hunt process and so that $\hat{M}$ be equivalent to a process obtained by « killing » M by a multiplicative functional.

In the first part, the authors give some properties of the process obtained by « killing » M by a functional $M_t = e^{-B_t}$, B_t being a continuous additive functional.

In the second part, the transition semi group of M is constructed starting from $\hat{\mathrm{M}}$; the existence of a right continuous version is proved, then the necessary and sufficient conditions are given so that $\hat{\mathrm{M}}$ be equivalent to a « killed » process of M.

The paper ends by giving particular cases and an example.

Notations.

Soit E un espace localement compact à base dénombrable (LCD) muni de la tribu de ses boréliens, δ son point de compactification.

B(E) désigne l'ensemble des fonctions boréliennes bornées.

C(E) désigne l'ensemble des fonctions continues bornées.

Soit X un processus de Markov sur Ω à valeurs dans E ; on notera P_t son semi-groupe de transition et K^λ sa résolvante.

Soit B une fonctionnelle additive on posera :

$$\mathrm{U}_{\mathrm{B}}^{\lambda} f(x) = \mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\mathrm{X}_t) d\mathrm{B}_t .$$

Soit P_t un semi-groupe, on notera ${}_s\mathrm{A}$ et $\mathrm{D}({}_s\mathrm{A})$ le générateur fort de P_t et son domaine, de même le générateur faible et son domaine seront désignés respectivement par ${}_w\mathrm{A}$ et $\mathrm{D}({}_w\mathrm{A})$.

On désignera par ${}_s\mathrm{B}_0$ l'ensemble des fonctions de B(E) telles que $\| \mathrm{P}_t f - f \| \to 0$ si t tend vers zéro, et par ${}_w\mathrm{B}_0$ l'ensemble des fonctions de B(E) telles que $\mathrm{P}_t f(x) - f(x)$ tend vers zéro pour tout x si t tend vers zéro.

On rappelle la définition d'un processus tué par une fonctionnelle M_t (les détails pourront être trouvés dans Blumenthal et Getoor [2], III 3).

Soit $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathrm{R}^+$, nous définissons sur $\tilde{\Omega}$ un processus de la façon suivante :

$$\tilde{\mathrm{X}}_t(\omega, \lambda) = \begin{cases} \mathrm{X}_t(\omega) & \text{si} \quad t < \lambda \\ \delta & \text{si} \quad t \geqslant \lambda \end{cases}$$

On définit sur R^+ une mesure α_ω dépendant de ω en posant

$$\alpha_\omega(]a, \infty]) = \mathrm{M}_a(\omega) ;$$

soit alors $\Lambda \in \Omega \times \mathrm{R}^+$ et Λ^ω sa section en ω, c'est-à-dire $\Lambda^\omega = \{ \lambda ; (\omega, \lambda) \in \Lambda \}$, la formule $\tilde{\mathrm{P}}_x(\Lambda) = \mathrm{E}_x(\alpha_\omega(\Lambda^\omega))$ définit une probabilité sur $\Omega \times \mathrm{R}^+$.

$\tilde{\mathrm{M}}$ $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathrm{X}}_t, \tilde{\mathrm{P}}_x)$ muni des tribus convenables est un processus standard qu'on appelle le processus tué de M par la fonctionnelle multiplicative M_t.

Soit B_t une fonctionnelle additive continue, soit $\hat{M}$ le processus tué de M par e^{-B_t} (dans la suite nous dirons que $\hat{M}$ est le processus tué de M par B_t), nous serons amenés à faire l'une ou l'autre des hypothèses suivantes :

H 1 $\sup_x E_x(B_t) \to 0$ si t tend vers zéro

H 2 $\exists N(\lambda)$ tel que $\sup_x U_B^\lambda 1(x) \leqslant N(\lambda) < \infty$ $\forall \lambda > 0$

H 3 $\exists \lambda_0 > 0$ tel que $U_B^{\lambda_0} 1(x) < \infty$.

On définit enfin sur B(E) les opérateurs $\hat{H}^\lambda$ de la façon suivante :

[0,1] $$\hat{H}^\lambda f(x) = \hat{E}_x(e^{-\lambda\hat{\zeta}} f(\hat{X}_{\hat{\zeta}-}); \hat{\zeta} < \infty) \qquad \lambda \geqslant 0$$

Convention.

Nous aurons souvent à prendre l'espérance de variables aléatoires du processus $\hat{M}$; nous conviendrons désormais que le symbole $\hat{E}_x$ suffit à indiquer qu'il s'agit du processus $\hat{M}$ et les lettres X et ζ dans les expressions qui expriment la quantité dont nous prenons l'espérance seront supposées surmontées du symbole $\hat{}$. Ainsi nous écrirons l'expression précédente $\hat{H}^\lambda f(x) = \hat{E}_x(e^{-\lambda\zeta} f(X_{\zeta-}); \zeta < \infty)$.

Toutes les quantités relatives au processus $\hat{M}$ seront désignées par des lettres surmontées du symbole $\hat{}$, ainsi la résolvante de $\hat{M}$ sera notée $\hat{K}^\lambda$, le générateur fort ${}_s\hat{A}$, son domaine $D({}_s\hat{A})$, son semi-groupe sera noté $\hat{P}_t$ et l'ensemble des $f \in B(E)$ telles que $\| \hat{P}_t f - f \| \to 0$ quand t tend vers zéro sera noté ${}_s\hat{B}_0$; on définira de même ${}_w\hat{B}_0$.

PREMIÈRE PARTIE

PROPRIÉTÉS DU PROCESSUS TUÉ

A. Propriétés des opérateurs $\hat{H}^\lambda$.

Les opérateurs $\hat{H}^\lambda$ vérifient l'équation suivante :

(I, A, 1) $$\hat{H}^\lambda - \hat{H}^\mu + (\lambda - \mu)\hat{K}^\lambda \hat{H}^\mu = 0$$

Cette relation entraîne évidemment que $\hat{K}^\lambda \hat{H}^\mu = \hat{K}^\mu \hat{H}^\lambda$.

Il suffit de calculer

$$\hat{K}^\lambda \hat{H}^\mu f(x) = \hat{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{E}_{X_t}(e^{-\mu\zeta} f(X_{\zeta^-})\,;\ \zeta < \infty) dt$$

$$= \hat{E}_x(e^{-\mu\zeta} f(X_{\zeta^-})\,;\ (\zeta < \infty) \int_0^\infty e^{-(\lambda-\mu)t} dt = \frac{\hat{H}^\mu f(x) - \hat{H}^\lambda f(x)}{\lambda - \mu}$$

PROPOSITION (A, 1):

$$\hat{H}^\lambda f(x) = E_x(e^{-\lambda\zeta - B_\infty} f(X_{\zeta^-})\,;\ \zeta < \infty) + E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t} f(X_t) dB_t$$

En particulier si M *est conservatif on obtient les relations :*

(I, A, 2) $\hat{H}^\lambda f(x) = E_x \int_0^\zeta e^{-\lambda t - B_t} f(X_t) dB_t$ et $K^\lambda - \hat{K}^\lambda = \hat{H}^\lambda K^\lambda$.

On démontre cette proposition en utilisant la relation de définition de $\hat{P}_x$

$$\hat{E}_x[f(\omega, \lambda)] = E_x \int_0^\infty f(\omega, \lambda) \alpha_\omega(d\lambda)$$

où α_ω est la mesure définie sur R^+ par $\alpha_\omega(]a, \infty]) = e^{-B_a(\omega)}$.

Alors

$$\hat{H}^\mu f(x) = \hat{E}_x(e^{-\mu\zeta(\omega,\lambda)} f(X_{\zeta^-}(\omega, \lambda))\,;\ \zeta(\omega, \lambda) < \infty)$$

$$= E_x\left[\int_0^\infty e^{-\mu\hat{\zeta}(\omega,\lambda)} f[\hat{X}_{\hat{\zeta}(\omega,\lambda)}(\omega, \lambda)] 1\{\hat{\zeta}(\omega,\lambda) < \infty\}\, \alpha_\omega(d\lambda)\right]$$

Or $\hat{\zeta}(\omega, \lambda) = \zeta(\omega) \Lambda \lambda$ et $\hat{X}_{\hat{\zeta}^-(\omega,\lambda)}(\omega, \lambda) = X_{\zeta^-(\omega)\Lambda\lambda}(\omega)$

Ainsi

$$\hat{H}^\mu f(x) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\mu\zeta(\omega)\Lambda\lambda} f[X_{\zeta^-(\omega)\Lambda\lambda}(\omega)] 1_{\{\zeta(\omega)\Lambda\lambda < \infty\}} \alpha_\omega(d\lambda)\right]$$

$$= E_x\left[\int_0^\zeta e^{-\mu\lambda} f[X_{\lambda^-}(\omega)] \alpha_\omega(d^\lambda)\right. + E_x\left[e^{-\mu\zeta} f(X_{\zeta^-}) \int_{\zeta(\omega)}^\infty \alpha_\omega(d\lambda)\right]$$

$$= E_x\left[\int_0^\zeta e^{-\mu\lambda} f(X_\lambda) e^{-B_\lambda} dB_\lambda\right] + E_x[e^{-\mu\zeta - B_\infty} f(X_{\zeta^-}),\ \zeta < \infty]$$

car l'ensemble des λ tels que $X_\lambda(\omega) \neq X_{\lambda^-}(\omega)$ est dénombrable et sa mesure est nulle puisque $B_\lambda(\omega)$ est continue en λ. Ayant la forme de $\hat{H}^\lambda$ dans le cas conservatif ($\zeta = +\infty$ $P_x ps$) la formule $K^\lambda - \hat{K}^\lambda = \hat{H}^\lambda K^\lambda$ résulte alors d'un calcul classique.

Nous supposerons désormais que le processus M est conservatif.

Nous noterons T la fonctionnelle additive $T_t(\omega) = t$ indépendante de ω.

Remarque. — Si la fonctionnelle B_t possède par rapport à T une densité $g \in B(E)$ alors $\hat{H}^\lambda f(x) = \hat{K}^\lambda g f(x)$.

En effet

$$\hat{H}^\lambda f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t} f(X_t) g(X_t) dt = \hat{K}^\lambda f g(x).$$

PROPOSITION (A, 2). — *Soit* $\hat{B}_t(\omega, \lambda) = B_{t \wedge \lambda}(\omega)$, $\hat{B}_t(\omega, \lambda)$ *est une fonctionnelle additive continue du processus* $\hat{M}$ *telle que* $\hat{H}^\mu f(x) = U^\mu_{\hat{B}} f(x)$.

Ceci prouve en particulier que $\hat{B}$ est de λ-potentiel fini et que $\hat{H}^\lambda f$ est un λ-potentiel régulier pour $\hat{M}$ ($\forall f \in B(E)$).

En effet

$$\begin{aligned}
U^\mu_{\hat{B}} f(x) &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\mu u} f(X_u(\omega, \lambda)) dB_u(\omega, \lambda)\right] \\
&= E_x \int_0^\infty \alpha_\omega(d\lambda) \int_0^\infty e^{-\mu u} f[\hat{X}_u(\omega, \lambda)] d\hat{B}_u(\omega, \lambda) \\
&= E_x \int_0^\infty \alpha_\omega(d\lambda) \int_0^\lambda e^{-\mu u} f(X_u(\omega)) dB_u(\omega) \\
&= E_x \int_0^\infty e^{-\mu u} f(X_u(\omega)) dB_u(\omega) \int_u^\infty \alpha_\omega(d\lambda) \\
&= E_x \int_0^\infty e^{-\mu u - B_u} f(X_u) dB_u = \hat{H}^\mu f(x) \qquad \text{(I, A, 2)}
\end{aligned}$$

Or $\| \hat{H}^\mu f \| \leqslant \| f \| \cdot \| \hat{H}^\mu 1 \|$ et $\hat{H}^\mu 1(x) = \hat{E}_x(e^{-\mu\hat{\zeta}}, \hat{\zeta} < \infty) \leqslant 1$.

Donc $f\hat{B}$ est de μ-potentiel borné et $\hat{H}^\mu f$ est un μ-potentiel régulier de $\hat{M}$ $\forall \mu \geqslant 0$.

Remarque. — L'hypothèse H_3 entraîne les relations suivantes :

$$\text{(I, A, 3)} \qquad \begin{aligned}
&K^\lambda - \hat{K}^\lambda = U^\lambda_B \hat{K}^\lambda \\
&U^\lambda_B \hat{H}^\lambda = \hat{H}^\lambda U^\lambda_B = U^\lambda_B - \hat{H}^\lambda \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_0 \\
&\sum_{n \geqslant 1}^\infty (\hat{H}^\lambda)^n 1(x) < \infty .
\end{aligned}$$

En effet $U^{\lambda_0}_B 1(x) < \infty$ entraîne que $U^{\lambda_0}_B 1$ est une fonction λ_0-excessive donc que $\lambda K^{\lambda + \lambda_0} U^{\lambda_0}_B 1 < U^{\lambda_0}_B 1 < \infty$.

Par suite l'équation

$$U_B^{\lambda+\lambda_0}1 - U_B^{\lambda_0}1 + \lambda K^{\lambda+\lambda_0}U_B^{\lambda_0}1 = 0$$

entraîne que

$$U_B^{\lambda+\lambda_0}1(x) < \infty \qquad \forall\lambda \geqslant 0.$$

Alors un calcul classique montre que $\forall\lambda \geqslant \lambda_0 U_B^\lambda \hat{K}^\lambda = K^\lambda - \hat{K}^\lambda$ et que $U_B^\lambda \hat{H}^\lambda = \hat{H}^\lambda U_B^\lambda = U_B^\lambda - \hat{H}^\lambda$.

De cette dernière équation on déduit que

$$(\hat{H}^\lambda)^n U_B^\lambda = U_B^\lambda - \sum_1^n (\hat{H}^\lambda)^i$$

donc

$$\sum_1^n (\hat{H}^\lambda)^i 1(x) \leqslant U_B^\lambda 1(x) < \infty \quad \forall n$$

ce qui établit la dernière relation.

B. Propriétés analytiques.

Les propriétés analytiques qu'on va démontrer maintenant ne sont pas indispensables pour la reconstruction de M à partir de $\hat{M}$, elles donnent des relations intéressantes liant les deux processus.

LEMME (B, 1). — *L'hypothèse* H_1 *entraîne l'hypothèse* H_2.

Soit $p(t) = \sup_x E_x(B_t)$. On va montrer qu'il existe t_0 et k tels que $t > t_0$ entraîne que $\dfrac{p(t)}{t} < k$.

a) $p(t)$ est borné sur $[0, a]\,\forall a$.

En effet :

$$p(2t) = \sup_x E_x(B_t + B_t \circ \theta_t) = \sup_x E_x[B_t + E_{X_t}(B_t)] \leqslant 2 \sup_x E_x(B_t).$$

Donc

$$p(2t) \leqslant 2p(t).$$

D'après H_1, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\eta > 0$ tel que $\forall t' < \eta$, $p(t') < \varepsilon$.

Soit t fixé $t \in (0, a)$, soit $t' < \eta$ et soit n le plus petit entier tel que $t \leqslant nt'$ alors $p(t) \leqslant p(nt') \leqslant np(t') \leqslant n\varepsilon$.

Comme n est borné par $\left(\frac{a}{t'}+1\right)$ ceci entraîne bien que $p(t)$ est borné.

On notera $L(a)$ une borne de $p(t)$ sur $[0, a]$.

b) Soit $\beta = \inf_{t>0} \frac{p(t)}{t} \leqslant p(1)$. Alors $\lim_{t\to\infty} \frac{p(t)}{t} = \beta$.

En effet, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a > 0$ tel que $\frac{p(a)}{a} < \beta + \varepsilon$.

Soit q tel que $qa \leqslant t < (q+1)a$ alors

$$\beta \leqslant \frac{p(t)}{t} = \frac{p(qa + t - qa)}{t} \leqslant \frac{p(qa)}{t} + \frac{p(t-qa)}{t} \leqslant \frac{p(a)}{a} + \frac{L(1)}{t}$$

qui prouve *b*.

c) Calculons alors :

$$U_B^\lambda 1(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda u} dB_u \leqslant E_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n}(B_{n+1} - B_n)\right) \leqslant E_x\left(\sum_0^\infty e^{-\lambda n} B_{n+1}\right)$$

Soit n_0 la partie entière de $t_0 + 1$.

$$U_B^\lambda 1(x) \leqslant E_x\left(\sum_0^{n_0} e^{-\lambda n} B_{n+1}\right) + E_x\left(\sum_{n_0+1}^{\infty} e^{-\lambda n} B_{n+1}\right)$$

$$\sup_x U_B^\lambda 1(x) \leqslant \sum_0^{n_0} p_{n+1} + \sum_{n_0+1}^{\infty} e^{-\lambda n}(n+1)\frac{p_{n+1}}{n+1}$$

$$\leqslant (n_0+1)L(n_0+1) + \frac{(\varepsilon+\beta)e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}\,.$$

LEMME (B, 2). — *L'hypothèse* H_3 *entraîne la réalisation de l'une ou l'autre des relations suivantes :*

α) $\| \hat{P}_t \| = 1 \qquad \forall t$.

β) $\exists k_1 > k_2 > 0$ *tels que* $e^{-k_1 t} \leqslant \| \hat{P}_t \| \leqslant e^{-k_2 t}$ *pour* t *grand.*

Soit $q(t) = \operatorname{Log} \| \hat{P}_t \|$

a) $q(t)$ est borné sur $[0, a]$ pour tout a.

Sinon il existerait une suite t_n croissant vers $t_0 < \infty$ telle que $\| \hat{P}_{t_n} \| \searrow 0$; il existerait donc $t_0 < \infty$ tel que $\| \hat{P}_{t_0} \| = \sup_x E_x(e^{-B_{t_0}}) = 0$, donc

$$B_{t_0} = \infty \; P_x ps\,; \qquad \text{or} \qquad \infty > E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda u} dB_u\right) \geqslant e^{-\lambda_0 t_0} E_x(B_{t_0})$$

b) Soit $\gamma = \inf \dfrac{q(t)}{t} \leqslant q(1) < \infty$ car $q(t+s) \leqslant q(t) + q(s)$. Comme précédemment on montre que $\gamma = \lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{q(t)}{t}$.

Or $q(t) \leqslant 0$ et $q(t)$ décroît lorsque t tend vers l'∞.

Si $\gamma = 0$ $q(t) = 0$ $\forall t$ et $\| \hat{P}_t \| = 1$.

Si $\gamma < C$, $\forall \varepsilon > 0$ pour t assez grand $\gamma - \varepsilon \leqslant \dfrac{\log \| \hat{P}_t \|}{t} \leqslant \gamma + \varepsilon$. Ce qui prouve le lemme.

Remarque. — L'hypothèse H_3 entraîne que si ξ est une mesure de référence pour M c'est aussi une mesure de référence pour $\hat{M}$ et réciproquement, si ξ est une mesure de référence pour $\hat{M}$ elle l'est pour M.

En effet

$$\xi(A) = 0 \Leftrightarrow \forall \lambda > 0 \qquad K^\lambda 1_A(x) = 0 \qquad \forall x$$

donc

$$\forall \lambda > 0 \qquad \hat{K}^\lambda 1_A(x) = 0 \qquad \forall x$$

En effet $\xi(A) > 0$ entraîne $\hat{K}^\lambda 1_A(x) > 0$ car cela entraîne que $\exists \lambda > 0$, $\exists x$ tel que $K^\lambda 1_A(x) > 0$ donc $\exists \Omega_0 \subset \Omega$, $P_x(\Omega_0) > 0$ et $0 < l\{ t ; X_t(\omega) \in A \}$ où $\omega \in \Omega_0$ et l désigne la mesure de Lebesgue sur R ; or H_3 entraîne que $e^{-B_t} > 0$ $P_x ps$ donc

$$E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t} 1_A(X_t) dt = \hat{K} 1_A(x) > 0$$

ce qui établit la première partie.

Soit maintenant ξ une mesure de référence pour $\hat{M}$.

$\xi(A) > 0$ entraîne $\exists \lambda$, $\exists x$ tels que $0 < \hat{K}^\lambda 1_A(x) \leqslant K^\lambda 1_A(x)$

$\xi(A) = 0$ entraîne $\forall x$ $P_x ps \displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t} 1_A(X_t) dt = 0$, comme $e^{-B_t} > 0$ $P_x ps$ c'est que $l(t, X_t \in A) = 0$ donc $K^\lambda 1_A(x) = 0$ $\forall x$.

THÉORÈME B, 1. — *Sous l'hypothèse* H_1 *les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *Il existe un noyau positif borné* V *de* ${}_sB_0$ *dans* ${}_sB_0$ *tel que* $\forall f \in {}_sB_0$ $Vf.T \approx fB$.

2) $\forall f \in {}_sB_0$ $\quad U_B^\lambda f \in D({}_sA)$.

3) $D({}_sA) = D({}_s\hat{A})$.

4) $\forall f \in {}_sB_0$ $\quad \hat{H}^\lambda f \in D({}_s\hat{A})$.

5) *Il existe un noyau positif borné* W *de* ${}_s\hat{B}_0$ *dans* ${}_s\hat{B}_0$ *tel que* $\forall f \in {}_s\hat{B}_0$ $\hat{H}^\lambda f = \hat{K}^\lambda W f$.

6) *Il existe* $h \in {}_sB_0$ *telle que* $\forall f \in {}_sB_0 \quad fh \in {}_sB_0$ *et* $B \approx hT$.

7) *Il existe* $h \in {}_sB_0$ *telle que* $h^2 \in {}_sB_0$ *et* $B \approx hT$. *On a de plus, si l'une de ces propositions est vraie que* ${}_sA = {}_s\tilde{A} + V \qquad V = W$

$$\forall f \in {}_s\hat{B}_0 \qquad \lambda \geqslant 0 \qquad {}_s\hat{A}\hat{H}^\lambda f = \lambda \hat{H}^\lambda f - Vf$$

On rappelle que deux fonctionnelles A et B sont équivalentes si $P_x ps\ A_t(\omega) = B_t(\omega)\ \forall t$, et que $f.A$ désigne la fonctionnelle

$$f.A(t) = \int_0^t f(X_t)dA_t,$$

f s'appelle la densité de fA par rapport à A.

Démonstration. — Dans le cours de la démonstration nous omettrons l'indice *s*. Nous donnons la démonstration qui nous a semblé la plus naturelle bien que ce ne soit pas la plus courte.

1) entraîne 2).

En effet 1) entraîne que $U_B^\lambda f = K^\lambda V f$ or $K^\lambda g \in D(A)$ si $g \in B_0$ donc $U_B^\lambda f \in D(A) \qquad \forall f \in B_0$.

2) entraîne 3).

En effet sous l'hypothèse H_1, d'après Dynkin [3, volume 1, p. 296]

$$f \in D(\hat{A}) \Leftrightarrow f + U_B^\lambda f \in D(A)$$

Or $\| P_t f - \hat{P}_t f \| \leqslant \| f \| \sup_x E_x(1 - e^{-B_t}) \leqslant \| f \| \sup_x E_x B_t$ donc sous H_1 $B_0 = \hat{B}_0$.

Alors si $f \in D(A) \subset B_0$, $U_B^\lambda f \in D(A)$ donc $f + U_B^\lambda f \in D(A)$ ce qui montre que si $f \in D(A)$, $f \in D(\hat{A})$.

A l'inverse si $f \in D(\hat{A})$, $f \in \hat{B}_0 = B_0$ donc $U_B^\lambda f = K^\lambda V f \in D(A)$, comme $f + U_B^\lambda f \in D(A)$, $f \in D(A)$.

3) entraîne 1).

Soit $D(A) = D(\hat{A}) = \{ f : f + U_B^\lambda f \in D(A) \}$ donc si $f \in D(A)$ $U_B^\lambda f \in D(A)$.

Comme K^λ est injectif de B_0 dans D(A) $\exists\ \overline{V}^\lambda$ de D(A) dans B_0 tel que $K^\lambda \overline{V}^\lambda = U_B^\lambda$; il est facile de voir que $\overline{V}^\lambda$ ne dépend pas de λ car d'après l'équation résolvante $K^\lambda \overline{V}^\mu - K^\mu \overline{V}^\mu + (\lambda - \mu)K^\lambda K^\mu \overline{V}^\mu = 0$. Soit

$$K^\lambda \overline{V}^\mu - U_B^\mu + (\lambda - \mu)K^\lambda U_B^\mu = 0 \quad \text{or} \quad U_B^\lambda - U_B^\mu + (\lambda - \mu)K^\lambda U_B^\mu = 0$$

donc

$$K^\lambda \overline{V}^\mu = U_B^\lambda = K^\lambda \overline{V}^\lambda,$$

K^λ étant injectif $\overline{V}^\mu = \overline{V}^\lambda$.

On pose alors $\overline{V} = \overline{V}^\mu$, $\overline{V}$ est positif car $\lambda U_B^\lambda f = \lambda K^\lambda \overline{V} f \to \overline{V} f$ quand $\lambda \to +\infty$, $\overline{V}$ est borné car $1 \in D(A)$ puisque M est conservatif donc $\| \lambda U_B^\lambda 1 - \overline{V} 1 \| \to 0$ quand $\lambda \to \infty$ et λU_B^λ est borné.

Comme D(A) est dense dans B_0 on peut étendre l'opérateur positif borné $\overline{V}$ à $\overline{D(A)} = B_0$ on obtient ainsi l'opérateur V.

La fonctionnelle $Vf.T$ est continue puisque V est un noyau borné $U_B^\lambda f = K^\lambda V f$ exprime alors que $f.B \approx Vf.T$.

1) entraîne 4).

En effet

$$\text{(I, A, 2)} \qquad \hat{H}^\lambda f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t} f(X_t) dB_t$$

comme $fB \approx VfT$ $\hat{H}^\lambda f(x) = \hat{K}^\lambda V f(x)$ $\forall f \in \hat{B}_0$ car

$$\hat{H} f(x) = E_x\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t} V f(X_t) dt \right)$$

Donc $\hat{H} f \in D(\hat{A})$ $\forall f \in \hat{B}_0$, sous l'hypothèse H_1. $B_0 = \hat{B}_0$ ce qui entraîne 4).

4) entraîne 5).

C'est la même démonstration que celle de 3) entraîne 1) en utilisant l'injectivité de $\hat{K}^\lambda$ on définit W positif borné indépendant de λ par $H^\lambda f = \hat{K}^\lambda W f$ $\forall f \in \hat{B}_0$.

5) entraîne 2).

Comme $B_0 = \hat{B}_0$ sous l'hypothèse H_1 on peut appliquer à f les équations (I, A, 3)

$$U_B^\lambda f = U_B^\lambda \hat{H}^\lambda f + \hat{H}^\lambda f$$
$$K^\lambda f - \hat{K}^\lambda f = U_B^\lambda \hat{K}^\lambda f$$

$H^\lambda f = \hat{K}^\lambda W f$ entraîne alors que

$$U_B^\lambda f = U_B^\lambda \hat{K}^\lambda W f + \hat{K}^\lambda W f = K^\lambda W f - \hat{K}^\lambda W f + \hat{K}^\lambda W f$$

$$U_B^\lambda f = K^\lambda W f \in D(A).$$

6) entraîne 1).

De manière évidente.

1) entraîne 6).

Soit $h = V1 \in B_0$, il faut montrer que $Vf(x) = f(x).V1(x)$. Soit $f \in B_0$ on va montrer que $AU_B^\lambda f = \lambda U_B^\lambda f - fV1$, comme $U_B^\lambda = K^\lambda V$ et que

$AK^\lambda Vf = \lambda K^\lambda Vf - Vf$ ces deux relations entraîneront que $Vf = fV1$.

Or

$$\frac{P_t(U_B^\lambda f)(x) - U_B^\lambda f(x)}{t} = E_x\left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{t} \int_t^\infty e^{-\lambda u} f(X_u) dB_u\right)$$
$$- E_x\left(\int_0^t e^{-\lambda u} \frac{f(X_u)}{t} dB_u\right)$$

Quand t tend vers zéro le deuxième terme qui vaut

$$E_x \int_0^t e^{-\lambda u} \frac{f(X_u)}{t} V1(X_u) du$$

tend vers $V1(x)f(x)$ car $V1$ et f sont continues à droite sur les trajectoires. Le premier terme est majoré par

$$\frac{e^{\lambda t} - 1}{t} \int_0^\infty e^{-\lambda u} f(X_u) dB_u$$

on peut donc appliquer le théorème de Lebesgue et

$$E_x\left(\frac{e^{\lambda t} - 1}{t} \int_t^\infty e^{-\lambda u} f(X_u) dB_u\right)$$

tend vers $\lambda U_B^\lambda f(x)$.

Ainsi la limite ponctuelle de $\dfrac{P_t U_B^\lambda f - U_B^\lambda f}{t}$ existe et est égale à $\lambda U_B^\lambda f(x) - f(x)V1(x)$, comme par ailleurs la limite forte existe et est égale à $AU_B^\lambda f$ la relation est établie.

6) est équivalent à 7).

Cette équivalence est démontrée dans l'article de Nelson [*6*]. Il reste à démontrer que les dernières relations sont vraies si l'une quelconque des sept propositions est réalisée.

En cours de démonstration nous avons montré que $V = W$, dès lors d'après Dynkin [3, p. 298] nous avons $A = \hat{A} + V$. Nous allons utiliser le fait que $\hat{H}^\lambda = \hat{K}^\lambda V$ pour établir que $\hat{A}\hat{H}^\lambda f = \lambda \hat{H}^\lambda f - Vf$. La relation (I, A, 1) s'écrit pour $\mu = 0$ $\hat{H}^\lambda - \hat{H}^0 + \lambda \hat{K}^\lambda \hat{H}^0 = 0$, comme $\|\hat{H}^\lambda\| \to 0$ quand λ croit vers l'∞ $\hat{H}^0 f \in B_0$ et la relation précédente montre aussi que $\forall f \in B_0$ $\hat{H}^0 f \in D(A)$. On peut alors écrire

$$\hat{A}\hat{H}^0 f = \hat{A}\hat{H}^\lambda f + \lambda \hat{A}\hat{K}^\lambda \hat{H}^0 f = \lambda \hat{H}^\lambda f - Vf + \lambda^2 \hat{K}^\lambda \hat{H}^0 f - \lambda \hat{H}^0 f.$$

Donc $\hat{A}\hat{H}^0 f = -Vf$; on peut alors écrire la relation (I, A, 1) sous la forme suivante $\hat{A}\hat{H}^\lambda f + Vf + \lambda \hat{A}\hat{K}^\lambda \hat{H}^0 f = \hat{A}\hat{H}^\lambda f + Vf - \lambda \hat{H} f = 0$.

Nous pouvons énoncer un théorème presque analogue au précédent en remplaçant les limites fortes par les limites faibles.

THÉORÈME B, 2. — *Sous l'hypothèse* H_3 *les propositions suivantes sont équivalentes :*

1) *il existe un noyau positif* V *de* ${}_{W}B_0$ *dans* ${}_{W}B_0$ *tel que* $fB \approx f.V1.T$. *En particulier si* $1 \in D({}_{W}A)$ $V1 \in {}_{W}B_0$,

2) $f \in {}_{W}B_0$ $U_B^{\lambda} f \in D({}_{W}A)$,

3) $D({}_{W}\hat{A}) = D({}_{W}A)$,

4) $\forall f \in {}_{W}B_0$ $\hat{H}^{\lambda} f \in D({}_{W}\hat{A})$

5) *il existe un noyau* W *positif fini de* ${}_{W}\hat{B}_0$ *dans* ${}_{W}\hat{B}_0$ *tel que* $\hat{H}^{\lambda} f = \hat{K}^{\lambda} W f$.

Démonstration. — On remarque d'abord que l'hypothèse H_3 entraîne que ${}_{W}B_0 = {}_{W}\hat{B}_0$. On vérifie d'abord facilement que

$$U_B^{\lambda} 1(x) = \lambda \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} E_x(B_t) dt$$

donc $E_x(B_t)$ est fini pour presque tout t, comme c'est une fonction continue et croissante elle est finie, or

$$P_t f(x) - \hat{P}_t f(x) \leqslant \| f \| E_x(1 - e^{-B_t}) \leqslant \| f \| E_x(B_t)$$

d'après le théorème de limite monotone, $E_x(B_t) < \infty$ et B_t décroît vers zéro si $t \to 0$ donc $P_t f(x) - \hat{P}_t f(x) \to 0$ si t tend vers 0.

1) entraîne 2), 2) entraîne 3).

On démontre comme dans le théorème B, 1 que $1 \Rightarrow 2$ et $2 \Rightarrow 3$ en utilisant la remarque de Dynkin [3] que

$$D({}_{W}\hat{A}) = \{ f \,;\, f + U_B^{\lambda} f \in D({}_{W}A) \}.$$

3) entraîne 1).

D'après la même remarque $D({}_{W}A) = D({}_{W}\hat{A})$ implique que $\forall f \in D({}_{W}A)$ $U_B^{\lambda} f \in D({}_{W}A)$; K^{λ} étant injectif de ${}_{W}B_0$ dans $D({}_{W}A)$ il existe $\overline{V}$ de $D({}_{W}A)$ dans ${}_{w}B_0$ tel que $K^{\lambda}\overline{V}f = U^{\lambda} f$ pour tout $f \in D({}_{w}A)$.

Comme dans B, 1 on montre que $\overline{V}$ ne dépend pas de λ soit V, qu'il est positif car $0 \leqslant \lambda K^{\lambda} V f = \lambda U^{\lambda} f$ converge vers Vf si λ tend vers ∞. Par ailleurs $1 \in D({}_{W}A)$ entraîne que $K^{\lambda} V1 = U_B^{\lambda} 1$ et aussi que $V1 \in {}_{W}B_0$ donc est borné. $V1.T$ est donc continue et $P_x ps$ finie donc $V1.T \approx B$.

Montrons maintenant que $\forall f \in D({}_{W}\hat{A})$ $fV1 \in {}_{W}B_0$

$$| E_x[f(X_t)V1(X_t) - f(x)V1(x)] | \leqslant | E_x[V1(X_t)(f(X_t) - f(X_0))] | + | f(x).E_x[V1(X_t) - V1(X_0)] |.$$

Puisque $V1 \in {}_{W}B_0$ le deuxième terme tend vers zéro avec t. Le premier terme tend aussi vers 0 d'après le théorème de Lebesgue puisque f et V1 sont bornées et que $f \in D({}_WA)$ est presque sûrement continue à droite sur les trajectoires; alors $fV1 \in {}_WB_0$.

Il reste à montrer que $gB \approx gV1.T$ $\forall g \in {}_WB_0$. Soit $g_n \in D({}_WA)$ telle que $g_n = \lambda_n K^{\lambda_n} g \to g$ ($D({}_WA)$ est dense dans ${}_WB_0$) de plus

$$\| g_n \| \leqslant \| g \| \quad \| \lambda_n K^{\lambda_n} 1 \| = \| g \|.$$

Alors d'après le théorème de Lebesgue $K^\lambda(g_n V1) \to K^\lambda(gV1)$ et $U^\lambda_B g_n \to U^\lambda_B g$, comme $K^\lambda(g_n V1) = U^\lambda_B g_n$ d'après la première partie de la démonstration on obtient que $U^\lambda_B g = K^\lambda(gV1)$; montrons maintenant que ces fonctions appartiennent à $D({}_WA)$; en effet $g_n V1 \in {}_WB_0$ donc

$${}_wAK^\lambda(g_n V1) = \lambda K^\lambda(g_n V1) - g_n V1$$

qui converge vers $\lambda K^\lambda(gV1) - gV1$, comme ${}_WA$ est fermé $K^\lambda(gV1) \in D({}_WA)$ et ${}_WAK^\lambda(gV1) = \lambda U^\lambda_B g - gV1$. Alors $gV1 \in {}_WB_0$ car ${}_WAK^\lambda(gV1)$ et

$$\lambda U^\lambda_B g \in {}_WB_0.$$

Ainsi $gB \approx gV1.T$ et $\forall g \in {}_WB_0$ $gV1 \in {}_WB_0$.

1) entraîne 4).

Se démontre comme précédemment.

4) entraîne 5).

On montre comme précédemment qu'il existe un noyau W positif de ${}_W\hat{B}_0$ dans ${}_W\hat{B}_0$ tel que $\hat{H}^\lambda f = \hat{K}^\lambda W f$ $\forall f \in {}_W\hat{B}_0$, comme $1 \in {}_WB_0$ et que ${}_WB_0 = {}_W\hat{B}_0$ $W1 = {}_W\hat{B}_0$ donc W1 est borné.

5) entraîne 2).

La démonstration est identique à celle du théorème B, 1.

Système de Lévy du processus tué

Nous allons maintenant décrire le système de Lévy du processus tué, Nous supposons que le processus M a une mesure de référence ξ. Alors d'après la remarque p. 208 ξ est une mesure de référence pour $\hat{M}$. M et $\hat{M}$ admettent chacun un système de Lévy que nous notons respectivement (P, L) et ($\hat{P}$, $\hat{L}$) où L (resp. $\hat{L}$) est une fonctionnelle additive continue pour M (resp. $\hat{M}$) et $P(x, dy)$ [resp. $\hat{P}$] un noyau sur $E \times E$ tel que $P(x, \{x\}) = 0$. Alors (P, L) est le système de Lévy de M signifie que $\forall f \in B(E \times E)$, $f(x, x) = 0$, $\forall t$.

$$\text{(I, B, 1)} \qquad E_x\Big(\sum_{s \leqslant t} f(X_{s^-}, X_s)\Big) = E_x\Big(\int_0^t Pf(X_s)\,dL_s\Big)$$

avec

$$\mathrm{P}f(x) = \int \mathrm{P}(x, dy) f(x, y) .$$

La relation (I, B, 1) est équivalente à la relation suivante :

$$\mathrm{E}_x\left[\sum_{t>0} e^{-\lambda t} f(\mathrm{X}_{t^-}, \mathrm{X}_t)\right] = \mathrm{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{P}f(\mathrm{X}_t) d\mathrm{L}_t\right] .$$

On pourra trouver des détails dans Motoo [*5*, p. 79].
Nous conviendrons de noter

$$\Phi^\lambda f(x) = \mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathrm{P}f(\mathrm{X}_t) d\mathrm{L}_t$$

$$\hat{\Phi} f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t} \hat{\mathrm{P}} f(\mathrm{X}_t) d\hat{\mathrm{L}}_t .$$

Proposition B, 3 :

a) $$\hat{\Phi}^\lambda f(x) = \mathrm{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t - \mathrm{B}_t} \mathrm{P}f(\mathrm{X}_t) d\mathrm{L}_t$$

b) $$\forall f \in \mathrm{B}(\mathrm{E} \times \mathrm{E}),\ f(x, x) = 0 \quad \mathrm{P}f \mathrm{L}_{t\wedge\lambda}(\omega) \approx \hat{\mathrm{P}} f \hat{\mathrm{L}}_t(\omega, \lambda)$$

c) $$\Phi^\lambda f(x) = \hat{\Phi}^\lambda f(x) + \hat{\mathrm{H}}^\lambda \Phi^\lambda f(x) .$$

Démonstration

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi}^\mu f(x) &= \hat{\mathrm{E}}_x\left[\sum_{s>0} e^{-\mu s} f(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_s)\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\int_0^\infty \sum_{s>0} \alpha_\omega(d\lambda) e^{-\mu s} f(\hat{\mathrm{X}}_{s^-}(\omega, \lambda), \hat{\mathrm{X}}_s(\omega, \lambda))\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\int_0^\infty \sum_{s<\lambda} \alpha_\omega(d\lambda) e^{-\mu s} f(\mathrm{X}_{s^-}(\omega), \mathrm{X}_s(\omega))\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\sum_{s>0} e^{-\mu s} f(\mathrm{X}_{s^-}(\omega), \mathrm{X}_s(\omega)) \int_s^\infty \alpha_\omega(d\lambda)\right] = \mathrm{E}_x\left[\sum_{s>0} e^{-\mathrm{B}_s - \mu s} f(\mathrm{X}_{s^-}, \mathrm{X}_s)\right] \\
&= \mathrm{E}_x\left[\int_0^\zeta e^{-\mathrm{B}_s - \mu s} \mathrm{P}f(\mathrm{X}_s) d\mathrm{L}_s\right]
\end{aligned}$$

d'après Motoo [*5*, *1*] ce qui établit *a*).

Pour établir *b*) posons $\hat{L}_t^1(\omega, \lambda) = L_{t\wedge\lambda}(\omega)$

$$\hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\mu s}Pf(X_s)d\hat{L}_t^1\right] = E_x\left[\int_0^\infty \alpha_\omega(d\lambda)\int_0^\infty e^{-\mu s}Pf(\hat{X}_s(\omega,\lambda)d\hat{L}_t^1(\omega,\lambda)\right]$$
$$= E_x\int_0^\infty \alpha_\omega(d\lambda)\int_0^\lambda e^{-\mu s}Pf(X_s(\omega))dL_t(\omega)$$
$$= E_x\int_0^\alpha e^{-\mu s - B_s}Pf(X_s)dL_t = \hat{\Phi}^\mu f(x)\,.$$

Calculons pour établir *c*) l'expression $\hat{H}^\lambda\Phi^\lambda f(x)$

$$\hat{H}^\lambda\Phi^\lambda f(x) = E_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t - B_t}dB_t\, EX_t\int_0^\infty e^{-\lambda s}Pf(X_s)dL_s\right]$$
$$= E_x\left[\int_0^\infty e^{-B_t}dB_t\int_t^\infty e^{-\lambda s}Pf(X_s)dB_s\right]$$
$$= \Phi^\lambda f(x) - \hat{\Phi}^\lambda f(x)\,.$$

Deuxième partie

RECONSTRUCTION DU PROCESSUS M

Hypothèses

E est un espace localement compact dénombrable à l'infini, δ est son point de compactification (si E est compact δ est isolé).

$\hat{M}(\Omega, \hat{F}, \hat{F}_t, \hat{X}_t, \hat{P}_x)$ est un processus standard de semi-groupe $\hat{P}_t$, de résolvante $\hat{K}^\lambda$ et de durée de vie $\hat{\zeta}$.

Nous faisons l'hypothèse $\hat{H}_1$: $\hat{X}_{\hat{\zeta}-}$ existe et appartient à E presque surement sur l'ensemble $(\hat{\zeta} < \infty)$.

Nous définissons comme dans la première partie, avec la même convention de notation, l'opérateur $\hat{H}^\lambda$ défini sur B(E) par

$$\hat{H}^\lambda f(x) = \hat{E}_x(e^{-\lambda\zeta}f(X_{\zeta}-)\,;\ \zeta < \infty).$$

Propriétés de $\hat{H}^\lambda$

(II, 1) *a*) $\hat{H}^\lambda - \hat{H}^\mu + (\lambda - \mu)\hat{K}^\lambda\hat{H}^\mu = 0$ [cf. Première partie].

b) $\hat{\zeta} > 0$ $\hat{P}_x ps$ entraîne que quand $\lambda \to \infty$, pour toute $f \in B(E)$ $\hat{H}^\lambda f(x)$ décroît vers zéro $\forall x$.

c) Si $\hat{X}_{\zeta^-}$ existe il y a équivalence entre les deux propositions suivantes :

$$\hat{X}_{\zeta^-} \in E \qquad \text{et} \qquad \hat{H}^\lambda 1 = 1 - \lambda \hat{K}^\lambda 1 .$$

En effet :

$$\lambda \hat{K}^\lambda 1(x) = \hat{E}_x(1 - e^{-\lambda\zeta}) = 1 - \hat{E}_x(e^{-\lambda\zeta} ; \zeta < \infty)$$

et $(\hat{X}_{\zeta^-} \in E)$ est équivalent à $\hat{H}^\lambda 1(x) = \hat{E}_x(e^{-\lambda\zeta} ; \zeta < \infty)$.

d) $\hat{H}^\lambda f(x)$ est λ-excessive pour $\hat{P}_t$.

En effet $\hat{P}_t^\lambda \hat{H}^\lambda f(x) = \hat{E}_x(e^{-\lambda\zeta} f(X_{\zeta^-}) ; t < \zeta < \infty)$ qui croît, quand t décroît vers zéro, vers $H^\lambda f(x)$.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Soit* $\hat{M}$ *un processus standard tel que* $\hat{X}_{\zeta^-} \in E$, *pour que* $\hat{M}$ *soit équivalent au processus tué d'un processus de Hunt* M *conservatif par une fonctionnelle additive continue de* λ_0*-potentiel fini il faut et il suffit que*

1) $\hat{H}^{\lambda_0} 1$ *soit un potentiel régulier* (*pour* $\hat{M}$)

2) $\displaystyle\sum_{n \geq 1} (\hat{H}^{\lambda_0})^n 1(x) < \infty.$

On rappelle que $\hat{H}^\lambda 1 = 1 - \lambda \hat{K}^\lambda 1$.

Remarques :

a) la condition nécessaire a été démontrée dans la première partie,

b) de l'équation $\hat{H}^0 1(x) = \hat{H}^{\lambda_0} 1(x) + \lambda_0 \hat{K}^{\lambda_0} \hat{H}^0 1(x)$ on déduit que si $\hat{H}^{\lambda_0} 1$ est un potentiel régulier $\hat{H}^0 1$ est aussi un potentiel régulier.

Nous démontrons maintenant le théorème II en plusieurs étapes, nous supposons donc désormais réalisées les hypothèses du théorème II.

A. Construction d'une fonctionnelle additive qui caractérise la disparition.

LEMME A, 1. — *Il existe une fonctionnelle additive continue* $\hat{B}$ *de* $\hat{M}$ *telle que :*

$$\forall f \in B(E) \quad \hat{H}^0 f(x) = U_{\hat{B}} f(x)$$

et

$$\hat{E}_x\left[\int_0^t f(X_s) d\hat{B}_s \right] = \hat{E}_x[f(X_{\zeta^-}) ; \zeta \leq t]$$

Alors $\hat{H}^\lambda f(x) = U_{\hat{B}}^\lambda f(x)$.

Démonstration. — Puisque $\hat{H}^0 1$ est un potentiel régulier il existe une fonctionnelle additive continue $\hat{B}$ de $\hat{M}$ telle que $\hat{H}^0 1(x) = \hat{E}_x(\hat{B}_\infty) = U_{\hat{B}} 1(x)$. On a alors $\hat{E}_x(\hat{B}_t) = U_{\hat{B}} 1 - \hat{P}_t U_{\hat{B}} 1 = \hat{H}^0 1 - \hat{P}_t \hat{H}^0 1 = \hat{E}_x(\zeta \leqslant t)$.

Montrons que $\forall f \in B(E)$ $\hat{H}^0 f = U_{\hat{B}} f(x)$.

Soit g une fonction bornée continue sur E.

D'après les propriétés de l'intégrale de Stieltjes et Blumenthal et Getoor [*2*, p. 150] on peut écrire :

$$\hat{E}_x\left[\int_0^t g(X_s) d\hat{B}_s\right] = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{E}_x\, g(X_{\frac{kt}{n}}) \hat{E}_{X_{\frac{kt}{n}}}(\hat{B}_t)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \hat{E}_x\left[g(X_{\frac{kt}{n}}) \frac{kt}{n} < \zeta \leqslant \frac{(k+1)t}{n}\right].$$

Soit $k(n, \omega)$ l'unique entier tel que

$$k(n, \omega)\frac{t}{n} < \hat{\zeta}(\omega) \leqslant (k(n, \omega) + 1)\frac{t}{n}.$$

Alors

$$\hat{E}_x\left(\int_0^t g(X_s) d\hat{B}_s\right) = \lim_{n \to \infty} \hat{E}_x(g(X_{k(n,\omega)\frac{t}{n}})\,;\; k(n, \omega)\frac{t}{n} < \zeta(\omega) \leqslant (k(n, \omega) + 1)\frac{t}{n}.$$

Comme g est continue et que $\dfrac{k(n, \omega)t}{n}$ croît vers $\hat{\zeta}$ quand $n \to \infty$ avec $0 < \hat{\zeta}(\omega) - k(n, \omega)\frac{t}{n} \leqslant \frac{t}{n}$ la fonction dont nous prenons l'espérance converge vers $g(\hat{X}_{\hat{\zeta}^-}) 1_{\hat{\zeta} \leqslant t}$. Comme g est bornée on peut appliquer le théorème de Lebesgue et

$$\hat{E}_x\left[\int_0^t g(X_s) d\hat{B}_s\right] = \hat{E}_x[g(X_{\zeta^-})\,;\; \zeta \leqslant t].$$

Les deux fonctions dont on prend l'espérance sont croissantes en t et ont respectivement pour limite

$$\int_0^\infty g(X_s) d\hat{B}_s \qquad \text{et} \qquad g(\hat{X}_{\hat{\zeta}^-}) 1_{\hat{\zeta} < \infty}.$$

Comme

$$\hat{E}_x\left[\int_0^\infty g(X_s) d\hat{B}_s\right] \leqslant \| g \| \, \hat{H}^0 1(x) < \infty$$

on peut écrire

$$\hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^\infty g(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right] = \hat{\mathrm{E}}_x[g(\mathrm{X}_{\zeta^-})\,;\ \zeta < \infty]$$

ce qui établit le lemme pour g continue bornée, les deux noyaux $\mathrm{U}_{\hat{\mathrm{B}}}$ et $\hat{\mathrm{H}}^0$ coïncidant sur les fonctions continues bornées coïncident sur tous les éléments de B(E) ce qui établit le lemme.

On établit la dernière relation très facilement de la façon suivante. On vérifie d'abord que $\hat{\mathrm{H}}^\lambda f(x) = \hat{\mathrm{H}}^0 f(x) - \lambda\hat{\mathrm{K}}^\lambda\hat{\mathrm{H}}^0 f(x)$ car

$$\lambda\hat{\mathrm{K}}^\lambda\hat{\mathrm{H}}^0 f(x) = \lambda\hat{\mathrm{E}}_x\int_0^\zeta e^{-\lambda t}\hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{X}_t}[f(\mathrm{X}_{\zeta^-}), \zeta < \infty] = \lambda\hat{\mathrm{E}}_x(f(\mathrm{X}_{\zeta^-}), \zeta < \infty)\int_0^\zeta e^{-\lambda t}dt$$
$$= \hat{\mathrm{H}}^0 f(x) - \hat{\mathrm{H}}^\lambda f(x)$$

la définition de $\hat{\mathrm{B}}$ entraîne alors que $\hat{\mathrm{H}}^\lambda f(x) = \mathrm{U}_{\hat{\mathrm{B}}}f(x) - \lambda\hat{\mathrm{K}}^\lambda\mathrm{U}_{\hat{\mathrm{B}}}f(x)$. Cette dernière expression est égale à $\mathrm{U}^\lambda_{\hat{\mathrm{B}}}f(x)$.

B. Construction du semi-groupe P_t.

LEMME B, 1. — *Soit* P_t^n *la suite définie par la récurrence suivante sur* B(E)

$$\mathrm{P}_t^0 f(x) = \hat{\mathrm{P}}_t f(x)\,;\ \mathrm{P}_t^n f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \mathrm{P}_{t-s}^{n-1}f(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right].$$

Soit
$$\mathrm{P}_t f(x) = \sum_{n\geq 0}\mathrm{P}_t^n f(x).$$

Alors $\mathrm{P}_t 1(x) \leqslant 1\ \forall x$ *et* $\mathrm{P}_t f(x) - \hat{\mathrm{P}}_t f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \mathrm{P}_{t-s}f(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right]$

Démonstration. — On remarque que

$$\mathrm{P}_t^1 1(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \hat{\mathrm{P}}_{t-s}1(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right] \leqslant \hat{\mathrm{E}}_x(\hat{\mathrm{B}}_t) = \hat{\mathrm{E}}_x(\zeta \leqslant t) = 1 - \hat{\mathrm{P}}_t 1(x).$$

Nous allons montrer alors par récurrence que

$$\mathrm{P}_t^n 1(x) \leqslant 1 - \sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{P}_t^i 1(x)$$

Supposons le vrai pour n, alors :

$$\mathrm{P}_t^{n+1}1(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \mathrm{P}_{t-s}^n 1(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right] \leqslant \mathrm{E}_x\left[\int_0^t \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{P}_{t-s}^i 1(\mathrm{X}_s)\right)d\hat{\mathrm{B}}_s\right]$$

$$\leqslant \hat{\mathrm{E}}_x(\hat{\mathrm{B}}_t) - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_t^i 1(x) = 1 - \sum_{i=0}^{n} \mathrm{P}_t^i 1(x).$$

Par suite $\forall \mathrm{N} \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{P}_t^n 1(x) \leqslant 1$ donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_t^n 1(x) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{P}_t^n f(x) \leqslant f \qquad \forall f \in \mathrm{B}^+(\mathrm{E}),$$

ainsi $P_t f$ est borné et comme

$$\mathrm{P}_t^n f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \mathrm{P}_{t-s}^{n-1} f(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right]$$

pour tout n

$$\mathrm{P}_t f(x) - \hat{\mathrm{P}}_t f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \mathrm{P}_{t-s} f(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right].$$

LEMME B, 2. — $\mathrm{P}_t f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x(f(\mathrm{X}_t)e^{\hat{\mathrm{B}}_t})$ *et* P_t *est un semi-groupe sur* B(E).

Démonstration. — On remarque d'abord que

$$\mathrm{P}_t^1 f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \hat{\mathrm{P}}_{t-s} f(\mathrm{X}_s)d\hat{\mathrm{B}}_s\right] = \hat{\mathrm{E}}_x[f(\mathrm{X}_t)\hat{\mathrm{B}}_t].$$

On fait pour cela un calcul analogue à celui du lemme A, 1. Montrons alors par récurrence que

$$\mathrm{P}_t^n f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[f(\mathrm{X}_t)\frac{(\hat{\mathrm{B}}_t)^n}{n!}\right].$$

Si ceci est vrai pour n

$$\mathrm{P}_t^{n+1} f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x\left[\int_0^t \hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{X}_s}\left(f(\mathrm{X}_{t-s})\frac{(\hat{\mathrm{B}}_{t-s})^n}{n!}\right)d\hat{\mathrm{B}}_s\right]$$

$$= \hat{\mathrm{E}}_x\left[f(\mathrm{X}_t)\int_0^t \frac{(\hat{\mathrm{B}}_t - \hat{\mathrm{B}}_s)^n}{n!}d\hat{\mathrm{B}}_s\right] = \hat{\mathrm{E}}_x\left[f(\mathrm{X}_t)\frac{(\hat{\mathrm{B}}_t)^{n+1}}{(n+1)!}\right].$$

Alors par le théorème de convergence monotone

$$P_t f(x) = \sum_{n \geq 0} P_t^n f(x) = \sum_{n \geq 0} \hat{E}_x\left[f(X_t) \frac{(\hat{B}_t)^n}{n!} \right] = \hat{E}_x(f(X_t)e^{B_t}).$$

Il est alors facile de vérifier que P_t est un semi-groupe, en effet :

$$P_t(P_s f)(x) = \hat{E}_x[e^{\hat{B}_t}\hat{E}_{X_t}(f(X_s)e^{\hat{B}_s})] = \hat{E}_x(f(X_{s+t})e^{B_{s+t}}) = P_{t+s}f(x).$$

LEMME B, 3. — *Soit* K^λ *la résolvante de* P_t

$$K^\lambda - \hat{K}^\lambda = \hat{H}^\lambda K^\lambda \qquad et \qquad \lambda K^\lambda 1 = 1$$

ce qui prouve que P_t *est conservatif.*

Démonstration. — La première relation résulte de

$$P_t f(x) - \hat{P}_t f(x) = \hat{E}_x\left[\int_0^t P_{t-s} f(X_s) d\hat{B}_s \right].$$

En effet

$$\begin{aligned} K^\lambda f(x) - \hat{K}^\lambda f(x) &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \int_0^t P_{t-s} f(X_s) d\hat{B}_s \right] \\ &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty d\hat{B}_s \int_s^\infty e^{-\lambda t} P_{t-s} f(X_s) dt \right] \\ &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s} K^\lambda f(X_s) d\hat{B}_s \right] = U_{\hat{B}}^\lambda K^\lambda f(x) = \hat{H}^\lambda K^\lambda f(x) \end{aligned}$$

Car $U_{\hat{B}}^\lambda f = \hat{H}^\lambda f$ d'après le lemme A, 1.

Calculons maintenant $\lambda K^\lambda 1 = \lambda \hat{H}^\lambda K^\lambda 1 + \lambda \hat{K}^\lambda 1 = \lambda \hat{H}^\lambda K^\lambda 1 + 1 - \hat{H}^\lambda 1$ car $\hat{H}^\lambda 1 = 1 - \lambda \hat{K}^\lambda 1$ (II, 1, *c*, 216).

Soit $\hat{H}^\lambda(\lambda K^\lambda 1 - 1) = \lambda K^\lambda 1 - 1$, il suffit alors de vérifier que si $\hat{H}^\lambda f = f$ $f = 0$ ce qui résulte immédiatement du fait que

$$|\Sigma(\hat{H}^\lambda)^n f(x)| \leqslant \| f \| \Sigma(\hat{H}^\lambda)^n 1 < \infty \qquad \forall \lambda \geqslant \lambda_0.$$

Comme $K^\lambda 1 - K^\mu 1 + (\lambda - \mu)K^\mu K^\lambda 1 = 0$ si $\lambda \geqslant \lambda_0$ on obtient que $1 - \lambda K^\mu 1 + \lambda K^\mu 1 - \mu K^\mu 1 = 0$ $\forall \mu$ donc que $\mu K^\mu 1 = 1$ $\forall \mu > 0$.

C. Construction d'une réalisation continue à droite du semi-groupe P_t.

Suivant la méthode de P. A. Meyer [*4*, 3, p. 86 à 99], nous construisons un processus M_1 sur $\bar{\Omega} = \Omega^N$ prolongeant $\hat{M}$.

Pour cela nous posons :

$$X_t(\bar{\omega}) = X_t(\omega_1, \omega_2, \ldots) = \begin{cases} \hat{X}_t(\omega_1) & \text{si} \quad t < \hat{\zeta}(\omega_1) \\ \hat{X}_{t-\sum_{i=1}^{p}\hat{\zeta}(\omega_i)}(\omega_{p+1}) & \text{si} \quad \sum_{i=1}^{p}\hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t < \sum_{i=1}^{p+1}\hat{\zeta}(\omega_i) \\ \delta & \text{si} \quad t \geqslant \sum_{i>1}\hat{\zeta}(\omega_i) \end{cases}$$

On trouvera dans l'article de Meyer la définition des tribus F_t adaptées à $X_t(\bar{\omega})$ et des probabilités dont on munit $\bar{\Omega}$, nous rappellons comment on obtient ces probabilités en considérant le noyau suivant :

$$F(\omega) = \begin{cases} \varepsilon_{\hat{X}_{\hat{\zeta}^-(\omega)}} & \text{si} \quad \hat{\zeta}(\omega) < \infty \\ \varepsilon_\delta & \text{sinon.} \end{cases} \qquad (\varepsilon \text{ est la masse de Dirac})$$

Le théorème de Ionescu Tulcea permet alors de définir l'espérance d'une fonction de $\bar{\omega}$ si on sait définir l'espérance d'une fonction $f(\omega_1, \ldots, \omega_p)$ ne dépendant que de p variables, p quelconque, ce que l'on fait par récurrence :

Si $f(\bar{\omega}) = f'(\omega_1)$ on pose $\bar{E}^\mu(f) = \hat{E}^\mu(f')$

Si $f(\bar{\omega}) = f'(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ on pose $\bar{E}^\mu(f) = \bar{E}^\mu(g)$

où

$$g(\omega) = \int f'(\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega) d\bar{P}^{F(\omega_{n-1},\,)}(\omega).$$

On démontre que $(\bar{\Omega}, \bar{F}, \bar{F}_t, \bar{P}^\mu)$ est un processus standard.

Proposition C, 1. — *Le processus* M_1 *admet* P_t *comme semi-groupe de transition. Ce qui entraîne que c'est un processus de Hunt.*

Démonstration. — Soit $f \in B^+(E)$ il faut calculer $\bar{E}_x f(X_t(\bar{\omega}))$.

D'après la définition de $X_t(\omega)$ on peut écrire :

$$\bar{E}_x\{ f[X_t(\bar{\omega})] \} = \sum_{n \geqslant 1} \bar{E}_x\left[f(X_t(\bar{\omega})) ; \sum_{1}^{n} \hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t < \sum_{1}^{n+1} \hat{\zeta}(\omega_i) \right].$$

Nous calculons séparément chacun des termes de cette somme le premier est égal à $\hat{P}_t f(x)$, nous allons démontrer par récurrence que

$$\bar{E}_x\left[f(X_t(\varpi))\,;\ \sum_1^n \hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t < \sum_1^{n+1} \hat{\zeta}(\omega_i)\right] = P_t^n f(x).$$

Nous supposons donc que cette relation est vraie jusqu'à l'indice n. Alors

$$\bar{E}_x\left[f(X_t(\varpi))\,;\ \sum_1^{n+1} \hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t < \sum_1^{n+2} \hat{\zeta}(\omega_i)\right] = \hat{E}_x\left\{ t \geqslant \hat{\zeta}(\omega_1)\,;\right.$$

$$\left.\bar{E}_{\hat{X}_{\hat{\zeta}^-(\omega_1)}}\left[f\Big(X_{t-\sum_1^{n+1}\hat{\zeta}(\omega_i)}(\omega_{n+1})\Big)\,;\ \sum_2^{n+1} \hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t - \hat{\zeta}(\omega_1) < \sum_2^{n+2} \hat{\zeta}(\omega_i)\right]\right\}$$

ω_1 étant fixé l'hypothèse de récurrence entraîne que

$$\bar{E}_{\bar{X}_{\zeta(\omega_1)}}\left[f\Big(X_{t-\sum_1^{n+1}\hat{\zeta}(\omega_i)}(\omega_{n+1})\Big)\,;\ \sum_2^{n+1} \hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t - \hat{\zeta}(\omega_1) < \sum_2^{n+2} \hat{\zeta}(\omega_i)\right]$$

$$= P^n_{t-\hat{\zeta}(\omega_i)} f(\hat{X}_{\hat{\zeta}^-}(\omega_1))$$

et

$$\bar{E}_x\left[f(X_t(\varpi))\,;\ \sum_1^{n+1} \hat{\zeta}(\omega_i) \leqslant t < \sum_1^{n+2} \hat{\zeta}(\omega_i)\right] = \hat{E}_x[t \geqslant \hat{\zeta}(\omega_1) P^n_{t-\hat{\zeta}(\omega_1)} f(X_{\zeta^-}(\omega_1))].$$

Soit f continue $P_t^{n+1}f$ et la dernière expression sont alors continues à droite en t nous allons montrer qu'elles ont même transformée de Laplace ce qui entraînera leur égalité, comme ce sont deux noyaux positifs bornés ils seront alors égaux $\forall f \in B(E)$ et $\bar{E}_x f(X_t(\varpi))$ sera alors égal à

$$\sum_{n \geqslant 0} P_t^n f(x) = P_t f(x).$$

M_1 qui est standard et conservatif est donc un processus de Hunt.

Il reste à vérifier l'égalité des transformées de Laplace.

Soit $\Phi^\lambda_{n+1}f(x)$ celle de $P^{n+1}_t f$

$$\Phi^\lambda_{n+1}f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}P^{n+1}_t f(x)dt = \hat{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda t}dt \int_0^t P^n_{t-s}f(X_s)d\hat{B}_s$$
$$= \hat{E}_x \int_0^\infty d\hat{B}_s \int_s^\infty e^{-\lambda t}P^n_{t-s}f(X_s)dt$$
$$= \hat{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda s}d\hat{B}_s \hat{E}_{X_s} \int_0^\infty e^{-\lambda t}f(X_t)\frac{(\hat{B}_t)^n}{n!}dt$$

Donc

$$\Phi^\lambda_{n+1}f(x) = \hat{H}^\lambda\Phi^\lambda_n f(x) = (\hat{H}^\lambda)^2\Phi^\lambda_{n-1}f(x) = \ldots = (\hat{H}^\lambda)^{n+1}\hat{K}^\lambda f(x)$$

d'après la définition de P^n_t (p. 218) et la relation

$$P^n_t f(x) = \hat{E}_x\left[f(X_t)\frac{(\hat{B}_t)^n}{n!}\right]$$

démontrée par récurrence page 219, Lemme B, 2.

Soit $\Psi(x)$ la transformée de Laplace de l'autre expression

$$\Psi(x) = \hat{E}_x \int_{\hat{\zeta}(\omega_1)}^\infty e^{-\lambda t}dtP^n_{t-\hat{\zeta}(\omega_1)}f(X_{\zeta^-}(\omega_1)) = \hat{E}_x\left[e^{-\lambda\zeta}\int_0^\infty e^{-\lambda t}P^n_t f(X_{\zeta^-}(\omega_1))dt\right]$$
$$= \hat{E}_x[e^{-\lambda\zeta}(\hat{H}^\lambda)^n\hat{K}^\lambda f(X_{\zeta^-})]$$
$$= (\hat{H}^\lambda)^{n+1}\hat{K}^\lambda f(x).$$

Donc $\Psi(x) = \Phi^\lambda_{n+1}f(x)$ ce qui termine la démonstration.

Désormais nous assimilons $\hat{\Omega}$ et $\bar{\Omega} \cap \{ t < \hat{\zeta}(\omega_1) \}$ ce qui correspond à la première partie de la définition de $X_t(\bar{\omega})$.

LEMME C, 2. — *Soit sur* $\bar{\Omega}$, $g_t = \bigcap_\mu \overline{\mathscr{B}(X_s, s \leqslant t)^\mu}$; *soit* $A \in g_t^+$

$$\bar{E}_x[Af(X_t)] = \hat{E}_x[A \cap \{ t < \zeta(\omega_1) \} f(X_t)e^{\hat{B}_t}].$$

Cette dernière expression a un sens moyennant la convention ci-dessus. Soit d'abord $A \in g_t$, il suffit pour démontrer la formule de montrer que

$$\bar{E}_x[h_1(X_{t_1}) \ldots h_n(X_{t_n})f(X_t)] = \hat{E}_x[h_1(X_{t_1}) \ldots h_n(X_{t_n})f(X_t)e^{B_t}].$$

$\forall t_1 < t_2 \ldots < t_n < t.$

Nous ferons le calcul explicitement avec deux fonctions, il est évident qu'on peut l'étendre à n.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_x[h_1(\mathrm{X}_{t_1})h_2(\mathrm{X}_{t_2})f(\mathrm{X}_t)] &= \mathrm{P}_{t_1}[h_1\mathrm{P}_{t_2-t_1}(h_2\mathrm{P}_{t-t_2}f)](x) \\
&= \hat{\mathrm{E}}_x[h_1(\mathrm{X}_{t_1})\mathrm{P}_{t_2-t_1}(h_2\mathrm{P}_{t-t_2}f)(\mathrm{X}_{t_1})e^{\hat{\mathrm{B}}_{t_1}}] \quad \text{d'après le lemme B, 2} \\
&= \hat{\mathrm{E}}_x[h_1(\mathrm{X}_{t_1})e^{\hat{\mathrm{B}}_{t_1}}\hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{X}_{t_1}}(h_2(\mathrm{X}_{t_2-t_1})\mathrm{P}_{t-t_2}f(\mathrm{X}_{t_2-t_1})e^{\hat{\mathrm{B}}_{t_2-t_1}})] \\
&= \hat{\mathrm{E}}_x[h_1(\mathrm{X}_{t_1})h_2(\mathrm{X}_{t_2})e^{\hat{\mathrm{B}}_{t_2}}\hat{\mathrm{E}}_{\mathrm{X}_{t_2}}f(\mathrm{X}_{t-t_2})e^{\hat{\mathrm{B}}_{t-t_2}}] \\
&= \hat{\mathrm{E}}_x[h_1(\mathrm{X}_{t_1})h_2(\mathrm{X}_{t_2})f(\mathrm{X}_t)e^{\hat{\mathrm{B}}_t}]
\end{aligned}$$

qui établit la formule pour $\mathrm{A} \in g_t$.

Soit maintenant $\mathrm{A} \in g_t^+ : \mathrm{A} \in g_{t+s}\ \forall s > 0$.

Comme M_1 est conservatif

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{E}}_x[\mathrm{A}f(\mathrm{X}_t)] &= \mathrm{E}_x[\mathrm{A}f(\mathrm{X}_t)1_{\mathrm{E}}(\mathrm{X}_{t+s})] \\
&= \hat{\mathrm{E}}_x[\mathrm{A} \cap \{ t + s < \zeta(\omega_1) \}\ f(\mathrm{X}_t)e^{\hat{\mathrm{B}}_{t+s}}].
\end{aligned}$$

Or $\mathrm{A} \cap \{ t + s < \hat{\zeta}(\omega_1) \}\ f(\hat{\mathrm{X}}_t(\omega_1)e^{\hat{\mathrm{B}}_{t+s}}$ quand $s \to 0$ converge vers $\mathrm{A} \cap \{ t < \hat{\zeta}(\omega_1) \}\ f(\hat{\mathrm{X}}_t(\omega_1))e^{\hat{\mathrm{B}}_t}$ et $e^{\hat{\mathrm{B}}_t}1_{\{t<\hat{\zeta}(\omega_1)\}} \in \mathrm{L}^1(\hat{\mathrm{P}}_x)$ donc

$$\bar{\mathrm{E}}_x[\mathrm{A}f(\mathrm{X}_t)] = \hat{\mathrm{E}}_x[\mathrm{A} \cap \{ t < \zeta(\omega_1) \}\ f(\mathrm{X}_t)e^{\hat{\mathrm{B}}_t}].$$

Définition de M. — Soit $\mathrm{M} = (\bar{\Omega}, g_t^+, \mathrm{X}_t(\bar{\omega}), \bar{\mathrm{P}}^\mu)$ M est un processus de Markov dont les tribus et les trajectoires sont continues à droite équivalent à un processus de Hunt c'est donc un processus de Hunt [cf. Meyer [*4*.1], p. 76].

Comme M admet P_t comme semi-groupe nous supprimerons les barres sur $\bar{\mathrm{E}}$ et $\bar{\mathrm{P}}^\mu$.

COROLLAIRE C, 3. — *Soit* T *un temps d'arrêt de la famille* g_t^+, *soit* $\hat{\mathrm{T}}(\omega_1) = \mathrm{T}\wedge\hat{\zeta}(\omega_1)$ $\hat{\mathrm{T}}$ *est un temps d'arrêt de* $\hat{\mathrm{M}}$ *et* $\mathrm{P}_{\mathrm{T}}f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x[f(\mathrm{X}_{\hat{\mathrm{T}}})e^{\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}}}]$ *ce qui généralise la formule du lemme* B, 2.

La première partie est un résultat de Meyer [*4*, *3*], p. 88. Pour démontrer la seconde partie considérons d'abord un temps d'arrêt T prenant un ensemble dénombrable de valeurs $\{ t_i \}_{i\in\mathrm{N}}$

$$\mathrm{P}_{\mathrm{T}}f(x) = \sum_{\mathrm{N}} \mathrm{E}_x[f(\mathrm{X}_{t_i}) ; \mathrm{T} = t_i] = \sum_{\mathrm{N}} \hat{\mathrm{E}}_x[f(\mathrm{X}_{t_i})e^{\hat{\mathrm{B}}_{t_i}}1_{\{\hat{\mathrm{T}}=t_i\}}] = \hat{\mathrm{E}}_x[f(\mathrm{X}_{\hat{\mathrm{T}}})e^{\hat{\mathrm{B}}_{\hat{\mathrm{T}}}}] .$$

Soit T un temps d'arrêt, il peut être approché supérieurement par une suite de temps d'arrêt du type précédent, soit f une fonction continue et bornée, par continuité à droite on obtient que $\mathrm{P}_{\mathrm{T}}f(x) = \hat{\mathrm{E}}_x \{ f(\mathrm{X}_{\mathrm{T}}) \}$, dès lors les noyaux $f \to \mathrm{P}_{\mathrm{T}}f$ et $f \to \hat{\mathrm{E}}_x(f(\mathrm{X}_{\hat{\mathrm{T}}})e^{\hat{\mathrm{B}}_{\mathrm{T}}})$ coïncident sur les fonctions continues ils sont positifs et bornés car $P_T 1$ est borné et égal à $\hat{E}_x 1(X_{\hat{T}})$, ils coïncident donc sur B(E).

Partant de $\hat{M}$ nous avons ainsi construit un processus M de Hunt qui prolonge $\hat{M}$, ce processus est conservatif et nous avons obtenu une des relations nécessaires de la première partie $K^\lambda - \hat{K}^\lambda = \hat{H}^\lambda K^\lambda$ et l'existence de $\hat{B}$, fonctionnelle de $\hat{M}$, telle que $\hat{H}^\mu f = U^\mu_{\hat{B}} f$.

Nous allons montrer qu'il existe une fonctionnelle C de λ_0-potentiel fini telle que $\hat{M}$ soit le tué de M par C.

Nous avons montré dans la première partie que sous l'hypothèse H_3 les relations (I, A, 3) étaient réalisées en particulier que $U^\lambda_{\hat{B}}(I - \hat{H}^\lambda) = \hat{H}^\lambda$. Nous allons obtenir C en inversant cette relation.

D. Construction de la fonctionnelle additive C (relativement à M).

LEMME D, 1.

$$(\hat{H}^\lambda)^n f(x) = \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{(\hat{B}_s)^{n-1}}{(n-1)!} f(X_s)d\hat{B}_s\right].$$

Si $n = 1$ cette relation est la définition de $\hat{B}$; nous allons le démontrer par récurrence, nous la supposons donc vraie jusqu'au rang n et nous calculons

$$\begin{aligned}(\hat{H}^\lambda)^{n+1} f(x) &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda s}\frac{(\hat{B}_s)^{n-1}}{(n-1)!} d\hat{B}_s \hat{E}_{X_s}\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)d\hat{B}_t\right.\\ &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(X_t)d\hat{B}_t \int_0^t \frac{(\hat{B}_s)^{n-1}}{(n-1)!} d\hat{B}_s\right.\\ &= \hat{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{(\hat{B}_t)^n}{n!} f(X_t)d\hat{B}_t\right].\end{aligned}$$

LEMME D, 2. — *Soit* $V^\lambda f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(\hat{H}^\lambda)^n f(x)$, *alors*

$$V^\lambda f(x) = \hat{E}_x\int_0^\infty e^{-\lambda t + \hat{B}_t} f(X_t)d\hat{B}_t \qquad et \qquad V^{\lambda_0} f(x) < \infty \qquad \forall f \in B^+(E).$$

Dans l'expression à calculer, exprimée au moyen du lemme précédent, on peut intervenir intégration et sommation sur n car

$$\sum_1^k e^{-\lambda u}\frac{(\hat{B}_u)^n}{n\,!} f(\hat{X}_u)$$

est positif et croissant en k, on obtient alors immédiatement l'expression de V^λ et comme

$$\left|\sum_1^\infty (\hat{H}^{\lambda_0})^n f(x)\right| \leqslant \| f \| \sum_1^\infty (\hat{H}^{\lambda_0})^n 1(x) < \infty$$

par hypothèse, $| V^{\lambda_0} f(x) | < \infty$ en particulier $\hat{E}_x(e^{-\lambda_0 \zeta + \hat{B}_\zeta}) < \infty$.

Proposition D, 3. — *Il existe une fonctionnelle additive continue de* M, C_t *telle que* $f \in B(E)$

$$V^{\lambda_0} f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-\lambda_0 t} f(X_t) dC_t = U_C^{\lambda_0} f(x) .$$

Démonstration. — La démonstration de cette proposition se décompose en deux lemmes.

Lemme D, 4. — $\forall f \in B^+(E)$ $V^{\lambda_0} f$ *est un* λ_0*-potentiel régulier pour* M.

Montrons d'abord que $V^{\lambda_0} f$ est $P_t^{\lambda_0}$ excessive, nous calculons pour cela

$$P_t^{\lambda_0} V^{\lambda_0} f(x) = \hat{E}_x\left[e^{\hat{B}_t - \lambda_0 t} \hat{E}_{X_t} \int_0^\infty e^{-\lambda u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u \right] \quad \text{d'après B, 2 et D, 2}$$

$$= \hat{E}_x\left[\int_t^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u \right] .$$

Quand $t \to 0$ $\int_t^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u$ croît vers $\int_0^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u$ qui est d'ailleurs d'espérance finie donc $P_t^{\lambda_0} V^{\lambda_0} f(x)$ croît vers $V^{\lambda_0} f(x)$. Soit maintenant une suite T_n de temps d'arrêt croissant vers T. D'après le corollaire C, 3. $\hat{T}_n = T_n \Lambda \hat{\zeta}(\omega_1)$ est une suite de temps d'arrêt de $\hat{M}$ croissant vers $\hat{T} = T \Lambda \hat{\zeta}(\omega_1)$ et

$$P_{T_n}^{\lambda_0} V^{\lambda_0} f(x) = \hat{E}_x[V^{\lambda_0} f(X_{T_n}) e^{-\lambda_0 \hat{T}_n + \hat{B}_{T_n}}]$$

$$= \hat{E}_x\left[\int_{T_n}^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u \right] \quad \text{d'après D, 2}$$

Comme $\infty > V^{\lambda_0} f(x) = \hat{E}_x \int_0^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u \geqslant \hat{E}_x \int_T^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u$ et comme

$$\int_{T_n}^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u \text{ décroît vers } \int_T^\infty e^{-\lambda_0 u + \hat{B}_u} f(X_u) d\hat{B}_u, \ P_{T_n}^{\lambda_0} V^{\lambda_0} f(x)$$

tend vers $P_T^{\lambda_0} V^{\lambda_0} f(x)$ ce qui établit la proposition.

Définition de C_t. — Comme $V^{\lambda_0}f(x)$ est un λ_0-potentiel régulier de M il existe une fonctionnelle additive continue C_f telle que $V^{\lambda_0}f(x) = U^{\lambda_0}_{C_f}1(x)$. Nous poserons $C(t) = C_1(t) = C_t$.

LEMME D, 5 :

$$\forall f \in C^+(E) \qquad E_x\left[\int_0^t e^{-\lambda_0 s} f(X_s)dC_s\right] = E_x\left[\int_0^t e^{-\lambda_0 s} dC_f(s)\right].$$

Nous noterons $\lambda = \lambda_0$ dans la démonstration de ce lemme.

Comme $\infty > V^\lambda 1(x) \geqslant E_x\left[\int_0^t e^{-\lambda s} dC_s\right]$ car M est conservatif, comme par ailleurs C est continue, l'expression $\int_0^t e^{-\lambda s} dC_s(\omega)$ est continue, croissante en t et $P_x ps$ finie.

Comme par définition de C et d'après le lemme D, 2

$$E_x\left[\int_0^t e^{-\lambda s} dC_s\right] = \hat{E}_x\left[\int_0^t e^{-\lambda s + \hat{B}_s} d\hat{B}_s\right]$$

cette dernière expression est aussi continue, croissante et $P_x ps$ finie, alors les propriétés élémentaires de l'intégrale de Stieltjes permettent d'affirmer que

$$\begin{aligned} E_x \int_0^t e^{-\lambda s} dC_f(X_s) &= \hat{E}_x \int_0^t e^{-\lambda s + \hat{B}_s} f(X_s) d\hat{B}_s \\ &= \lim_n \sum_{k=0}^{n-1} \hat{E}_x f(X_{\frac{kt}{n}}) \int_{\frac{kt}{n}}^{k+1\frac{t}{n}} e^{-\lambda s + \hat{B}_s} d\hat{B}_s \end{aligned}$$

[cf. p. 217].

Par ailleurs

$$\begin{aligned} E_x \int_0^t f(X_s) e^{-\lambda s} dC_s &= \lim_n \sum_0^{n-1} E_x\left[e^{-\frac{\lambda kt}{n}} f\left(X_{\frac{kt}{n}}\right) E_{X_{\frac{kt}{n}}} \int_0^{\frac{t}{n}} e^{-\lambda s} dC_s\right] \\ &= \lim_n \sum_0^{n-1} \hat{E}_x\left[e^{-\frac{\lambda kt}{n} + \hat{B}_{\frac{kt}{n}}} f(X_{\frac{kt}{n}}) \hat{E}_{X_{\frac{kt}{n}}} \int^t e^{-\lambda s + \hat{B}_s} d\hat{B}_s\right] \\ &= \lim_n \sum_0^{n-1} \hat{E}_x\left(f(X_{\frac{kt}{n}} \int_{\frac{kt}{n}}^{k+1\frac{t}{n}} e^{-\lambda s + \hat{B}_s} d\hat{B}_s\right). \end{aligned}$$

Ce qui établit le lemme D, 5.

On termine alors la démonstration de la proposition D, 3 en faisant croître t vers l'infini, ces limites sont croissantes et

$$E_x \int_0^\infty f(X_s)e^{-\lambda s}dC_s \leqslant \| f \| U_c^{\lambda_0}1(x) < \infty$$

on peut donc passer à la limite et

$$U_C^{\lambda_0} f(x) = V^{\lambda_0} f(x) = U_{C_f}^{\lambda_0} 1(x)$$

$\forall f$ continue donc aussi $\forall f \in B(E)$ et les fonctionnelles fC et C_f sont équivalents. Ceci achève la démonstration de la proposition D_3.

Nous allons maintenant achever la démonstration du théorème II en montrant que $\hat{M}$ est équivalent au processus $\overline{M}$ tué de M par e^{-C_t}. Pour cela nous démontrons le lemme suivant :

LEMME D, 6. $\quad K^{\lambda_0} - \hat{K}^{\lambda_0} = U_c^{\lambda_0}\hat{K}^{\lambda_0}.$

D'après le lemme B, 3 $\quad K^\lambda - \hat{K}^\lambda = \hat{H}^\lambda K^\lambda$ donc

$$(\hat{H}^\lambda)^n K^\lambda - (\hat{H}^\lambda)^n \hat{K}^\lambda = (\hat{H}^\lambda)^{n+1} K^\lambda$$

soit

$$K^\lambda = \sum_{n=0}^{N} (\hat{H}^\lambda)^n \hat{K}^\lambda + (\hat{H}^\lambda)^{N+1} K^\lambda.$$

Comme $\| K^\lambda \| = \frac{1}{\lambda}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} (\hat{H}^{\lambda_0})^n 1(x) < \infty$ $(\hat{H}^{\lambda_0})^{N+1} K^\lambda f(x)$ tend vers zéro si $N \to \infty$ et $K^{\lambda_0} = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{H}^{\lambda_0})^n \hat{K}^{\lambda_0}$, par ailleurs d'après D, 3 et D, 2 $U_C^{\lambda_0} = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{H}^{\lambda_0})^n \hat{K}^{\lambda_0}$. Ces deux dernières relations entraînent le lemme.

Soit alors $\overline{M}$ le processus tué de M par e^{-C_t} soit $\overline{P}_t$ son semi-groupe de transition et $\overline{K}^\lambda$ sa résolvante. Pour montrer que $\overline{P}_t$ et P_t sont les mêmes, c'est-à-dire que $\hat{M}$ et $\overline{M}$ sont équivalents, il suffit de montrer que $\overline{K}^{\lambda_0}$ et $\hat{K}^{\lambda_0}$ sont identiques car si f est continue $\overline{K}^{\lambda_0} f$ est la transformée de Laplace de $\overline{P}_t f$ qui est continue à droite donc $\overline{P}_t f = \hat{P}_t f$ si $f \in C(E)$ et alors aussi si $f \in B(E)$. Nous avons démontré que $K^{\lambda_0} - \overline{K}^{\lambda_0} = U_c^{\lambda_0}\overline{K}^{\lambda_0}$ (1, A, 3, p. 205) d'après le lemme précédent $K^{\lambda_0} - \hat{K}^{\lambda_0} = U_c^{\lambda_0}\hat{K}^{\lambda_0}$. En posant $\varphi = \hat{K}^{\lambda_0}f - \overline{K}^{\lambda_0}f$ on a donc $\varphi + U_c^{\lambda_0}\varphi = 0$. Or d'après (I, A, 3), $U_c^{\lambda_0}\varphi = \hat{H}^{\lambda_0}\varphi + \hat{H}^{\lambda_0}U_c^{\lambda_0}\varphi$ comme $U_c^{\lambda_0}\varphi = -\varphi$ $U_c^{\lambda_0}\varphi = 0$ donc $\varphi = 0$ soit $\overline{K}^{\lambda_0}\varphi = \hat{K}^{\lambda_0}\varphi$.

Remarque. — Il est clair alors que $\hat{B}$ a même potentiel que $\hat{C}$ défini par $\hat{C}_t(\omega, \lambda) = C_{t\wedge\lambda}(\omega)$, c'est le même calcul que dans la proposition A, 2 (p. 204) et de toute façon c'est nécessaire puisque $\hat{M}$ est équivalent à un processus tué de M par $\hat{C}$.

Ceci achève la démonstration du théorème principal.

Remarque importante relative aux hypothèses du théorème II

Corollaire D, 7. — Soit $\hat{M}$ un processus standard tel que $\hat{X}_{\hat{\zeta}-} \in E$. Pour que $\hat{M}$ soit équivalent au processus tué d'un processus de Hunt M conservatif par une fonctionnelle additive continue de λ_0-potentiel fini, il faut et il suffit que :

1) $\hat{\zeta}$ soit totalement inaccessible.

2) $\sum_{n\geqslant 1}(\hat{H}^{\lambda_0})^n 1(x) < +\infty$ pour tout x.

En effet, d'après le théorème II, p. 216, nous voyons que pour démontrer ce corollaire, il suffit de démontrer que : $\hat{H}^{\lambda_0}1$ est un potentiel régulier est équivalent à $\hat{\zeta}$ est totalement inaccessible.

Or d'après la relation (II, 1, C), p. 216, $\hat{H}^{\lambda}1 = 1 - \lambda\hat{K}^{\lambda}1$. Par suite, comme $\lambda\hat{K}^{\lambda}1$ est un potentiel régulier, $\hat{H}^{\lambda}1$ potentiel régulier donc 1 est un potentiel régulier. Réciproquement, $\hat{H}^{\lambda}1$ étant une fonction λ-excessive, 1 est un potentiel régulier donc $\hat{H}^{\lambda}1$ est un potentiel régulier. Nous nous proposons de montrer maintenant que :

1 est un potentiel régulier $\Leftrightarrow$ $\hat{\zeta}$ est totalement inaccessible.

En effet si 1 est un potentiel régulier, alors pour toute suite T_n de temps d'arrêt qui croît vers $\hat{\zeta}$, $\hat{P}_{T_n}1(x)$ décroît vers zéro. Or

$$\hat{P}_{T_n}1(x) = \hat{P}_x(X_{T_n} \in E) = \hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}) .$$

$\hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta})$ décroît vers zéro est équivalent à :

$$\hat{P}_x[T_n < \hat{\zeta} ; T_n \nearrow \hat{\zeta} ; \hat{\zeta} < +\infty, \forall n \in N] = 0$$

ce qui signifie que $\hat{\zeta}$ est totalement inaccessible.

Réciproquement, supposons $\hat{\zeta}$ totalement inaccessible.
Soit T_n une suite de temps d'arrêt qui croît vers T.

$$\hat{P}_{T_n}1(x) = \hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}) = \hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}\,;\, T < \hat{\zeta}) + \hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}, T > \hat{\zeta}) + \hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}, T = \hat{\zeta})\,.$$

Pour n assez grand, $\hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}, T > \hat{\zeta}) = 0$ puisque T_n croît vers T. Comme $\hat{\zeta}$ est totalement inaccessible, $\hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}, T = \hat{\zeta})$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. De plus, d'après le théorème de convergence monotone, $\hat{P}_x(T_n < \hat{\zeta}, T < \hat{\zeta})$ tend vers $\hat{P}_x(T < \hat{\zeta})$. Nous avons donc démontré que : $\lim_{n\to+\infty} \hat{P}_{T_n}1(x) = \hat{P}_x(T < \hat{\zeta}) = \hat{P}_T1(x)$, c'est-à-dire que 1 est un potentiel régulier puisqu'elle est excessive, comme somme de deux fonctions excessives.

E. **Cas particuliers et exemple.**

Nous nous proposons de donner quelques cas particuliers intéressants du théorème II.

COROLLAIRE E, 1. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\hat{M}$ *soit le tué de M par une fonctionnelle additive à densité bornée est qu'il existe* $g \in B^+(E)$ *telle que :* $\hat{H}^\lambda 1 = \hat{K}^\lambda g$.

La condition est nécessaire d'après la remarque de la proposition A, 1 p. 204. Elle est suffisante car les hypothèses du théorème II, sont alors bien vérifiées : en effet $\hat{H}^\lambda 1$ est alors un potentiel régulier. De plus, comme

$$\hat{K}^\lambda 1 \leqslant \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{pour} \qquad \lambda > \|g\|$$

$$\Sigma(\hat{H}^\lambda)^n 1 = \leqslant \Sigma\left(\frac{\|g\|}{\lambda}\right)^n < +\infty.$$

La fonctionnelle $\hat{B}$, construite p. 216 d'après le lemme A, 1, admet alors une densité par rapport au temps puisque : $U_B^\lambda 1 = \hat{H}^\lambda 1 = \hat{K}^\lambda g$.

Montrons que la fonctionnelle C_t définie dans la proposition D, 3, p. 226 est aussi à densité par rapport au temps.

D'après D, 3, et D, 2.

$$U_C^\lambda 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{H}^\lambda)^n 1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{H}^\lambda)^n \hat{K}^\lambda g.$$

Or, d'après B, 3, p. 220 et D, 6, p. 228

$$K^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{H}^\lambda)^n \hat{K}^\lambda,$$

ce qui entraîne que: $U_C^\lambda 1 = K^\lambda g$, c'est-à-dire que C_t admet une densité par rapport au temps.

Ceci démontre le corollaire.

COROLLAIRE E, 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\hat{M}$ *soit le tué d'un processus de Hunt, conservatif, par une fonctionnelle à densité* $g \in wB_0$ *telle que* $fg \in wB_0$ *si* $f \in wB_0$, *est que* $1 \in D(w\hat{A})$.

La condition nécessaire est une application du théorème B, 2, p. 212. D'après ce théorème, on a en effet que $D(wA) = D(w\hat{A})$ et donc comme M est conservatif, $1 \in D(w\hat{A})$.

Réciproquement, $1 \in D(w\hat{A})$ entraîne que $(\lambda I - \hat{A})\hat{K}^\lambda 1 = 1$ donc que $1 - \lambda\hat{K}^\lambda 1 = \hat{K}^\lambda(-\hat{A}1)$.

Or d'après (II, 1, C), p. 216, $1 - \lambda\hat{K}^\lambda 1 = \hat{H}^\lambda 1$. On obtient donc

$$\hat{H}^\lambda 1 = \hat{K}^\lambda(-\hat{A}1)$$

c'est-à-dire les hypothèses du corollaire E, 1. On en déduit la première partie du résultat. Pour montrer que: $-f\hat{A}1 \in w\hat{B}_0$ si $f \in w\hat{B}_0$ il suffit de montrer, d'après le théorème B, 2, que $\hat{H}^\lambda f \in D(w\hat{A})$ si $f \in wB_0$. Or nous avons démontré p. 212, que si $f \in D(w\hat{A})$, $f\hat{A}1 \in w\hat{B}_0$ ce qui entraîne que $\hat{H}^\lambda f \in D(w\hat{A})$. Nous montrons que $\hat{H}^\lambda f \in D(w\hat{A})$ si $f \in w\hat{B}_0$ de la même manière exactement que nous l'avons démontré p. 213 pour U_B^λ.

COROLLAIRE E, 3. — *Soit* E *compact et* $\hat{M}$ *un processus de Hunt tel que* $\hat{X}_{\zeta^-} \in E$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\hat{M}$ *soit le tué d'un processus de Hunt conservatif par une fonctionnelle additive continue de* λ_0*-potentiel fini est que :*

$$\sum_{n>1} (\hat{H}^{\lambda_0})^n 1(x) < +\infty \qquad \text{pour tout} \qquad x.$$

En effet, d'après le corollaire D, 7, il suffit de vérifier que sous ces hypothèses, $\hat{\zeta}$ est totalement inaccessible.

Or, d'après la quasi-continuité à gauche de $\hat{M}$, si T_n est une suite de temps d'arrêt qui croît vers $\hat{\zeta}$, $\hat{X}_{T_n} \to \hat{X}_{\hat{\zeta}}$ sur $\zeta < +\infty$. Or $\hat{X}_{\hat{\zeta}}$ est en δ, point isolé, et $\hat{X}_{T_n} \in E$; on ne peut donc avoir $\hat{X}_{T_n} \to \hat{X}_{\hat{\zeta}}$ sur $\zeta < +\infty$, puisque E est compact, sauf si $T_n = \hat{\zeta}$ à partir d'un certain rang. $\hat{\zeta}$ est donc bien totalement inaccessible.

COROLLAIRE E, 4. — *Soit* E *compact et* $\hat{\mathrm{M}}$ *un processus de Feller tel que* $\hat{\mathrm{X}}_{\zeta^-} \in \mathrm{E}$. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\hat{\mathrm{M}}$ *soit le tué d'un processus* M *de Feller, conservatif, par une fonctionnelle additive continue de λ-potentiel fini, est que :*

$$\hat{\mathrm{H}}^\lambda f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}) \quad \forall f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}) \quad et \quad \left\| \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\mathrm{H}}^{\lambda \circ n} f \right\| \leqslant \mathrm{M} \| f \| \quad \forall f \in \mathscr{C}(\mathrm{E}).$$

(*Il suffit de le vérifier pour* $f \equiv 1$).

Démonstration. — Condition nécessaire : vérifions que $\hat{\mathrm{H}}^\lambda f$ est continue si $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$. Comme $\mathrm{K}^\lambda - \hat{\mathrm{K}}^\lambda = \hat{\mathrm{H}}^\lambda \mathrm{K}^\lambda = \mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda \hat{\mathrm{K}}^\lambda$ d'après (I, A, 3), p. 205, et comme M et $\hat{\mathrm{M}}$ sont des processus de Feller, $\hat{\mathrm{H}}^\lambda \mathrm{K}^\lambda f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ si $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$. M étant de Feller, $\{ \mathrm{K}^\lambda f, f \in \mathrm{C}(\mathrm{E}) \}$ est dense dans $\mathscr{C}(\mathrm{E})$. Donc, si $g \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$, $\hat{\mathrm{H}}^\lambda g \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ comme limite uniforme de fonctions continues. De même $\mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda \hat{\mathrm{K}}^\lambda f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ si $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$, $\hat{\mathrm{M}}$ étant de Feller, pour la même raison que ci-dessus $\mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda g \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ si $g \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$. E étant compact, $1 \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ donc $\mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda 1$ aussi. $\mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda 1$ est donc bornée, ce qui entraîne d'après la relation (I, A, 3), que

$$\left\| \sum_{n>1}^{\infty} (\hat{\mathrm{H}}^\lambda)^n 1 \right\| < +\infty.$$

Condition suffisante : d'après le corollaire E, 3, nous pouvons construire un processus M de Hunt qui prolonge $\hat{\mathrm{M}}$. Montrons que, sous ces hypothèses, M est de Feller. Si C_t est la fonctionnelle définie dans la proposition D, 3, p. 226, nous avons :

$$\mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda f = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\mathrm{H}}^\lambda)^n f ;$$

donc si $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$, $\mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ comme limite uniforme de fonctions continues. Comme $\mathrm{K}^\lambda - \hat{\mathrm{K}}^\lambda = \mathrm{U}_\mathrm{C}^\lambda \hat{\mathrm{K}}^\lambda$, $\mathrm{K}^\lambda f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ si $f \in \mathscr{C}(\mathrm{E})$ et M est bien de Feller.

Remarque. — Si E est localement compact, on fait les hypothèses supplémentaires que $\hat{\mathrm{H}}^\lambda 1$ est un potentiel régulier et que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\hat{\mathrm{H}}^\lambda)^n 1(x) < +\infty.$$

On démontre alors de la même façon que M est de Feller.

Exemple. — Le mouvement brownien linéaire tué par le temps local en 0.

Nous nous proposons, en traitant complètement cet exemple, de vérifier que les hypothèses du théorème II, p. 216 sont bien vérifiées, mais non celles du corollaire E, 2, p. 231.

Soit M le mouvement brownien linéaire, de semi-groupe

$$\text{(E, 5, 1)} \qquad P_t f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{|x-y|^2}{2t}} f(y)dy,$$

et de résolvante K^λ telle que :

$$\text{(E, 5, 2)} \qquad K^\lambda f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|} f(y)dy.$$

Nous notons T_0 le temps d'entrée en 0 et B_t le temps local en 0. Alors

$$E_x(e^{-T_0}) = U_B^1 1(x) = e^{-\sqrt{2}|x|}, \qquad \text{et} \qquad U_B^1 f(x) = f(0)e^{-\sqrt{2}|x|}.$$

On déduit, de l'équation type résolvante la valeur de $U_B^\alpha 1$:

$$\begin{aligned} U_B^\alpha 1(x) &= U_B^1 1(x) + (1-\alpha)K^\alpha U_B^1 1(x) \\ &= e^{-\sqrt{2}|x|} - \frac{\alpha-1}{\sqrt{2\alpha}} \int_0^\infty e^{-\sqrt{2\alpha}|x-y| - \sqrt{2}|y|} dy = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} e^{-\sqrt{2\alpha}|x|}. \end{aligned}$$

Comme $U_B^1 f(x) = U_B^1 1(x) \times f(0)$, nous avons donc

$$\text{(E, 5, 3)} \qquad U_B^\alpha f(x) = \frac{f(0)}{\sqrt{\alpha}} e^{-\sqrt{2\alpha}|x|}$$

Nous nous proposons de calculer explicitement $\hat{K}^\lambda$ et $\hat{H}^\lambda$. D'après la relation (I, A, 3), p. 205, nous avons

$$K^\lambda f(x) - \hat{K}^\lambda f(x) = U_B^\lambda \hat{K}^\lambda f(x) = \hat{K}^\lambda f(0)\ U_B^\lambda 1(x)$$

donc

$$\hat{K}^\lambda f(x) = K^\lambda f(x) - \frac{\hat{K}^\lambda f(0)}{\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}.$$

De cette relation, on déduit que :

$$\hat{K}^\lambda f(0) = K^\lambda f(0) - \frac{\hat{K}^\lambda f(0)}{\sqrt{\lambda}},$$

soit donc

$$\hat{K}^\lambda f(0) = \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} K^\lambda f(0) .$$

On obtient donc

(E, 5, 4) $$\hat{K}^\lambda f(x) = K^\lambda f(x) - \frac{K^\lambda f(0)}{1+\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}.$$

Le calcul de $\hat{H}^\lambda$ se fait à partir de la définition :

$$\hat{H}^\lambda f(x) = \hat{E}_x(e^{\lambda\zeta} f(X_{\zeta^-}) ; \zeta < +\infty) = f(0)\hat{E}_x(e^{-\lambda\zeta}\zeta < +\infty) = f(0)\hat{H}^\lambda 1(x) .$$

Or comme :

$$\hat{X}_{\zeta^-} \in E,\ \hat{H}^\lambda 1(x) = 1 - \lambda\hat{K}^\lambda 1(x).$$

Or

$$K^\lambda 1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|x-y|} dy = \frac{2}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\sqrt{2\lambda}(x-y)} dy = \frac{1}{\lambda},$$

donc

$$\hat{H}^\lambda 1(x) = 1 - \frac{\lambda}{\lambda} + \frac{\lambda}{\lambda(1+\sqrt{\lambda})} e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}$$

et

(E, 5, 5) $$\hat{H}^\lambda f(x) = f(0) \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}|x|}}{1+\sqrt{\lambda}}.$$

Les hypothèses du théorème II, sont bien vérifiées :

$\hat{H}^\lambda 1$ est un potentiel régulier, car

$$\hat{P}_{T_n}\hat{H}^\lambda 1(x) = \hat{E}_x[\hat{H}^\lambda 1(X_{T_n})] \to \hat{E}_x[\hat{H}^\lambda 1(X_T)]$$

si T_n est une suite de temps d'arrêt qui croît vers T, car les trajectoires du mouvement brownien sont continues, ainsi que la fonction $\hat{H}^\lambda 1$.

D'autre part $\| \hat{H}^\lambda 1 \| = \dfrac{1}{1+\sqrt{\lambda}}$ d'après (E, 5, 5) donc $\| H^\lambda 1 \| < 1$ si $\forall \lambda > 0$ et par suite $\forall \lambda > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\hat{H}^\lambda)^n 1(x) < +\infty .$$

Les hypothèses du corollaire E, 2 ne sont pas vérifiées car nous savons que le temps local en 0 n'a pas de densité par rapport au temps. D'après ce corollaire, nous en déduisons que $1 \notin D(w\hat{A})$, ce que l'on peut vérifier directement, car

$$\lambda(\lambda \hat{K}^{\lambda} 1 - 1)(x) = -\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x|} \to +\infty$$

si $\lambda \to +\infty$ pour $x = 0$.

De même, du corollaire E, 1, on déduit que $\hat{H}^{\lambda}1$ ne peut s'écrire sous la forme $\hat{K}^{\lambda}g$, $g \in B^{+}(E)$, ce que l'on vérifie aussi directement : comme

$$\hat{H}^{\lambda}1(x) = \frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} e^{-\sqrt{2\lambda}|x|},$$

si on avait $\hat{H}^{\lambda}1 = \hat{K}^{\lambda}g$, on aurait en 0,

$$\frac{1}{1+\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\lambda}}{1+\sqrt{\lambda}} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|y|} f(y)dy,$$

soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}|y|f(y)dy = \sqrt{2}},$$

ce qui entraîne que pour tout $\lambda > 0$

$$2\,\|f\| \int_{0}^{\infty} e^{-\sqrt{2\lambda}y}dy \geqslant \sqrt{2}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{\sqrt{2}\,\|f\|}{\sqrt{\lambda}} \geqslant \sqrt{2}$$

pour tout $\lambda > 0$ ce qui est absurde.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AZÉMA, *Noyau potentiel associé à une fonction excessive d'un processus de Markov* (à paraître).

[2] BLUMENTHAL et GETOOR, *Markov processes and potential theory*, Academic Press, 1968.

[3] DYNKIN, *Markov processes*, Moscow, 1963. *English translation*, 1965, Springer, Berlin (2 volumes).

[4] MEYER :

1) *Probabilités et potentiel*, Hermann, 1966, Paris.

2) Processus de Markov. *Lectures notes in Mathematics*, n° 27, 1967. Springer.

3) Sur les relations entre diverses propriétés des processus de Markov. *Inventiones Mathematicae*, 1, 1966.

[5] MOTOO, Application of additive fonctionnals to the boundary problem of Markov processes, VII Berkeley Symposium.

[6] NELSON, *Journal of Mathematics and Mechanics*, **7**, 1958.

N. KAROUI.
B. ROYNETTE, FAC. SCIENCES, ORSAY-91.
H. REINHARD, *I. H. P.*

(Manuscrit reçu le 1er décembre 1969).