ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

NICOLE EL KAROUI
HERVÉ REINHARD
BERNARD ROYNETTE

Processus de Markov : retournement des trajectoires à un temps d'entrée dans un presque-borélien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 2 (1971), p. 131-144
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_2_131_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. VII, n° 2, 1971, p 131-144. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Processus de Markov : retournement des trajectoires à un temps d'entrée dans un presque-borélien

par

Nicole EL KAROUI (*), Hervé REINHARD (**) et Bernard ROYNETTE (*)

SUMMARY. — We show that, under certain duality hypothesis, a standard Markov process reversed to the first entry time T_A in a nearly borel set A, is a homogeneous Markov process. We give an expression of his transition semi-group. Then we give a necessary and sufficient condition so that this semi-group be the dual semi-group. The paper ends with the special case when T_A is a return time.

INTRODUCTION

Soit X un processus de Markov standard à valeurs dans E. Il est bien connu que, sous certaines hypothèses de dualité, le processus retourné à un temps τ de retour est un processus de Markov dont le semi-groupe de transition s'exprime simplement en fonction du semi-groupe dual (voir par exemple [*2*] et [*3*]).

(*) Bâtiment de Mathématiques. Faculté des Sciences, Orsay 91.
(**) Laboratoire de Probabilité. Faculté des Sciences, Paris V^e. Tour 56.

Soit alors A un presque-borélien, T_A le temps d'entrée dans A. Nous nous proposons de montrer que, sous les mêmes hypothèses, le processus retourné au temps T_A est un processus homogène dont nous donnons le semi-groupe de transition.

Nous nous intéressons ensuite au cas où le semi-groupe de retour est le semi-groupe dual et énonçons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il en soit ainsi.

Enfin, nous exprimons une condition nécessaire et suffisante pour que le temps T_A soit presque-sûrement un temps de retour.

I. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Nous utiliserons les notations usuelles de [*1*]. Soient:

$$X = (\Omega, \mathscr{F}, (P_x)_{x\in E}, (\mathscr{F}_t)_{t\in \mathbf{R}^+}, (X_t)_{t\in \mathbf{R}_+}, (\theta_t)_{t\in \mathbf{R}_+})$$

et

$$\hat{X} = \{ \Omega, \hat{\mathscr{F}}, (\hat{P}_x)_{x\in E}, (\hat{\mathscr{F}}_t)_{t\in \mathbf{R}^+}, (\hat{X}_t)_{t\in \mathbf{R}^+}, (\hat{\theta}_t)_{t\in \mathbf{R}^+}),$$

deux processus standards à valeurs dans E, dont les résolvantes seront notées respectivement U^α, $\hat{U}^\alpha$.

Nous supposons que les processus X et $\hat{X}$ sont en dualité au sens suivant:

1) il existe une mesure ξ, σ-finie sur E telle que $\langle U^\alpha f, g \rangle_\xi = \langle f, \hat{U}^\alpha g \rangle_\xi$ pour toutes f et g boréliennes, bornées et pour tout $\alpha > 0$;

2) les mesures $f \rightsquigarrow U^\alpha f(x)$ et $f \rightsquigarrow \hat{U}^\alpha f(x)$ sont absolument continues par rapport à ξ pour tout $\alpha > 0$ et pour tout x de E;

3) la mesure de référence ξ est de la forme νU, où ν est une probabilité sur E.

Soit A un presque-borélien de E, T_A (resp. $\hat{T}_A$) le temps d'entrée du processus X (resp. $\hat{X}$) dans A. Nous noterons X_A (resp. $\hat{X}_A$) le processus tué de X (resp. $\hat{X}$) au temps T_A (resp. $\hat{T}$), U^α_A (resp. $\hat{U}^\alpha_A$) la résolvante de ce processus, i. e.

$$U^\alpha_A f(x) = E_x \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} f(X_s) ds$$

pour f borélienne bornée ou positive P^A_t (resp. $\hat{P}^A_t$) le semi-groupe de ce processus i. e.

$$P^A_t f(x) = E_x(f(X_t)\,;\, t < T_A).$$

II. LE PROCESSUS RETOURNÉ AU TEMPS T_A

DÉFINITION 1. — Nous définissons le processus retourné au temps T_A, Y_t par la formule :

$$\begin{aligned} Y_t &= X_{(T_A(\omega)-t)^-}(\omega) \qquad &\text{si} \quad 0 < t < T_A(\omega) \\ &= \delta &\text{sinon.} \end{aligned}$$

LEMME 1. — Soit $\mathscr{G}_t$ $(t \geqq 0)$ la tribu constituée par les $B \in \mathscr{F}$ tels que :

$$\forall u \geqq 0 \qquad \theta_u^{-1}(B) \cap \{ t + u < T_A \} = B \cap \{ t + u < T_A \}.$$

La famille de tribus $\mathscr{G}_t$ est croissante et continue à droite et Y_t est $\mathscr{G}_t$ mesurable.

En effet, il suffit de remarquer que T_A est le temps de mort du processus X_A et que Y_t est identique au processus retourné de X_A au temps de mort de X_A. On peut alors appliquer le lemme 3 de [2].

De même, nous montrerons le caractère homogène et markovien du processus Y_t en démontrant que le processus X_A satisfait aux hypothèses du théorème principal de [2].

Soit w une fonction excessive du processus $\hat{X}_A$. Soit ${}^w\hat{P}_t$ le w-semi-groupe défini par :

$$\begin{aligned} {}^w\hat{P}_t f(x) &= \frac{1}{w(x)} \hat{P}_t^A f(x) \qquad &\text{si} \quad w(x) \neq 0, \quad w(x) \neq \infty \\ &= 0 &\text{sinon.} \end{aligned}$$

Il est bien connu que ${}^w\hat{P}_t$ est un semi-groupe sous-markovien, et qu'il existe un processus ${}^w\hat{X}$ de markov, continu à droite, limité à gauche de semi-groupe de transition ${}^w\hat{P}_t$ et de loi d'entrée $(\varepsilon_x {}^w\hat{P}_t \,;\, t > 0)$.

Nous noterons ${}^w\hat{U}_A^\alpha$ les résolvantes associées au ${}^w\hat{P}_t$ semi-groupe.

THÉORÈME 1. — Soit $w(x) = \hat{E}_x\,(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$ w est excessive pour le processus $\hat{X}_A$ et les résolvantes U_A^α et ${}^w\hat{U}_A^\alpha$ satisfont à la relation :

$$\langle U_A^\alpha f, g \rangle_{\nu U_A} = \langle f, {}^w\hat{U}^\alpha g \rangle_{\nu U_A}$$

si f et g sont universellement mesurables et positives.

w est la densité de νU_A par rapport à νU.

Remarque 1. — νU étant σ-finie, νU_A est σ-finie et le théorème 1 implique que le processus X_A satisfait aux hypothèses du théorème principal de [2].

Démonstration :

Après avoir lu notre manuscrit, M. Walsh nous a fait remarquer que le fait de pouvoir retourner un processus au temps d'entrée dans un presque-borélien était, sans hypothèse de dualité, une conséquence de l'article de Chung et Walsh (*Acta Math.* t. **123**). Nous le remercions des remarques qu'il a bien voulu nous communiquer.

III. ÉTUDE DU SEMI-GROUPE DE RETOUR

Quand on retourne à un temps de retour, le semi-groupe de retour est égal au semi-groupe dual. Peut-il en être de même quand on retourne à T_A? La réponse est fournie par la proposition suivante :

THÉORÈME 3. — Pour que le semi-groupe dual soit le semi-groupe de retour, il faut et il suffit que la fonction w ne prenne que les valeurs 0 ou 1.

Avant de prouver ce théorème, nous allons établir quelques propriétés des processus X et $\hat{X}$, impliquées par l'hypothèse de dualité.

PROPOSITION 3. — $\hat{P}_x(\hat{\zeta} < +\infty) = 1$ pour tout x de E.

En effet, νU étant une mesure de Radon, il existe une fonction g continue, $g > 0$, telle que $\nu U(g) < +\infty$.

Ceci implique donc que : $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) \to 0$ quand α tend vers zéro. D'après l'équation résolvante, $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) = \nu U(\alpha U^\alpha g) = \nu U(g\alpha\hat{U}^\alpha 1)$, d'après l'hypothèse de dualité.

Or $\alpha\hat{U}^\alpha 1(x)$ décroît vers $\hat{E}_x(\hat{\zeta} = \infty)$ lorsque α tend vers zéro. Donc :

$$\lim_{\alpha\to 0} \nu U(g\alpha\hat{U}^\alpha 1) = \nu U[g\hat{E}.(\hat{\zeta} = \infty)] = 0.$$

g étant strictement positive, ceci implique donc que : $\hat{E}_x(\hat{\zeta} = \infty) = 0$ νU p. s. La fonction $\hat{E}_x(\hat{\zeta} = \infty)$ étant invariante, elle est donc identiquement nulle.

PROPOSITION 4. — Soit $G = \{ x ; \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1 \}$ (*). Alors, P_ν presque-sûrement, $T_A \wedge T_G = 0$.

Démonstration : soit $\hat{\Phi}_A(x) = \hat{E}_x(e^{-\hat{T}_A})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous définissons $K_\varepsilon = A \cup \{ \hat{\Phi}_A < \varepsilon \}$.

(*) Pour la démonstration de cette proposition, nous suivrons ici [*1*] (p. 240 à 248). Nous reproduisons cette dernière pour des commodités de lecture.

$$\int \nu(dx)[u(x, y) - P_{T_A}u(x, y)]$$
$$= \int \nu(dx)[u(x, y) - u\hat{P}_{\hat{T}_A}(x, y)] = \hat{P}_y(\hat{\zeta} > 0) - \hat{P}_y(\hat{T}_A < \hat{\zeta})$$
$$= \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$$

par suite

$$\nu U_A(B) = \int 1_B(y)\hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)\xi(dy)$$

et

$$\xi \text{ p. s. } \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0) = \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty).$$

Soit $w(y) = \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$, w est A-coexcessive. En effet :

$$\hat{P}_t^A w(y) = \hat{E}_y[(t < \hat{T}_A w(\hat{X}_t)] = \hat{E}_y(t < \hat{T}_A \wedge \hat{\zeta}\,;\, \hat{T}_A = \infty) \leqq \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$$

et si $t \to 0$,

$$\hat{P}_t^A w(y) \to \hat{E}_y(0 < \hat{\zeta} \cap \hat{T}_A = \infty) = w(y).$$

c) Montrons le théorème : soient $f, g \in (b\mathscr{E}^*)^+$.

$$\langle f1_{\{w>0\}}, {}^w\hat{U}_{AG}^\alpha g \rangle_{\nu U_A} = \langle f1_{\{w>0\}}, \hat{U}_A^\alpha(gw) \rangle_\xi = \langle U_A^\alpha(f1_{\{w>0\}}), gw \rangle_\xi$$
$$= \langle U_A^\alpha(f1_{\{w>0\}}), g \rangle_{\nu U_A}$$

D'autre part

$$\langle f1_{\{w=0\}}, {}^w\hat{U}_{AG}^\alpha g \rangle_{\nu U_A} = 0$$

$$\langle U_A^\alpha(f1_{\{w=0\}}), g \rangle_{\nu U_A}$$
$$= \langle f1_{\{w=0\}}, \hat{U}_A^\alpha(gw) \rangle_\xi \leqq \frac{\|g\|_\infty}{\alpha} \langle f1_{\{w=0\}}, w \rangle_\xi = 0,$$

car w est A-coexcessive, donc :

$$\langle f1_{\{w=0\}}, {}^w\hat{U}_{AG}^\alpha g \rangle_{\nu U_A} = \langle U_A^\alpha f1_{\{w=0\}}, g \rangle_{\nu U_A} = 0.$$

Ceci entraîne que

$$\langle U_A^\alpha f, g \rangle_{\nu U_A} = \langle f, {}^w\hat{U}_{AG}^\alpha g \rangle_{\nu U_A}.$$

THÉORÈME 2. — Si on munit Ω de la loi P_ν, le processus Y_t, continu à droite est markovien par rapport à la famille de tribus $\mathscr{G}_t$, et admet ${}^w\hat{P}_t^A$ comme semi-groupe de transition.

C'est l'application du théorème principal de [2] au processus X_A.

Après avoir lu notre manuscrit, M. Walsh nous a fait remarquer que le fait de pouvoir retourner un processus au temps d'entrée dans un presque-borélien était, sans hypothèse de dualité, une conséquence de l'article de Chung et Walsh (*Acta Math.* t. **123**). Nous le remercions des remarques qu'il a bien voulu nous communiquer.

III. ÉTUDE DU SEMI-GROUPE DE RETOUR

Quand on retourne à un temps de retour, le semi-groupe de retour est égal au semi-groupe dual. Peut-il en être de même quand on retourne à T_A? La réponse est fournie par la proposition suivante :

THÉORÈME 3. — Pour que le semi-groupe dual soit le semi-groupe de retour, il faut et il suffit que la fonction w ne prenne que les valeurs 0 ou 1.

Avant de prouver ce théorème, nous allons établir quelques propriétés des processus X et $\hat{X}$, impliquées par l'hypothèse de dualité.

PROPOSITION 3. — $\hat{P}_x(\hat{\zeta} < +\infty) = 1$ pour tout x de E.

En effet, νU étant une mesure de Radon, il existe une fonction g continue, $g > 0$, telle que $\nu U(g) < +\infty$.

Ceci implique donc que : $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) \to 0$ quand α tend vers zéro. D'après l'équation résolvante, $\nu U(g) - \nu U^\alpha(g) = \nu U(\alpha U^\alpha g) = \nu U(g\alpha\hat{U}^\alpha 1)$, d'après l'hypothèse de dualité.

Or $\alpha\hat{U}^\alpha 1(x)$ décroît vers $\hat{E}_x(\hat{\zeta} = \infty)$ lorsque α tend vers zéro. Donc :

$$\lim_{\alpha \to 0} \nu U(g\alpha\hat{U}^\alpha 1) = \nu U[g\hat{E}.(\hat{\zeta} = \infty)] = 0.$$

g étant strictement positive, ceci implique donc que : $\hat{E}_x(\hat{\zeta} = \infty) = 0$ νU p. s. La fonction $\hat{E}_x(\hat{\zeta} = \infty)$ étant invariante, elle est donc identiquement nulle.

PROPOSITION 4. — Soit $G = \{ x ; \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1 \}$ (*). Alors, P_ν presque-sûrement, $T_A \wedge T_G = 0$.

Démonstration : soit $\hat{\Phi}_A(x) = \hat{E}_x(e^{-\hat{T}_A})$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous définissons $K_\varepsilon = A \cup \{ \hat{\Phi}_A < \varepsilon \}$.

(*) Pour la démonstration de cette proposition, nous suivrons ici [*1*] (p. 240 à 248). Nous reproduisons cette dernière pour des commodités de lecture.

a) Nous nous proposons de montrer que $\forall x \in \mathrm{E}\ \hat{\mathrm{P}}_x(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} = \infty) = 0$. Soit b assez grand pour que $e^{-b} < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors :

$$\hat{\Phi}_{\mathrm{A}}(x) = \hat{\mathrm{E}}_x(e^{-\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}}) = \hat{\mathrm{E}}_x[e^{-\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}} ; \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} \leqq b) + \hat{\mathrm{E}}_x[e^{-\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}} ; \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} > b]$$
$$\leqq \hat{\mathrm{P}}_x(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} \leqq b) + e^{-b}.$$

Donc si $x \in \mathrm{K}_\varepsilon^c$,

$$\hat{\mathrm{P}}_x(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} \leqq b) \geqq \hat{\Phi}_{\mathrm{A}}(x) - e^{-b} > \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc puisqu'alors

$$\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} \quad , \quad \hat{\mathrm{P}}_x(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} \leqq b) > \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\hat{\mathrm{P}}_x[\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} > (n+1)b] = \hat{\mathrm{E}}_x[\hat{\mathrm{P}}_{\mathrm{X}_{nb}}(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} > b) ; \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} > nb].$$

Or si $nb < \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon}$, $\hat{\mathrm{X}}_{nb} \in \mathrm{K}_\varepsilon^c$ si $nb < \hat{\zeta}$. Donc :

$$\hat{\mathrm{P}}_x[\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} > (n+1)b] \leqq \hat{\mathrm{P}}_x(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} > nb)\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et par suite

$$\hat{\mathrm{P}}_x[\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} > (n+1)b] \leqq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^n.$$

Ceci tend vers zéro si n tend vers $+\infty$ donc $\hat{\mathrm{P}}_x(\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_\varepsilon} = \infty) = 0$.

b) Soit $\hat{\mathrm{T}}_n = \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{K}_{1/n}}$ où $\mathrm{K}_{1/n} = \mathrm{A} \cup \left\{ \hat{\Phi}_{\mathrm{A}} < \frac{1}{n} \right\}$. La suite $\hat{\mathrm{T}}_n$ est une suite croissante de temps d'arrêt, tous majorés par $\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A} \cup \mathrm{G}}$ puisque

$$\left\{ \hat{\Phi}_{\mathrm{A}} < \frac{1}{n} \right\} \supseteq \{ \hat{\Phi}_{\mathrm{A}} = 0 \} = \mathrm{G}.$$

On se propose de montrer que si $\hat{\mathrm{T}} = \lim_{n \to \infty} \hat{\mathrm{T}}_n$, alors $\hat{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A} \cup \mathrm{G}}$.

Soit $\tilde{\mathrm{A}}$ la fermeture cofine de A. Si il existe n tel que $\hat{\mathrm{X}}_{\hat{\mathrm{T}}_n} \in \tilde{\mathrm{A}} \cup \mathrm{G}$, alors $\hat{\mathrm{T}}_n = \hat{\mathrm{T}}_{\tilde{\mathrm{A}} \cup \mathrm{G}} = \hat{\mathrm{T}}_m \ \forall m \geqq n$ et donc $\hat{\mathrm{T}} = \hat{\mathrm{T}}_{\tilde{\mathrm{A}} \cup \mathrm{G}} = \hat{\mathrm{T}}_{\tilde{\mathrm{A}}} \wedge \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{G}} = \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} \wedge \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{G}}$ puisque $\tilde{\mathrm{A}}$ est la fermeture cofine de A. Supposons que $\forall n\ \hat{\mathrm{X}}_{\hat{\mathrm{T}}_n} \notin \tilde{\mathrm{A}}$. Alors

$$\hat{\mathrm{E}}_{\hat{\mathrm{X}}_{\hat{\mathrm{T}}_n}}(e^{-\hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}}}) \leqq \frac{1}{n}.$$

Puisque

$$\hat{\mathrm{T}} + \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} \circ \hat{\theta}_{\hat{\mathrm{T}}} \geqq \hat{\mathrm{T}}_n + \hat{\mathrm{T}}_{\mathrm{A}} \circ \hat{\theta}_{\hat{\mathrm{T}}_n},$$

on a :

$$\hat{E}_x[e^{-\hat{T}}\hat{\Phi}_A(\hat{X}_{\hat{T}}) ; \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A}\ \forall n] = \hat{E}_x(e^{-\hat{T}+\hat{T}_A\circ\hat{\theta}_T} ; \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A}\ \forall n)$$
$$\leqq \hat{E}_x[e^{-T_n}\hat{\Phi}_A(\hat{X}_{\hat{T}_n}) ; \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A}] \leqq \frac{1}{n}.$$

Donc $\hat{\Phi}_A(\hat{X}_{\hat{T}}) = 0$ sur l'ensemble $\{ \hat{T} < +\infty ; \hat{X}_{\hat{T}_n} \notin \tilde{A}\ \forall n \}$.

Sur cet ensemble $\hat{X}_{\hat{T}} \in G$, et donc $\hat{T} \geqq \hat{T}_{\sim A\cup G}$. Dans tous les cas, on a donc bien $\hat{T} = \hat{T}_{\sim A\cup G} = \hat{T}_{A\cup G}$.

c) Montrons que P_ν p. s. $T_A \wedge T_G = 0$. $\hat{P}_x$ p. s. $\hat{T}_n \leqq \hat{\zeta} < +\infty$. Par suite, $\hat{P}_x$ p. s. $\hat{T} \leqq \hat{\zeta} < +\infty$. Donc $\hat{P}_x(\hat{T}_{A\cup G} = \infty) = 0\ \forall x \in E$. Or:

$$\nu U_{A\cup G}(f) = \nu U(f\hat{P}_x(\hat{\zeta} > 0 \cap \hat{T}_{A\cup G} = \infty))] = \nu U[f\hat{P}_x(\hat{T}_{A\cup G} = \infty)]$$

$\forall f$ borélienne bornée. Donc P_ν presque sûrement $T_{A\cup G} = T_A \wedge T_G = 0$.

PROPOSITION 5. — Pour tout x de E, $P_x(T_{G^c} + T_G \circ \theta_{T_{G^c}} = +\infty) = 1$.

En effet, nous avons vu que G était absorbant pour $\hat{X}$. Donc:

$$u^\alpha \hat{P}^\alpha_{G^c}\hat{P}^\alpha_G(x, y) = 0 \qquad \forall x \qquad \text{et} \qquad \forall y \in E_\Delta,$$
$$\hat{E}_y[(e^{-\alpha\hat{T}_G}u^\alpha\hat{P}^\alpha_{G^c}(x, \hat{X}_{T_G})] = \hat{E}_y[e^{-\alpha\hat{T}_G}P^\alpha_{G^c}u^\alpha(x, \hat{X}_{T_G})]$$
$$= E_x[(e^{-\alpha T_{G^c}}P^\alpha_G u^\alpha(X_{T_{G^c}}, y)]$$
$$= P^\alpha_{G^c}P^\alpha_G u^\alpha(x, y),$$

pour toute f borélienne, on a donc:

$$\int P^\alpha_{G^c}P^\alpha_G u^\alpha(x, y)f(y)\xi(dy) = P^\alpha_{G^c}P^\alpha_G U^\alpha f(x)$$
$$= E_x \int_{T_{G^c}+T_G\circ\theta_{T_{G^c}}}^{+\infty} e^{-\alpha t}f(X_t)dt = 0.$$

Ceci entraîne que pour tout x de E, $P_x(T_{G^c} + T_G \circ \theta_{T_{G^c}} = \infty) = 1$.

En conséquence si H est un ensemble absorbant pour $\hat{X}$, H^c est absorbant pour X.

IV. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3

a) La condition est suffisante:

$$\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_G(x).$$

D'après la proposition 5,

$$E_x \int_{T_{G^c}}^{+\infty} 1_G(X_t)f(X_t)dt = 0.$$

Par suite, 1_G étant une densité de νU_A par rapport à νU :

$$E_\nu \int_0^{T_A} f(X_t)dt = E_\nu \int_0^{T_{G^c}} f(X_t)dt$$

ce qui entraîne, pour $f = 1_{G^c}$ que

$$E_\nu\left(\int_{T_{G^c}}^{T_A} 1_{G^c}(X_t)dt \right) = 0.$$

Or G^c est un ensemble absorbant donc, P_ν p. s. $T_A = T_{G^c}$, ce qui entraîne que P_ν presque-sûrement,

$$X_s \in G \qquad \text{si} \qquad s < T_A.$$

Soit $H = \{ x ; \hat{P}_x \{ \hat{\zeta} = 0 \} = 1 \}$, H est absorbant pour $\hat{X}$, donc H^c est absorbant pour X (cf. Proposition 5). Or 1_{H^c} est égale à νU p. s. à 1 ce qui entraîne que P_ν p. s. $T_{H^c} = 0$.

Nous pouvons donc conclure que P_ν p. s.

$$w(X_s) = \hat{P}_{x_s}(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0) = 1 \qquad \text{si} \qquad s < T_A.$$

Or pour presque tout s $X_s = X_{s^-}$. Donc pour presque tout s, $w(X_{s^-}) = 1$ si $s < T_A$. Montrons que la fonction $\hat{P}_x(\hat{T}_A < +\infty)$ est coexcessive.

$$\begin{aligned}&\hat{E}_x(\hat{T}_A \circ \theta_t < +\infty)\\ &\quad = \hat{E}_x(t < \hat{T}_A < +\infty) + 1_{A^r} + 1_{(A^r)^c}\hat{E}_x(t \geqq \hat{T}_A > 0) \leqq \hat{E}_x(\hat{T}_A < +\infty)\end{aligned}$$

si $t \to 0$

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(t < \hat{T}_A < +\infty) &\to \hat{E}_x(0 < \hat{T}_A < +\infty)\\ \hat{E}_x(t \geqq \hat{T}_A > 0) &\to 0\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\hat{E}_x(\hat{T}_A \circ \theta_t < +\infty) &\to \hat{E}_x(0 < \hat{T}_A < +\infty) + 1_{A^r}\\ &= \hat{E}_x(\hat{T}_A < +\infty).\end{aligned}$$

Par suite $\hat{P}_x(\hat{\zeta} > 0) - \hat{P}_x(\hat{T}_A < +\infty)$ est continue à gauche sur les trajectoires. i. e. que $s \to w(X_{s^-}) = \hat{P}_{x_s}(\hat{\zeta} > 0 \cap \hat{T}_A = \infty)$ est continue à gauche. Donc $w(X_{s^-}) = 1$ si $s < T_A$.

On en déduit alors que :

$$\frac{1}{w(X_{(T_A - t)^-})} \hat{P}_\nu^A(fw)(X_{(T_A - t)^-}) = \hat{E}_{X_{(T_A - t)^-}} - [f(\hat{X}_\nu(\,; \hat{T}_A = \infty \cap \nu < \hat{\zeta}]P_\nu \text{ p. s.}$$

puisque

$$X_{(T_A - t)^-} \in G = \hat{E}_{X_{(T_A - t)^-}}[f(\hat{X}_\nu)] = \hat{P}_\nu f(X_{(T_A - t)^-})\ P_\nu \text{ p. s.}$$

b) *Réciproquement.* Supposons que :

$$P_\nu \text{ p. s. } \frac{1}{w(X_{(T_A-t)^-})} \hat{P}_v^A[fw](X_{(T_A-t)^-}) = \hat{P}_v f(X_{(T_A-t)^-})$$

Soit x un point tel que :

$$\frac{1}{w(x)} \hat{P}_v^A(fw)(x) = \hat{P}_v f(x).$$

$w(x) \neq 0$, sinon $\hat{P}_v f(x) = 0$ pour toute f ce qui est absurde. On a donc :

$$\hat{E}_x[f(\hat{X}_v) ; \hat{T}_A = \infty \cap v < \hat{\zeta}] = \hat{E}_x(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)\hat{E}_x[f(\hat{X}_v)]$$

puisque $w(x) \neq 0$, $x \in H^c = \{ x ; \hat{P}_x(\hat{\zeta} > 0) = 1 \}$ donc cette égalité s'écrit :

$$\hat{E}_x[f(\hat{X}_v) ; \hat{T}_A = \infty] = \hat{E}_x(\hat{T}_A = \infty)\hat{E}_x[f(\hat{X}_v)].$$

L'événement $\hat{T}_A = \infty$ est donc $\hat{P}_x$-indépendant de la tribu engendrée par $\hat{X}_v$ pour tout v ; $\{ T_A = \infty \}$ est donc indépendant de la tribu engendrée par $\bigcup_v(\hat{X}_v)$, donc aussi de lui-même. $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = (\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty))^2$ et comme $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) \neq 0$ ceci entraîne que $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1$.

On a $w(X_{s^-}) = 1$ P_ν presque-sûrement $\forall s < T_A$.

Or $\nu U_A(f) = \nu U(wf)$, ce qui entraîne que P_ν p. s. $w(X_s) = 0$ pour presque tout s. Par suite l'ensemble $\{ 0 < w < 1 \}$ n'est pas chargé par νU.

Or $\{ 0 < w < 1 \} = H^c \cap \{ 0 < \hat{P}_x(\hat{T}_A < \infty) < 1 \}$. νU ne chargeant pas $H = \{ x ; \hat{P}_x(\hat{\zeta} = 0) = 1 \}$ puisque $\hat{P}_x(\hat{\zeta} = 0) = 1$ νU presque-sûrement, νU ne charge pas $\{ 0 < \hat{P}_x(\hat{T}_A < \infty) < 1 \}$ qui est un ouvert cofin, puisque $\hat{P}_x(\hat{T}_A < +\infty)$ est coexcessive. Cet ensemble est donc vide. $\{ 0 < w < 1 \}$ est vide.

La fonction w ne prend donc que les valeurs 0 ou 1. Or

$$w(x) = 1_{H^c}\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty).$$

Donc $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty)$ ne prend que les valeurs 0 ou 1.

THÉORÈME 4. — $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty)$ ne prend que les valeurs 0 ou 1, est équivalent à : $\forall x \in G^r$ $P_x(T_A = T_{A \cup G^c}) = 1$.

a) Condition nécessaire : soit $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_G$. Ceci entraîne que $\hat{U}_A^\alpha(f 1_G) = 1_G \hat{U}_A^\alpha f$. Par suite,

$$\begin{aligned} \langle U_A^\alpha f, 1_G \rangle_\xi = \langle U_A^\alpha f, (1_G)^2 \rangle_\xi = \langle f, \hat{U}_A^\alpha (1_G)^2 \rangle_\xi &= \langle f 1_G, \hat{U}_A^\alpha 1_G \rangle_\xi \\ &= \langle U_A^\alpha (f 1_G), 1_G \rangle_\xi \end{aligned}$$

Donc ξ p. s.

$$1_G U_A^\alpha f = 1_G U_A^\alpha(f 1_G).$$

Montrons que ceci entraîne que $1_{G^r} U_A^\alpha f = 1_{G^r} U_A^\alpha(f 1_G)$. En effet $\forall \beta > \alpha$

$$\begin{aligned}
\beta U^\beta_{G^c \cup A}(1_G U_A^\alpha f) &= \beta E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} 1_G(X_t) e^{-\beta t} U_A^\alpha f(X_t) dt \\
&= \beta 1_{G^r}(x) E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} e^{-\beta t} U_A^\alpha f(X_t) dt \\
&= 1_{G^r}(x) \beta E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_A} e^{-(\beta - \alpha)t} dt \int_t^{T_A} e^{-\alpha s} f(X_s) ds \\
&= 1_{G^r}(x) \frac{\beta}{\beta - \alpha} \left[E_x \int_0^{T_{G^c} \wedge T_\alpha} (e^{-\alpha u} - e^{-\beta u}) f(X_u) du \right. \\
&+ \int_{T_A \wedge T_{G^c}}^{T_A} e^{-\alpha u} f(X_u)(1 - e^{-(\beta - \alpha) T_A \wedge T_{G^c}})
\end{aligned}$$

Lorsque β tend vers $+\infty$, ceci tend donc vers :

$$1_{G^r}(x) E_x\left(T_A \wedge T_{G^c} > 0 ; \int_0^{T_A} e^{-\alpha u} f(X_u) du \right);$$

or tout point irrégulier pour G^c est régulier pour G.

D'après la proposition 5, si $x \in (G^c)^r$, x est irrégulier pour G.

$$(G^c)^r \subseteq (G^r)^c \subseteq (G^c)^r.$$

Par suite G^r est identique à l'ensemble des points irréguliers pour G^c

$$1_{G^r}(x) E_x\left[T_A \wedge T_{G^c} > 0 ; \int_0^{T_A} e^{-\alpha u} f(X_u) du \right] = 1_{G^r}(x) U_A^\alpha f(x).$$

L'égalité :

$$\xi \text{ p. s. } 1_G U_A^\alpha f = 1_G U_A^\alpha(f 1_G)$$

entraîne donc :

$$\forall x \in E \qquad 1_{G^r}(x) U_A^\alpha f(x) = 1_{G^r}(x) U_A^\alpha(f 1_G)(x),$$

soit encore :

$$1_{G^r}(x) U_A^\alpha(f 1_{G^c})(x) = 0.$$

Ceci entraîne, puisque G^c est absorbant, que :

$$\forall x \in G^r \qquad P_x(T_A = T_{A \cup G^c}) = 1.$$

b) Condition suffisante :

$$\forall x \in G^r \qquad P_x(T_A = T_{A \cup G^c}) = 1.$$

$$1_{G^r}(x) P_{T_{A \cup G^c}} u(x, y) = 1_{G^r}(x) P_{T_A} u(x, y)$$
$$1_{A^r}(x) P_{T_{A \cup G^c}} u(x, y) = 1_{A^r}(x) P_{T_A} u(x, y)$$

Comme v ne charge que $A^r \cup G^r$, nous déduisons donc que :

$$\int v(dx) u(x, y) - \int v(dx) P_{T_{G^c \cup A}} u(x, y) = \hat{P}_y(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty \cap \hat{\zeta} > 0)$$
$$= \int v(dx) u(x, y) - \int v(dx) P_{T_A} u(x, y) = \hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty \cap \hat{\zeta} > 0),$$

ce qui entraîne, puisque $(\hat{\zeta} > 0) \in \mathscr{F}^0$ que :

$$\hat{P}_y(\hat{T}_A = \infty) = \hat{P}_y(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty).$$

G est un fermé cofin, absorbant, disjoint de ${}^rA$, donc

$$\forall x \in G, \qquad \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1$$

et $\qquad \hat{P}_x(\hat{T}_{G^c} = \infty) = 1$

donc $\qquad \hat{P}_x(\hat{T}_{A \cup G^c} = \infty) = 1.$

Si $x \in G^c$, ouvert cofin, alors $\hat{P}_x(\hat{T}_{G^c} = 0) = 1$ donc $\hat{P}_x(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty) = 0$.
Par suite, $\forall y \in E \ \ \hat{P}_y(\hat{T}_{G^c \cup A} = \infty) = 1_G(y)$.

V. ÉTUDE DU CAS OU T_A EST UN TEMPS DE RETOUR

Les théorèmes généraux nous prouvent qu'alors le semi-groupe dual est égal au semi-groupe de retour, donc d'après le théorème 3, la fonction w est égale à 0 ou 1. Nous allons étudier la vraie valeur de w dans un cadre un peu plus général.

DÉFINITION. — T_A est P_v-presque sûrement un temps de retour si : $T_A \circ \theta_t = 0$ P_v-presque-sûrement sur l'ensemble $\{ T_A \leqq t \}$.

Comme T_A est un temps d'entrée, sur l'ensemble $\{ t < T_A \}$,

$$T_A \circ \theta_t = T_A - t.$$

Donc P_v-presque sûrement $T_A \circ \theta_t = (T_A - t)^+$ et $T_A < +\infty \Rightarrow T_A \leqq \zeta$, ce qui est la définition d'un temps de retour (cf. [*2*]).

THÉORÈME 5. — Pour que T_A soit P_ν-presque sûrement un temps de retour, il faut et il suffit que $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_{({}^rA)^c}$.

a) Condition nécessaire : P_ν p. s. $T_A \circ \theta_t = 0$ sur $T_A \leqq t$.

$$\nu U(U_A^\alpha f) = E_\nu \int_0^{+\infty} dt E_{X_t} \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} f(X_s) ds = E_\nu \int_0^{+\infty} dt \int_0^{(T_A - t)^+} e^{-\alpha s} f(X_s) ds$$

$$= E_\nu \int_0^{T_A} dt \int_0^{T_A - t} e^{-\alpha s} f(X_{s+t}) ds = \nu U_A(U_A^\alpha f).$$

Par suite,

$$\nu U((1 - w) U_A^\alpha f) = 0,$$

ce qui entraîne, d'après la dualité que :

$$\nu U[f, \hat{U}_A^\alpha(1 - w)] = 0$$

c'est-à-dire, ξ p. s. $\hat{U}_A^\alpha(1 - w) = 0$.

Or

$1 - w \geqq \hat{E}.(0 < \hat{T}_A < +\infty)$, $\qquad \xi$ p. s. $\hat{U}_A^\alpha[E.(0 < \hat{T}_A < +\infty)] = 0$.

Cette fonction étant $\hat{X}_A$ α-coexcessive, $\hat{U}_A^\alpha[E.(0 < T_A < +\infty)] = 0$ partout. Mais la fonction $E.(0 < \hat{T}_A < +\infty)$ est aussi $\hat{X}_A$ excessive, donc :

$$E_x(0 < \hat{T}_A < +\infty) = 0 \qquad \forall x \in E,$$

soit encore :

$$\hat{P}_x(\hat{T}_A = 0) + \hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1$$
$$\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_{({}^rA)^c}.$$

b) *Réciproquement :* $\hat{P}_x(\hat{T}_A = \infty) = 1_{({}^rA)^c}$.

$$\hat{U}_A^\alpha(\hat{P}.(\hat{T}_A = 0))(y) = \hat{E}_y \int_0^{\hat{T}_A} \hat{P}_{X_t}(\hat{T}_A = 0) dt = 0,$$

car pour $t < \hat{T}_A$, $\hat{X}_t \notin {}^rA$ p. s., donc :

$$\hat{U}_A^\alpha[\hat{P}.(\hat{T}_A = \infty)](y) = \hat{U}_A^\alpha 1(y).$$

Par dualité,

$$\langle U_A^\alpha 1, 1 - w \rangle_\xi = \langle U_A^\alpha 1, \hat{P}.(\hat{T}_A < +\infty) \rangle_\xi$$
$$= \langle 1, \hat{U}_A^\alpha(\hat{P}.(\hat{T}_A < +\infty)] \rangle_\xi = 0,$$

car ξ p. s. $1 - w = \hat{P}.(\hat{T}_A < +\infty)$.

Donc $\nu U(U_A^\alpha 1) = \nu U_A(U_A^\alpha 1)$, ce qui s'écrit :

$$E_\nu \int_0^{+\infty} dt E_{X_t} \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} ds = E_\nu \int_0^{T_A} dt E_{X_t} \int_0^{T_A} e^{-\alpha s} ds.$$

Il existe donc Ω' tel que $P_\nu(\Omega') = 1$ et tel que:

$$\forall\, \omega \in \Omega' \qquad \int_{T_A(\omega)}^{+\infty} dt \int_0^{T_A \circ \theta_t(\omega)} e^{-\alpha s} ds = 0$$

d'où:

$$T_A \circ \theta_t(\omega) = 0 \text{ p. s.}$$

presque-surement pour la mesure de Lebesgue, si $t \geqq T_A$. Mais si il existait t_0 tel que $T_A \circ \theta_{t_0}(\omega) > 0$, d'après la continuité à droite des trajectoires, il existerait $\varepsilon > 0$, tel que $\forall\, t \in [t_0, t_0 + {}^{\varepsilon}]$, $X_t(\omega) \notin A$, ce qui est contradictoire avec $T_A \circ \theta_t(\omega) = 0$ presque-sûrement pour la mesure de Lebesgue. Donc:

$$T_A \circ \theta_t = 0 \qquad P_\nu \text{ p. s. pour} \qquad t \geqq T_A.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] BLUMENTHAL et GETOOR, *Markov Processes and Potential Theory*. Academic Press, New York, London, 1968.

[2] CARTIER, MEYER et WEIL, *Séminaire de Probabilités II*, Springer Verlag, 1968.

[3] KUNITA et WATANABE, On certain reversed processes and their applications to potential theory and boundary theory, *J. of. Math. and Mech.*, vol. XV, n° 3, 1966.

[4] CHUNG et WALSH, *Acta Math.*, t. **123**, 1969.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1970).