Annales de l'I. H. P., section B

H. Heinich

Intégration pour une mesure à valeurs dans un groupe topologique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 7, nº 3 (1971), p. 177-192

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1971__7_3_177_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. VII, n° 3, 1971, p. 177-192.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Intégration pour une mesure à valeurs dans un groupe topologique

par

H. HEINICH

(Laboratoire de Calcul des Probabilités, Université, Paris VI^e^).

SUMMARY. — We define the space $\mathscr{L}$ of S-valued functions, integrable with respect to a G-valued measure, where S and G are topological groups.

It is proved that if S is a complete metrisable space satisfying an additional property, $\mathscr{L}$ is a complete metrisable group. The integral becomes a continuous homomorphism from $\mathscr{L}$ into a third complete metrisable group J, and preserves the main properties of the classical case.

This framework is sufficient to allow us to obtain the fundamental martingale convergence theorem, and to establish a Radon Nicodym theorem.

0. — NOTATIONS

Les groupes considérés sont tous abéliens et de loi notée $+$, d'élément neutre 0.

Soit G un groupe topologique ; on rappelle qu'une G-mesure, μ, est une application σ-additive de $\mathscr{A} \to$ G ; $\mathscr{A}$ tribu sur Ω. S et J désignerons deux groupes métrisables complets et $|\,.\,|$ la distance à 0.

S est supposé vérifier la condition suivante :

Pour tout système fini $(s, a_1, \ldots, a_n) \subset$ S tel que

$$|s| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

il existe $(s_1, \ldots, s_n) \subset S$ avec

$$s = \sum_{i=1}^{n} s_i \quad \text{et} \quad |s_i| \leqslant |a_i|$$

On notera $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions étagées de Ω dans S. Soit θ une application de $G \times S$ dans J qui soit séparément un homomorphisme de groupes ; on notera $\theta(x, s) = x \cdot s = x(s)$.

I

Dans les conditions précédentes μ induit un homomorphisme de $\mathscr{E}$ dans J par la formule

$$\mu(\varphi) = \sum_{1}^{p} \mu(A_n) \cdot s_n \quad \text{où} \quad \varphi = \sum_{1}^{p} s_n 1_{A_n}$$

On notera $|f| \leqslant |g|$ si $|f(\omega)| \leqslant |g(\omega)|$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Définitions

— Pour $\varphi \in \mathscr{E}$ on pose

$$N(\varphi) = \sup_{\substack{\psi \in \mathscr{E} \\ |\psi| \leqslant |\varphi|}} |\mu(\psi)|$$

— On dit que μ est bornée si $N(s) < +\infty$ tout $s \in S$
$N(s) \to 0$ quand $s \to 0$
et $N(s|_A) \to 0$ quand $A \searrow \emptyset$ $\forall A \in \mathscr{A}$.

Proposition 1

Si φ *et* $\psi \in \mathscr{E}$ *avec* $|\varphi| \leqslant |\psi|$ *alors* $N(\varphi) \leqslant N(\psi)$.
Si φ *et* $\psi \in \mathscr{E}$ *alors* $N(\varphi + \psi) \leqslant N(\varphi) + N(\psi)$.

Si $\{\varphi_p\}_{p=1\ldots n} \subset \mathscr{E}$ *alors* $\displaystyle\sum_{1}^{n} N(\varphi_p) \geqslant N\left(s|_{\left\{\sum_{1}^{n}|\varphi_p| \geqslant |s|\right\}}\right)$

Définitions. — Un ensemble est dit négligeable (on dira aussi nul) s'il est contenu dans un $A \in \mathscr{A}$, tel que $N(s|_A) = 0$ tout $s \in S$. Cette définition donne un sens aux expressions du type :

$$\varphi \text{ est } \mu\text{-nulle} \quad \text{et} \quad \varphi_n \to f \;\; \mu \text{ p.s.}$$

THÉORÈME D'EGOROFF POUR UNE MESURE BORNÉE. — *Soit* $\{ f_n \}$ *une suite de fonctions mesurables convergeant simplement. Pour toute suite* $\{ \varepsilon_p \}$ *de nombres* > 0, *décroissante vers* 0 *; pour toute suite* $\{ s_p \} \subset \mathrm{S}$ *telle que* $|s| \nearrow \sup_{\mathrm{S}} |s|$ — *atteint si fini.*

Il existe une suite décroissante, $\{ \mathrm{B}_p \} \subset \mathscr{A}$, *vers un ensemble négligeable, telle que :* $\mathrm{N}(s|_{\mathrm{B}_p}) \leqslant \varepsilon_p$ *et les* f_n *convergent uniformément sur* B_p^c.

Démonstration. — On pose

$$\mathrm{B}_{n,m} = \bigcup_{\substack{l \\ q \geqslant n}} \left\{ d(f_l, f_q) > \frac{1}{m} \right\}$$

les $\mathrm{B}_{n,m}$ décroissent vers l'ensemble vide lorsque $n \to \infty$; donc pour m et p fixés, notons $n_{(p,m)}$ l'inf des k tels que pour tout $n \geqslant k$ on ait

$$\mathrm{N}(s_p|_{\mathrm{B}_{n,m}}) \leqslant \varepsilon_p/2^m.$$

La suite $\mathrm{B}_p = \bigcup_m \mathrm{B}_{n(p,m),m}$ est décroissante.

LEMME
$$\mathrm{N}\left(s|_{\sum_1^\infty \mathrm{A}_n}\right) \leqslant \sum_1^\infty \mathrm{N}(s|_{\mathrm{A}_n})$$

Ce lemme admis, on a

$$\mathrm{N}(s_p|_{\mathrm{B}_p}) \leqslant \sum_m \mathrm{N}(s_p|_{\mathrm{B}_{n(p,m),m}}) \leqslant \varepsilon_p$$

Soit $\mathrm{B} = \lim_p \mathrm{B}_p = \bigcap_p \mathrm{B}_p$ et $s \in \mathrm{S}$ alors il existe p :

$$|s| \leqslant |s_p| ; \ \mathrm{N}(s|_{\mathrm{B}}) \leqslant \mathrm{N}(s_p|_{\mathrm{B}}) \leqslant \mathrm{N}(s_q|_{\mathrm{B}}) \leqslant \mathrm{N}(s_q|_{\mathrm{B}_q}) \leqslant \varepsilon_q \quad \text{pour} \quad q \geqslant p$$

en faisant tendre q vers l'infini : B est nul.
Enfin la convergence est uniforme sur B_p^c.

Démonstration du lemme. — Il suffit d'écrire

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n = \sum_1^{\mathrm{M}} \mathrm{A}_n + \sum_{n>\mathrm{M}} \mathrm{A}_n$$

comme

$$\sum_{n>\mathrm{M}} \mathrm{A}_n \to \varphi, \quad \mathrm{N}\left(s|_{\sum_{n>\mathrm{M}} \mathrm{A}_n}\right) < \varepsilon \quad \text{dès que} \quad \mathrm{M} \geqslant \mathrm{M}_\varepsilon$$

et

$$N(s\,|_{\Sigma A_n}) \leqslant \sum_1^M N(s\,|_{A_n}) + \varepsilon \leqslant \sum_1^\infty N(s\,|_{A_n}) + \varepsilon.$$

COROLLAIRE. — *μ bornée. Si $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ est telle que $|\varphi_n| \searrow 0$. Alors $N(\varphi_n)$ décroit vers* 0.

Démonstration. — Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe δ: $|s| \leqslant \delta \Rightarrow N(s) \leqslant \varepsilon$. Soit s_1 réalisant le sup de φ_1 i. e. $|s_1| \geqslant |\varphi_1(\omega)|$. $\exists B$ (Egoroff) dépendant de ε et de s_1 tel que $N(s_1\,|_B) \leqslant \varepsilon$, *a fortiori* $N(\varphi_n\,|_B) \leqslant \varepsilon$; et sur B^c la convergence est uniforme d'où $\exists M_\delta$: $n \geqslant M_\delta$, $\sup\limits_{B^c} |\varphi_n(\omega)| \leqslant \delta$ en prenant un s_n réalisant ce sup on obtient :

$$N(\varphi_n) \leqslant N(\varphi_n\,|_B) + N(s_n\,|_{B^c}) \leqslant 2\varepsilon \quad \text{dès que} \quad n \geqslant M_{\delta(\varepsilon)}.$$

II. INTÉGRATION

DÉFINITIONS

— Une suite $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ est dite associée à f si

(α) $\varphi_n \to f$ μ p. s.

(β) Pour toute suite $\{A_p\} \subset \mathscr{A}$ décroissante vers un nul,

$$\lim_p\,[\sup_n N(\varphi_n\,|_{A_p})] = 0$$

— On désigne par $\mathscr{L}$ l'ensemble des f possédant une suite associée.

THÉORÈME 1. — *Si $\{\varphi_n\}$ est une suite associée a la fonction* 0 *alors* $N(\varphi_n) \to 0$.

Démonstration. — Analogue au corollaire précédent en remarquant que $B_p \searrow$ nul, donc que $\sup\limits_n N(\varphi_n\,|_{B_p}) \leqslant \varepsilon$ si $p \geqslant P_\varepsilon$.

COROLLAIRE 1. — *Si $\{\varphi_n\}$ est associée à f alors:* $N(\varphi_n - \varphi_p) \to 0$; *le nombre* $N(f) = \lim\limits_n N(\varphi_n)$ *est bien défini et* $N(f - \varphi_n) \to 0$.

Démonstration. — La suite $\{\xi_l\} = \{\varphi_n - \varphi_p\}$, $l = (n, p) \in \mathbb{N}^2$ vérifie les conditions du théorème 1, donc $N(\xi_l) \to 0$: la suite $N(\varphi_n)$ converge. Par ailleurs si $\{\psi_p\}$ est associée à f, la suite $\{\varphi_n - \psi_p\}$ est associée à 0 donc $N(\varphi_n - \psi_p) \to 0$: $N(f)$ bien définie. Enfin si $\{\varphi_n\}$ est associée à f, $\{\varphi_n - \varphi_{p_0}\}$ est associée à $f - \varphi_{p_0}$ donc

$$N(f - \varphi_{p_0}) = \lim_n N(\varphi_n - \varphi_{p_0}) \leqslant \varepsilon$$

si p_0 est grand.

THÉORÈME 2. — *$\mathscr{E} \subset \mathscr{L}$ et $\mathscr{L}$ est un groupe complet pour la métrique $d(f, g) = \mathrm{N}(f - g)$.*

Démonstration. — Les deux premières assertions sont triviales. Supposons donc que $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ est telle que $\Sigma \mathrm{N}(\varphi_n) < +\infty$,

il existe
$$\mathrm{M}_\varepsilon : \sum_{n \geqslant \mathrm{M}_\varepsilon} \mathrm{N}(\varphi_n) \leqslant \varepsilon$$

on en déduit
$$\mathrm{N}\Big(s\,|_{\sum_{n \geqslant \mathrm{M}_\varepsilon} |\varphi_n| \geqslant |s|}\Big) \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout} \quad s \in \mathrm{S}$$

Si
$$\mathrm{A}_p^\varepsilon = \Big\{ \sum_{n \geqslant \mathrm{M}_\varepsilon} |\varphi_n| > p \Big\}$$

on a :
$$\mathrm{N}(s\,|_{\mathrm{A}_p^\varepsilon}) \leqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad |s| \leqslant p.$$

En notant
$$\mathrm{A}^\varepsilon = \lim_p \searrow \mathrm{A}_p^\varepsilon : \ \mathrm{N}(s\,|_{\mathrm{A}^\varepsilon}) \leqslant \varepsilon \quad \text{tout} \quad s \in \mathrm{S}$$

Prenons une suite
$$\varepsilon_n \searrow 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_0 = \bigcap_n \mathrm{A}^{\varepsilon_n}$$

alors
$$\mathrm{N}(s\,|_{\mathrm{A}_0}) \leqslant \mathrm{N}(s\,|_{\mathrm{A}^{\varepsilon_n}}) \leqslant \varepsilon_n \quad \forall n : \ \mathrm{A}_0 \text{ est négligeable.}$$

Par ailleurs, si $\omega \notin \mathrm{A}_0 \Rightarrow \exists \varepsilon$ et p tels que :
$$\sum_{n \geqslant \mathrm{M}_\varepsilon} |\varphi_n(\omega)| \leqslant p$$

donc sur A_0^c $\Sigma\varphi_n(\omega)$ converge dans S complet. Posons $f(\omega) = 0$ si $\omega \in \mathrm{A}_0$ et $f(\omega) = \Sigma\varphi_n(\omega)$ sur A_0^c, la suite
$$\Big\{ \sum_1^{\mathrm{M}} \varphi_n \Big\}_{\mathrm{M}}$$
est associée à f.

En effet, la condition (β) est réalisée car :
$$\sum_1^{\infty} \mathrm{N}(\varphi_n\,|_{\mathrm{A}}) \leqslant \sum_{n \leqslant \mathrm{M}_\varepsilon} \mathrm{N}(\varphi_n\,|_{\mathrm{A}}) + \varepsilon$$

qui est bien inférieur à 2ε quand A décroit vers un nul. Ainsi

$$f \in \mathscr{L} \quad \text{et} \quad \mathrm{N}\left(f - \sum_{1}^{\mathrm{M}} \varphi_n\right) \to 0\,;$$

ce qui montre que toute suite de Cauchy dans $\mathscr{E}$ converge dans $\mathscr{L}$, or $\mathscr{E}$ est dense dans $\mathscr{L}$: le théorème est démontré.

PROPOSITION 1. — *Soient* $f \in \mathscr{L}$ *et* $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$, *telles que* $\mathrm{N}(f - \varphi_n) \to 0$ *alors il existe une sous-suite* $\{\varphi_{n_p}\}$ *associée à* f.

Démonstration. — Dans le cas où $f = 0$, nous avons vu dans la démonstration précédente qu'il existait $\{\varphi_{n_p}\}$ avec $\Sigma\varphi_{n_p}$ convergeant p. s. Si $f \neq 0$, soit $\{\psi_n\}$ une suite associée à f.

Alors $\mathrm{N}(\varphi_n - \psi_n) \to 0$ donc il existe une sous-suite : $\varphi_{n_p} \to f$ μ-p. s. ; par ailleurs (β) est vérifiée et $\{\varphi_{n_p}\}$ est associée à f.

THÉORÈME 3, de convergence dominée. — *Si* $\{\varphi_n\}$ *est une suite* $\subset \mathscr{E}$ *telle que* $\varphi_n \to f$ p. s. *et il existe* $g \in \mathscr{L}$ *avec* $|\varphi_n| \leqslant |g|$ *alors* $f \in \mathscr{L}$ *et* $\mathrm{N}(f - \varphi_n) \to 0$.

Démonstration. — Pour toute fonction $g \in \mathscr{L}$: $\mathrm{N}(g|_{\mathrm{A}_p}) \to 0$ quand $\mathrm{A}_p \searrow$ nul ; la condition (β) est vérifiée pour la suite $\{\varphi_n\}$.

THÉORÈME 4. — *Si* $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ *est telle que :*

$$\varphi_n \to f \text{ p. s.} \quad \text{et} \quad \sup_n \mathrm{N}[\varphi_n|_{|\varphi_n| \geqslant |s|}] \to 0$$

quand $|s| \nearrow \sup_{\mathrm{S}} |s|$ — atteint si fini — Alors $f \in \mathscr{L}$ et $\mathrm{N}(f - \varphi_n) \to 0$.

Démonstration. — Nous avons les inégalités suivantes :

$$\mathrm{N}(\varphi_n|_{\mathrm{A}}) \leqslant \mathrm{N}(\varphi_n|_{\mathrm{A} \cap |\varphi_n| \geqslant |s|}) + \mathrm{N}(\varphi_n|_{\mathrm{A} \cap |\varphi_n| < |s|})$$

donc

$$\sup_n \mathrm{N}(\varphi_n|_{\mathrm{A}}) \leqslant \mathrm{N}(s|_{\mathrm{A}}) + \sup_n \mathrm{N}(\varphi_n|_{|\varphi_n| \geqslant |s|})$$

le second membre tend vers 0 quand A décroit vers un négligeable.

THÉORÈME 5. — *Si une suite* $\{f_n\} \subset \mathscr{L}$ *converge* p. s. *vers* g *; et dans* $\mathscr{L}$ *vers* f. *Alors* $f = g$ p. s.

Démonstration. — Étudions le cas $f = 0 - \mathrm{N}(f_n) \to 0$.

Les f_n sont mesurables et prennent leurs valeurs dans un sous-espace séparable de S, il en est de même pour g. Donc g est limite d'une suite $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$.

Appliquons le théorème d'Egoroff aux suites $\{f_n\}$ et $\{\varphi_n\}$, on trouve une suite $\{B_p\} \subset \mathscr{A}$ décroissante vers un ensemble négligeable, et sur B_p^c la suite $\{f_n - \varphi_n\}$ converge uniformément vers 0.

Soit $\{s_l\}$ une suite telle que $|s_l|$ décroît vers 0, alors $n \geqslant N_l$ entraîne $|\varphi_n(\omega) - f_n(\omega)| \leqslant |s_l|$ pour tout $\omega \in B_p^c$ et $N(\varphi_n|_{B_p^c}) \leqslant N(f_n|_{B_p^c}) + N(s_l)$; on en déduit $N(\varphi_n|_{B_p^c}) \to 0$, si S était discret on aurait égalité à 0 à partir d'un certain rang.

Nous pouvons conclure — proposition 1 — qu'il existe une sous-suite extraite $\{\varphi_{n_i}\}$ qui converge p. s. vers 0, sur B_p^c. Il ne reste plus qu'à faire tendre p vers l'infini pour voir que $g = 0$ p. s.

Le théorème se démontre en considérant $\{f_n - f\}$ qui converge p. s. vers $g - f$ et $N(f_n - f) \to 0$.

THÉORÈME 6. — *Si $\{f_n\}$ est une suite $\subset \mathscr{L}$ convergeant p. s. vers f et telle que*

$$\lim_p [\sup_n N(f_n|_{A_p})] = 0$$

quand A_p décroît vers un ensemble nul. Alors $f \in \mathscr{L}$ et $N(f_n - f) \to 0$.

Démonstration. — La suite $\{f_n - f_m\}$ vérifie la même condition sur le sup. Avec le théorème d'Egoroff il existe $\{B_p\}$ décroissant vers un nul tel que sur B_p^c, $\{f_n - f_m\}$ converge uniformément, donc $N(f_n - f_m|_{B_p^c}) \to 0$ quand n, m tendent vers l'infini et comme

$$\sup_{n,m} N(f_n - f_m|_{B_p}) \leqslant 2 \sup_n N(f_n|_{B_p}) \to 0$$

il en résulte que $N(f_n - f_m)$ est de Cauchy dans $\mathscr{L}$ et f_n converge nécessairement vers f (théorème 5).

III. — MARTINGALES A VALEURS DANS UN GROUPE TOPOLOGIQUE

DÉFINITIONS ET NOTATIONS. — Les définitions classiques de familles $\{X_t\}$, $t \in T$ de variables adaptées à des tribus $\{\mathscr{A}_t\}$ se transposent, si $X_t : \Omega \to S$. Il en est de même pour la notion de temps d'arrêt. La famille $\{X_t\}$, $t \in T$ filtrant croissant, est une martingale si pour tout $t \leqslant t'$

$$\int_A X_t d\mu = \int_A X_{t'} d\mu$$

dès que $A \in \mathscr{A}_t$.

LEMME 1. — *Soit* $(X_n, \mathscr{A}_n)$ *une martingale à valeurs dans* S *et soit* (T_i), $i = 1, \ldots, p$ *un système de temps d'arrêt relatif aux* $(\mathscr{A}_n)$. *Alors* $(X_{T_i}, \mathscr{A}_{T_i})$ *est une martingale.*

On reprend la démonstration de Meyer [*1*], p. 112, t. 9.

LEMME 2. — *Soit* $(X_n, \mathscr{A}_n)$ *une martingale. Alors si* $Y_l = X_n - X_p$, $\mathscr{A}_l = \mathscr{A}_n \cap \mathscr{A}_p$ $(Y_l, \mathscr{A}_l)$ *est aussi une martingale.*

Démonstration évidente.

Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\mathscr{A}$ et X une v. a. de $\Omega \mapsto$ S on posera

$$M_{\mathscr{B}}(X) = \sup \sum_n N(X|_{B_n}) \quad \text{pour} \quad \sum_{n=1}^{\infty} B \subset \Omega \quad \text{et} \quad \{B_n\} \subset \mathscr{B}.$$

Supposons en outre que S soit ordonné et vérifie les deux conditions suivantes :

— Il existe une suite $\{s_n\} \subset$ S d'éléments positifs, telle que

$$V_n = \{s : -s_n \leqslant s \leqslant s_n\}$$

forment une base de voisinages de zéro.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $s \in$ S, il existe $\{s_i\}_{i=1\ldots e} \subset$ S avec $0 \leqslant s_i \leqslant s_n$ et $|s| \leqslant \left|\sum_1^e s_i\right|$.

Dans ce cas une G-mesure μ, sera dite S-positive si

$$\begin{cases} M_{\mathscr{A}}(s) < +\infty & \text{pour tout} \quad s \in S \\ \text{et si} \quad s > 0, \ \forall A \in \mathscr{A} \ \ \forall f \in \mathscr{L} & \text{tels que} \quad s|_A \leqslant f \\ \text{alors} \quad N(s|_A) = |\mu(A).s| \leqslant \left|\int f d\mu\right|. \end{cases}$$

THÉORÈME DE CONVERGENCE DES MARTINGALES. — *Soit* μ *une* G*-mesure* S*-positive telle que* $M_{\mathscr{A}}(s) < +\infty$, $\forall s \in$ S. *Soit* $\{X_n, \mathscr{A}_n\}$ *une martingale telle que* $\sup_n M_{\mathscr{A}_n}(X) < +\infty$. *Alors* X_n *converge p. s. vers une application* X *de* $\Omega \to$ S *et si de plus* $\{X_n\}$ *vérifie la condition* (β) *alors* $X \in \mathscr{L}$ *et* $N(X_n - X) \to 0$.

Démonstration. — Nous allons considérer la martingale $Y_l = X_n - X_p$. La démonstration s'inspire de celle donnée par Neveu ([*2*], p. 127). Soit $s_0 \in \{s_n\}$ et p un entier, on se restreint à Y_l pour $l \leqslant (p, p)$. On considère τ_m

temps d'arrêt relatifs à (Y_l) — passages au-dessus de s_0 et au-dessous de $-s_0$ — de même soit Ω_m les ensembles de définition des τ_m.

$\Omega_{2m} = \{\omega : Y_l(\omega),\ l \leqslant (p, p)$ descend au moins m fois $(-s_0, s_0)\}$

On obtient les égalités suivantes :

$$\int_{\Omega_{2m-1}} (Y_{\tau_{2m-1}} - s_0)d\mu + \int_{\Omega_{2m}} (s_0 - Y_{\tau_{2m}})d\mu$$
$$= \int_{\Omega_{2m-1}-\Omega_{2m}} (Y_{\tau_{2m}} - s_0)d\mu = \int_{\Omega_{2m-1}-\Omega_{2m}} (Y_{(p,p)} - s_0)d\mu.$$

Posons
$$\zeta(\omega) = (Y_{\tau_{2m-1}} - s_0)\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m-1}}(\omega) + (s_0 - Y_{\tau_{2m}})\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m}}(\omega)$$

Alors si $0 \leqslant s \leqslant s_0$ on a $s\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m}}(\omega) \leqslant \zeta(\omega)$, d'où
$$N(s\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m}}) \leqslant N[(Y_{(p,p)} - s_0)\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m-1}-\Omega_{2m}}]$$
et
$$\sum_m N(s\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m}}) \leqslant M_{\mathscr{A}_{(p,p)}}(Y_{(p,p)} - s_0) < +\infty$$

En remettant partout l'indice p — pour rappeler que $l \leqslant (p, p)$ — on a :
$$\sup_p \sum_n N(s\,\mathrm{I}_{\Omega^p_{2m}}) \leqslant \sup_p M_{\mathscr{A}_{(p_1 p)}}(Y_{(p_1 p)} - s_0) < +\infty$$

il est clair que $\Omega^p_{2m} \subset \Omega^{p+1}_{2m}$ ainsi :
$$\sup_p \sum_m N(s\,\mathrm{I}_{\Omega^p_{2m}}) = \sum_m \lim_p N(s\,\mathrm{I}_{\Omega^p_{2m}}) < +\infty$$

En écrivant $\Omega_{2m} = \lim\limits_p \Omega^p_{2m}$ il vient
$$\sum_m N(s\,\mathrm{I}_{\Omega_{2m}}) < +\infty \quad \text{si} \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0$$

dans cette majoration notons $\Omega^{s_0}_{2m}$ l'ensemble Ω_{2m} qui dépend de s_0.

$\Omega^{s_0}_{2m}$ est décroissant vers Ω^{s_0} quand $m \to \infty$.

$\Omega^{s_0} = \{\omega : Y_l(\omega)$ descend une infinité de fois l'intervalle $(-s_0, s_0)\}$.

Nous allons montrer que Ω^{s_0} est négligeable.

Si s est quelconque, en utilisant $|s| \leqslant \left|\sum_1^l s_i\right|$ où $0 \leqslant s_i \leqslant s_0$ on en déduit que Ω^{s_0} est négligeable. La démonstration s'achève en remarquant que si $\omega \notin \Omega = \bigcup_n \Omega^{s_n}$, $Y_t(\omega)$ converge vers zéro : c'est le critère de Cauchy et $\{X_n\}$ converge p. s. Soit X la limite p. s. avec la condition (β) et le théorème 6

$$X \in \mathscr{L} \quad \text{et} \quad N(X - X_n) \to 0$$

COROLLAIRE. — *Si* $(X_t, \mathscr{A}_t)_{t \in T}$ *est une martingale vérifiant :*

— $\sup_T M_{\mathscr{A}_t}(X_t) < +\infty$

— $\sup_T N(X_t|_A) \to 0$ *quand* A $\searrow$ *négligeable.*

Alors $\{X_t\}_{t \in T}$ *converge dans l'espace* $\mathscr{L}$ *vers une fonction* X *telle que*

$$\int_A X d\mu = \int_A X_t d\mu$$

dès que $A \in \mathscr{A}_t$.

Démonstration. — C'est une transposition d'un théorème. Meyer [*1*], p. 119.

IV. — COMPLÉMENT SUR LES MESURES ET L'INTÉGRATION

1. — Nous dirons qu'une fonction $f : \Omega \to S$ est mesurable si f est limite simple de fonctions étagées. Si $f(\Omega)$ séparable dans S on retrouve la notion habituelle.

On aimerait établir une relation simple du type:

$$* \quad f \in \mathscr{L} \Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ est p. s. égale à une fonction mesurable et } \sup N(\varphi) < +\infty, \\ \quad \text{le sup étant pris pour } \varphi \in \mathscr{E}, \ |\varphi| \leqslant |f|. \end{cases}$$

LEMME 1. — *Pour tout* $f \in \mathscr{L}$

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E} \\ |\varphi| \leqslant |f|}} N(\varphi) \leqslant N(f).$$

Démonstration. — Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite associée à f et soit $\psi \in \mathscr{E}$, $|\psi| \leqslant |f|$. Posons

$$\begin{aligned} \psi_n(\omega) = (\psi_\wedge \varphi)(\omega) &= 1) \ \varphi_n(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \in A = \{ |\psi| = |f| \} \\ &= 2) \ \psi(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \notin A \quad \text{et} \quad |\psi(\omega)| < |\varphi(\omega)| \\ &= 3) \ \varphi_n(\omega) \quad \text{si} \quad \omega \notin A \quad \text{et} \quad |\varphi_n(\omega)| \leqslant |\psi(\omega)| \end{aligned}$$

On voit que $\psi_n(\omega) \to \dot\psi(\omega)$ avec $\dot\psi = f 1_A + \psi 1_{A^c}$ et $|\psi_n| \leqslant |\varphi_n|$; $|\dot\psi| = |\psi|$ donc $N(\dot\psi) = N(\psi)$ et comme ψ_n converge vers $\dot\psi$ dans $\mathscr{L}$ — dominée par $|\psi|$ — on a :

$$N(\psi) \leqslant N(f) = \lim N(\varphi_n)$$

Remarque. — Si nous pouvions assurer que toute fonction mesurable est limite d'une suite de fonctions étagées croissantes — au sens $|\,.\,|\nearrow$ — *dans le cas où la distance sur* J *est bornée, alors toute fonction mesurable serait dans* $\mathscr{L}$. *Ceci est faux en général, c. f. contre-exemples.*

Nous allons reformuler le problème *.

2. — Mesure à variation bornée.

Soit μ une G-mesure bornée, pour toute $f \in \mathscr{L}$ on pose

$$\mathrm{M}(f\,|_{\mathrm{A}}) = \sup_{\substack{\Sigma \mathrm{A}_n \subset \mathrm{A} \\ \{\mathrm{A}_n\} \subset \mathscr{A}}} \sum_n \mathrm{N}(f\,|_{\mathrm{A}_n}) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

On dira que μ est à variation bornée (v. b.) relativement aux espaces (G, S, J) si

$$\begin{cases} \mathrm{M}(s) < +\infty \quad \forall s \in \mathrm{S} \\ \mathrm{M}(s) \text{ tend vers zéro quand } s \to 0 \end{cases}$$

PROPOSITION 1. — *Pour μ v. b. on a :*

— $\mathrm{N}(s\,|_{\mathrm{A}}) \leqslant \mathrm{M}(s\,|_{\mathrm{A}}) \quad \forall s \in \mathrm{S}$ *et* $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$.

— *Si* $\mathrm{A}_n \searrow$ *vers un ensemble négligeable, alors* $\mathrm{M}(s\,|_{\mathrm{A}_n}) \to 0$.

Démonstration immédiate.

PROPOSITION 2. — *Si $f \in \mathscr{L}$ la fonction d'ensemble* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{M}(f\,|_{\mathrm{A}})$ *est une mesure à valeurs dans* $\overline{\mathrm{R}}_+$. *Et μ est a v. b. si et seulement si* $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{M}(s\,|_{\mathrm{A}})$ *est bornée pour tout* $s \in \mathrm{S}$.

Démonstration immédiate.

THÉORÈME D'EGOROFF POUR UNE MESURE V. B. — *Si* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions mesurables convergeant μ-p. s. Alors pour toute suite* $\{\varepsilon_p\}$ *de nombres* > 0, *et toute suite* $\{s_p\} \subset \mathrm{S}$ *telle que* $s_p \neq 0$. *Il existe* $\{\mathrm{B}_p\} \subset \mathscr{A}$ *telle que sur* B_p^c *les* f_n *convergent uniformément et* $\mathrm{M}(s_p\,|_{\mathrm{B}_p}) \leqslant \varepsilon_p$. *De plus si* $\{\varepsilon_p\}$ *est décroissante vers* 0 *et* $\{s_p\}$ *telle que* $|s_p| \nearrow \sup |s|$ — *atteint si fini — alors on peut choisir* $\{\mathrm{B}_p\}$ *décroissante vers un ensemble négligeable.*

Démonstration analogue à celle déjà donnée.

Comme pour l'espace $\mathscr{L}$ définissons L = l'ensemble des fonctions $f : \Omega \mapsto \mathrm{S}$ tel qu'il existe $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{E}$ avec

(α) $\varphi_n \to f$ p.s.

et (β') $\sup\limits_n \mathrm{M}(\varphi_n\,|_{\mathrm{A}_p}) \mapsto 0$ quand $\{\mathrm{A}_p\} \searrow$ négligeable.

Nous avons si μ v. b. $\mathscr{E} \subset \mathrm{L} \subset \mathscr{L}$.

THÉORÈME 1. — *$f \in \mathrm{L}$ si et seulement si, il existe $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ telle que $\varphi_n \to f$* p. s. *et* $\mathrm{M}(\varphi_n|_\mathrm{A})$ *converge pour tout* $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$.

Démonstration. — Soit $\{\varphi_n\}$ associée au sens L à f. Considérons $\theta_l = \varphi_n - \varphi_p$, $\theta_l \to 0$ p. s. et vérifie (β'). En appliquant Egoroff on vérifie que $\mathrm{M}(\theta_l) \to 0$ donc $\mathrm{M}(\varphi_n|_\mathrm{A})$ converge pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$. Réciproquement, si $\mathrm{M}(\varphi_n|_\mathrm{A})$ converge la condition (β') résulte du théorème de Vitali-Hahn-Saks.

COROLLAIRE. — *Si $\{\varphi_n\}$ est associée à f au sens* L *alors :*

$$\mathrm{M}(f) < +\infty, \quad \mathrm{M}(f - \varphi_n) \to 0 \quad \textit{et} \quad \mathrm{M}(f) = \lim_n \mathrm{M}(\varphi_n)$$

de plus

$$\mathrm{M}(f) \geqslant \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E} \\ |\varphi| \leqslant |f|}} \mathrm{M}(\varphi)$$

Démonstration. — Le théorème précédent montre que $\mathrm{M}(\varphi_n - \varphi_p)$ est de Cauchy et $\mathrm{M}(\varphi_n)$ converge. Par ailleurs

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mathrm{N}((f - \varphi_n)|_{\mathrm{A}_p}) = \sum_p \lim_q \mathrm{N}((\varphi_q - \varphi_n)|_{\mathrm{A}_p}) \leqslant \overline{\lim_q} \sum_p \mathrm{N}((\varphi_q - \varphi_n)|_{\mathrm{A}_p})$$

C'est donc inférieur à ε dès que $n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon$ et $\mathrm{M}(f - \varphi_n) \to 0$. Le dernier point se fait d'une manière analogue au cas $f \in \mathscr{L}$.

PROPOSITION 3. — *Si $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ est une suite croissante, i. e. $|\varphi_n| \nearrow n$; telle que $\varphi_n \to f$ μ p. s. et* $\sup \mathrm{M}(\varphi_n) < +\infty$, *alors $f \in \mathrm{L}$ et* $\mathrm{M}(f - \varphi_n) \to 0$.

On écrit $\varphi_n \xrightarrow{\mathrm{L}} f$.

Démonstration immédiate avec le théorème 1.

THÉORÈME 2. — L *est un groupe complet pour la métrique $d(f, g) = \mathrm{M}(f, g)$.*

Démonstration : on s'inspire de celle du cas $\mathscr{L}$ complet.

Si nous posons $\mathrm{L}^* = \{ f \in \mathscr{L} : \mathrm{M}(f) < +\infty \}$. Alors moyennant l'hypothèse :

C : Toute fonction mesurable est limite d'une suite croissante de fonctions étagées.

Nous obtenons une réponse au problème *.

THÉORÈME 3. — *Si* S *vérifie l'hypothèse* C. *Alors on a les relations suivantes :*

$$f \in \mathscr{L} \Rightarrow \mathrm{N}(f) = \sup \mathrm{N}(\varphi) \qquad \varphi \in \mathscr{E} \quad \text{et} \quad |\varphi| \leqslant |f|$$
$$f \in \mathrm{L} \Rightarrow \mathrm{M}(f) = \sup \mathrm{M}(\varphi) \qquad \varphi \in \mathscr{E} \quad \text{et} \quad |\varphi| \leqslant |f|$$

$$f \in \mathrm{L} \Leftrightarrow f \in \mathrm{L}^* \Leftrightarrow f \textit{ est mesurable } \mu \textit{ p. s. et}$$

$$\sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E} \\ |\varphi| \leqslant |f|}} \mathrm{M}(\varphi) < +\infty$$

Démonstration. — C'est une application directe des théorèmes précédents en prenant une suite $\{\varphi_n\} \subset \mathscr{E}$ telle que $\varphi_n \to f$ p. s. ; et $\{|\varphi_n|\}$ croissante.

Remarques. — Tout espace normé vérifie C.

Si il existe $s_0 : |s_0| = \sup\limits_{\mathrm{S}} |s|$ alors pour μ v. b. toute application mesurable de $\Omega \to \mathrm{S}$ appartient à $\mathrm{L} \subset \mathscr{L}$.

V. THÉORÈME DE RADON NICODYM

DÉFINITIONS

En plus du triplet (G, S, J) on se donne ν une J-mesure à variation forte bornée i. e.

$$|\nu|(\mathrm{A}) = \sup_{\Sigma \mathrm{A}_i \subset \mathrm{A}} \sum_{i=1}^{\infty} |\nu(\mathrm{A})|_{\mathrm{J}}$$

est bornée.

Dans la suite μ sera une G-*mesure* S-*positive* (*voir* § III).

— On dit que ν est absolument continue par rapport à μ et on note $\nu \ll \mu$, si pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}$, il existe $s_{\mathrm{A}} \in \mathrm{S}$ tel que $\nu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A}) \cdot s_{\mathrm{A}}$.

Soit $\mathscr{A}_n$ une tribu engendrée par une partition finie $(\mathrm{A}_i)_{i=1\ldots n}$ de Ω, $\mathrm{A}_i \in \mathscr{A}$. Si nous posons

$$\mathrm{X}_n(\omega) = \sum_{1}^{n} s_{\mathrm{A}_i} 1_{\mathrm{A}_i}(\omega)$$

Alors, pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{A}_n$

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \mathrm{X}_n d\mu.$$

de plus X_n est $\mathscr{A}_n$-mesurable et

$$\mathrm{M}(\mathrm{X}_n) \leqslant \sum_{1}^{n} |\mu(\mathrm{A}_i) \cdot s_{\mathrm{A}_i}| \leqslant |\nu|(\Omega).$$

En considérant une suite croissante $\{ \mathscr{A}_n \}$ de sous-tribus de $\mathscr{A}$ on obtient une martingale $\{ X_n \}_{n \in \mathbb{N}}$.

En outre si $(B_1, \ldots, B_p)$ est une partition d'éléments de $\mathscr{A}_n$

$$\sum_{i=1}^{p} N(X_n |_{B_i})$$

est toujours inférieur à $|v|(\Omega)$.

L'ensemble $A^p = \bigcup_n \{ |X_n| \geqslant p \}$ décroît quand $p \to \infty$; écrivons

$$A = \lim_p A^p = \{ \omega : \forall p \ \exists n_p \quad \text{avec} \quad |X_{n_p}(\omega)| \geqslant p \}$$

La martingale $\{ X_n \}$ est p. s. convergente, donc A est négligeable et

$$\lim_p |v|(A^p) = 0.$$

Pour tout n :

$$N(X_n |_{|X_n| \geqslant p}) \leqslant |v|(|X_n| \geqslant p) \leqslant |v|(A^p) \leqslant \varepsilon \quad \text{si} \quad p \geqslant P_\varepsilon$$

Reprenons les notations $|s_p|$ à la place de p.

Dans le cas où $\sup_S |s| = +\infty$ on a montré que

$$\sup_n N(X_n |_{|X_n| \geqslant |s_p|}) \to 0 \quad \text{quand} \quad |s_p| \nearrow \infty$$

— Le cas sup fini sera traité à la fin.

Avec le théorème 4 et le théorème de convergence des martingales, nous pouvons conclure : $X_n \to X$ dans $\mathscr{L}$ et p. s. Ainsi la densité de v par rapport à μ est bien définie sur toute sous-tribu séparable.

Remarques.

— Pour une mesure bornée nous avons une bonne notion d'ensemble négligeable. Mais pour $f \in \mathscr{L}$ a-t-on

$$\int_A f d\mu = 0 \quad \text{tout} \quad A \in \mathscr{A} \Rightarrow f = 0 \text{ p. s.?}$$

— Si μ est S-positive et $\varphi \in \mathscr{E}$ alors

$$\int_A \varphi d\mu = 0 \quad \text{tout} \quad A \Leftrightarrow N(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ p. s.}$$

Montrons que sur toute sous-tribu séparable on a l'unicité — p. s. — de la densité.

Soit donc $\mathscr{B}$ engendrée par une suite croissante de tribus $\mathscr{A}_n$ finies et $\nu = X_1\mu = X_2\mu$ si $X = X_1 - X_2$ on a

$$\int_A X d\mu = 0 \quad \text{et} \quad X = \lim_n X_n \,; \quad \{ X_n \} \text{ martingale}$$

Par construction

$$\{ X_n \} \subset \mathscr{E} \quad \text{et} \quad \int_A X_n d\mu = 0 \quad \text{tout} \quad A \in \mathscr{A}_n$$

donc (remarque précédente) $N(X_n) = 0$ et de même $M(X_n) = 0$ en faisant tendre n vers l'infini : $N(X) = 0$.

Récapitulons : pour toute sous-tribu séparable $\mathscr{B}$ il existe une densité $X_{\mathscr{B}}$ unique p. s. vérifiant :

$$N(X_{\mathscr{B}}|_A) \leqslant |\nu|(A) \quad \text{pour} \quad A \in \mathscr{B}$$
$$M(X_{\mathscr{B}}) \leqslant |\nu|(\Omega).$$

Lorsque $\mathscr{B}$ varie dans l'ensemble filtrant des sous-tribus séparables de $\mathscr{A}$, $\{ X_{\mathscr{B}} \}$ forme une martingale.

Grâce au corollaire (III) cette martingale converge dans $\mathscr{L}$:

$$\text{soit} \quad X = \underset{\mathscr{B}}{\text{limite}} \text{ dans } \mathscr{L} \text{ des } X_{\mathscr{B}}$$

Alors X est $\mathscr{A}$-mesurable et pour tout $A \in \mathscr{A}$

$$\nu(A) = \int_A X d\mu.$$

L'unicité est évidente. Énonçons :

THÉORÈME DE RADON NICODYM. — *Si ν est une* J-*mesure à variation forte bornée, absolument continue par rapport à μ* G-*mesure* S-*positive. Alors il existe $X \in \mathscr{L}$ unique p. s. telle que pour tout $A \in \mathscr{A}$*

$$\nu(A) = \int_A X d\mu$$

De plus $X \in L$.

Cas où $\sup_{s \in S} |s|_S$ fini.

1. — Supposons que $\forall s \in S,\ |s| < \sup_{s \in S} |s|_S$

On choisit une suite $\{ s_p \} \subset S$ telle que $|s_p| \nearrow \sup_{s \in S} |s|_S$; rien n'est changé dans le raisonnement.

2. — Si il existe $s_0 \in S$ avec $|s_0| = \sup_S |s|$.

Alors $N(X_n) \leqslant N(s_0)$ et si A_p décroît vers un négligeable :

$$\sup_n N(X_n) \leqslant N(s_0 |_{A_p}) \to 0.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] MEYER, *Probabilités et Potentiel*, Publi. Inst. Math. de l'Univ. de Strasbourg.
[2] NEVEU, *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités*, Masson.

Manuscrit reçu le 28 décembre 1970.