

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

JEAN G. DHOMBRES

Sur les opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres de dimension finie

Annales de l'I. H. P., section B, tome 8, n° 4 (1972), p. 333-363

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1972__8_4_333_0

© Gauthier-Villars, 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur les opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres de dimension finie

par

Jean G. DHOMBRES

Institut de Mathématique Pure et Appliquée,
Faculté des Sciences de Paris.
Asian Institute of Technology,
Henri Dunant Street, Bangkok, Thailand.

SUMMARY. — Linear Operators satisfying equations of a more sophisticated aspect than the usual multiplicative operators have already been investigated on different functional algebras under the name of multiplicatively related operators. For these so-called operators the expression $P(fPf)$ is a linear combination of $(Pf)^2$, fPf , $P(f^2)$, f^2 and $P(Pf)^2$. This paper is devoted to a description and study of such operators when they act on a finite-dimensional functional algebra; this means here that functions belonging to the algebra are defined on a finite set. The study suggests decomposition theorems and other properties for more elaborate algebras, like algebras of continuous functions.

Attribuer une « moyenne » à une fonction est un problème généralement difficile sur lequel on dispose par conséquent d'une vaste littérature. Lorsque l'on cherche des moyennes, qui ne soient pas des fonctions constantes, il convient de se placer sur des espaces fonctionnels appropriés et de choisir de « bons » opérateurs linéaires. Deux attitudes sont alors possibles : soit une étude directe compte tenu de l'allure des fonctions à moyenner, soit une recherche axiomatique. Dans cette dernière voie, une idée naturelle consiste à poser que la moyenne se conduit comme une constante vis-à-vis de l'opérateur P , c'est-à-dire que l'on dispose de la relation fondamentale

$$P(fPg) = PfPg$$

Des opérateurs satisfaisant une telle équation ont été étudiés en détail ces dernières années (citons par exemple [13] J. Kampé de Fériet, [6] et [7] G. Birkhoff, [12] M. L. Dubreil-Jacotin, [15] J. L. Kelley, [20] G. C. Rota, [8] J. G. Dhombres, etc.). La théorie des martingales en fait un usage intensif puisque ces opérateurs caractérisent les espérances conditionnelles, moyennant une condition de normalisation et une propriété de continuité (cf. [19] S. T. C. Moy). On rencontre également de tels opérateurs dans des problèmes pratiques concernant les algèbres de Boole ou encore dans certaines questions de logique algébrique. Des opérateurs satisfaisant des équations fonctionnelles d'une forme voisine interviennent naturellement dans un grand nombre de questions venues des horizons les plus divers. Nous renvoyons à [11] J. G. Dhombres pour un bref rappel de motivations historiques. Si l'on tente d'unifier les différents points de vue inventoriés, deux faits s'imposent :

(a) d'une part le groupement $P(fPg + gPf)$ possède une expression généralement simple à partir des fonctions f , g , de leurs transformées par l'opérateur P , de $P(fg)$, etc. ;

(b) d'autre part, une relation de symétrie survient fréquemment $P(fPg) = P(gPf)$. Nous allons étudier ces deux faits séparément. Naturellement, l'étude systématique des divers types d'opérateurs engendre un vocabulaire pédant, et propre à chaque auteur. L'aspect moléculaire du problème soulevé par l'hydrodynamique [13] J. Kampé de Fériet, ou plus prosaïquement une première approche simplifiée, incitent à se placer dans le cadre d'une algèbre de dimension finie. C'est ce que nous ferons dans cet article. Les principaux résultats ont été annoncés dans [10] J. G. Dhombres et l'étude générale sur des algèbres fonctionnelles a été abordée dans un autre travail (cf. [11] J. G. Dhombres).

Dans ce travail, nous fournirons donc sans démonstration les types simples d'opérateurs auxquels on peut parvenir, puis nous envisagerons successivement certains de ces types simples dans les algèbres de dimension finie.

Le plan de l'article est le suivant :

- (I) Opérateurs multiplicativement liés : Rappels de définitions, théorèmes de réduction, cas des algèbres de dimension finie et notations.
- (II) Rôle de la symétrie multiplicative.
- (III) Opérateurs multiplicativement liés classiques.
- (IV) Relations de récurrence.
- (V) Quelques caractérisations algébriques.
- (VI) Opérateurs doublement multiplicativement liés.

1. LES OPÉRATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIÉS

Soit \mathcal{A} une algèbre commutative et unifère de fonctions définies sur un ensemble X et à valeurs dans un domaine d'intégrité, lequel est aussi un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Une telle algèbre sera dite *fonctionnelle*. Nous nous proposons l'étude des opérateurs linéaires : $P : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ pour lesquels on dispose d'une relation du type

$$(1) \quad P(fPg + gPf) = F(f, g, Pf, Pg, P(fg), P(PfPg))$$

où F est une fonction analytique de six variables complexes. On montre facilement que F est nécessairement réduite à un polynôme de la forme :

$$(2) \quad P(fPg + gPf) = APfPg + B(fPg + gPf) + Cfg + DP(fg) + EP(PfPg)$$

où $A, B, C, D,$ et E désignent cinq constantes complexes.

Des opérateurs satisfaisant une telle relation (2) sont dits *multiplicativement liés*.

Deux propriétés simples du comportement de P vis-à-vis de Pe , où e désigne l'élément unité de l'algèbre \mathcal{A} , permettent de ramener l'étude des opérateurs multiplicativement liés à quelques cas simples. Nos hypothèses sont les suivantes :

$$(H) \quad \begin{cases} P(Pe) = Pe \\ P((Pe)^2) = (Pe)^2 \end{cases}$$

En considérant comme équivalentes à ce stade l'étude de P ou celle d'une combinaison linéaire $\alpha P + \beta I$ où I désigne l'opérateur identique et α, β des paramètres arbitraires, on peut démontrer le :

THÉORÈME 1.1. — *Sur une algèbre fonctionnelle, commutative et unifère, un opérateur multiplicativement lié satisfaisant les hypothèses (H) est une somme d'opérateurs des types suivants :*

$B(\alpha)$	$P(fPg + gPf) = \alpha P(fg) + (2 - \alpha)P(PfPg)$
$D(\alpha)$	$P(fPg + gPf) = \alpha P(fg) + (1 - \alpha)PfPg + P(PfPg)$
$D'(\alpha)$	$P(fPg + gPf) = P(fg) + (1 - \alpha)PfPg + \alpha P(PfPg)$
$C(\alpha, \beta)$	$P(fPg + gPf) = fPg + gPf + \alpha PfPg + \beta P(PfPg)$
HM <i>Hémi-multiplicatif</i>	$P(fg) = P(PfPg)$
UN <i>U-nilpotent</i>	$P(PfPg) = 0$
PP <i>Pseudo-projectant</i>	$P(PfPg) = 1/2(fPg + gPf)$
et	
$E(\alpha)$	$P(fg) = \alpha P(PfPg) + \frac{1 - \alpha}{2}(fPg + gPf)$

Si $\chi(Y)$ désigne la fonction caractéristique d'un ensemble Y , sous-ensemble de X , nous appelons *opérateur irréductible* un opérateur pour lequel une relation du type

$$P(\chi(Y)e) = \chi(Y)e \text{ implique soit } Y = X, \text{ soit } Y = \phi$$

On démontre alors le théorème suivant :

THÉORÈME 1.2. — *Sous les conditions du théorème précédent, un opérateur multiplicativement lié irréductible pour lequel $2B + D - 2$, C et $A + E$ ne sont pas simultanément nuls, conserve ou annule l'élément unité de l'algèbre.*

En fait, on peut nettement préciser les décompositions d'un opérateur multiplicativement lié P , envisagées par le théorème 1.1 et obtenir fréquemment une décomposition en somme directe d'opérateurs de types plus simples. Dans cet article, notre but n'étant pas une étude du cas général, nous allons nous contenter d'examiner certains des opérateurs mis en évidence par le théorème 1.1.

DÉFINITIONS. — Outre la terminologie définie au cours des théorèmes précédents, nous convenons encore des définitions suivantes, qui n'ont que la prétention de réduire la longueur des énoncés des théorèmes, et exploitent les termes héli, semi, etc., de la langue française.

— Un opérateur satisfaisant $P(fPg + gPf) = 2P fPg$ est dit *semi-multiplicatif* et noté **SM**.

— Un opérateur satisfaisant $P(fPg + gPf) = 2P(PfPg)$ est dit *demi-multiplicatif* et noté **DM**.

— Un opérateur satisfaisant $P(fPg + gPf) = 2P(fg)$ est dit de *quasi-interpolation* et noté **QI**.

— Un opérateur satisfaisant $P(fPg) = P(gPf)$ (respectivement

$$P(fPg + gPf) = 0)$$

est dit *multiplicativement symétrique* et noté **MS** (respectivement *multiplicativement antisymétrique* et noté **MAS**).

— Un opérateur satisfaisant $P(fPg) = 0$ est dit *multiplicativement nilpotent* et noté **MN**.

— Un opérateur satisfaisant $P(fg) = fPg$ est dit un *centralisateur* ou encore un *multiplicateur*, car dans une algèbre qui comporte un élément unité, on a $Pf = fPe$.

— Un opérateur multiplicativement lié et multiplicativement symétrique est dit *multiplicativement lié symétrique* et on ne répète pas la lettre **M** dans une abréviation.

— Enfin un opérateur n -potent est un opérateur qui vérifie $P^n = P$. Pour $n = 2$ l'usage prévaut de dire opérateur *idempotent* et nous noterons 2I. De même un opérateur n -nilpotent vérifie $P^n = 0$ et nous noterons 2N un opérateur *2-nilpotent*.

Nous nous restreignons à l'étude des opérateurs multiplicativement liés dans le cadre d'une *algèbre fonctionnelle de dimension finie*, ou, ce qui revient au même, lorsque X est constitué par un ensemble fini de points :

$$X = \{ x_1, x_2, \dots, x_n \}$$

Une base de l'algèbre \mathcal{A} est naturellement fournie par les fonctions élémentaires :

$$\{ \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n \}$$

avec $\delta_i(x_j) = \delta_{ij}$ qui vaut, selon l'usage, 0 si $i \neq j$ et 1 si $i = j$. Un élément P de $L(\mathcal{A})$ se représente dans cette base par une matrice carrée $[P]$ d'ordre n , et les différents types d'opérateurs sont caractérisés par des équations, du troisième degré en général, entre les coefficients p_{ij} de la matrice $[P]$. On peut obtenir ces équations canoniques en prenant $f = \delta_i$ et $g = \delta_j$ puis en calculant au point x_k dans l'équation de définition d'un opérateur multiplicativement lié. Bien que la base de l'algèbre \mathcal{A} soit déterminée, nous avons toutefois la liberté de la numérotation des points de l'espace X , liberté qui se transcrit par un échange possible des lignes ou des colonnes de $[P]$. Comme on peut le constater, les équations canoniques sont peu maniables et souvent une étude plus globale permet d'aboutir. Signalons ici que dans le cas d'une algèbre de dimension finie, on n'a pas de sérieux avantages à maintenir en général les hypothèses (H) qui nous ont assuré la décomposition en opérateurs élémentaires. Pour des exemples, il n'est pas possible de se contenter d'examiner le cas $n = 2$, car alors l'idempotence et la conservation de l'unité impliquent la semi-multiplicativité de l'opérateur, tandis que les calculs directs deviennent inextricables dès $n = 3$. Commençons par donner un lemme (cf. [I] J. Arbault).

LEMME 1.1. — *Soit P un opérateur multiplicativement lié pour lequel $B = C = D = 0$, ou bien encore un opérateur multiplicativement symétrique. Lorsque p vecteurs colonnes non nuls forment un système de rang $p - 1$, les p lignes transposées sont alors égales.*

Par hypothèse on dispose d'une relation de dépendance linéaire entre les p vecteurs $P(\delta_1), P(\delta_2), \dots, P(\delta_p)$, ce qui fournit un élément non nul du noyau de l'opérateur P :

$$\sum_{i=1}^p a_i \delta_i$$

Or, dans les conditions du lemme, l'appartenance de f au noyau de P entraîne celle de fPg pour tout élément g de l'algèbre \mathcal{A} :

$$P \left[\left(\sum_{i=1}^p a_i \delta_i \right) P(\delta_k) \right] = 0 \quad \text{pour tout } k$$

Soit

$$\sum_{i=1}^p a_i p_{ik} P(\delta_i) = 0$$

Aucun des vecteurs $P(\delta_i)$ n'étant nul, et le rang du système étant $p - 1$, on obtient pour tout k , $p_{1k} = p_{2k} = \dots = p_{pk}$, c'est-à-dire l'égalité des p lignes transposées des p premières colonnes. Par suite, tout élément f de l'algèbre \mathcal{A} est transformé en une fonction constante sur les p points x_1, x_2, \dots, x_p :

$$Pf(x_1) = Pf(x_2) = \dots = Pf(x_p) \quad \text{pour tout } f \text{ dans } \mathcal{A}.$$

2. RÔLE DE LA SYMÉTRIE MULTIPLICATIVE

2.1 Les opérateurs multiplicativement symétriques

La relation de définition d'un opérateur multiplicativement symétrique fournit les équations canoniques

$$P(\delta_i P(\delta_j))(x_k) = P(\delta_j P(\delta_i))(x_k)$$

ce qui se transcrit sur les coefficients de la matrice $[P]$ par les équations :

$$(3) \quad p_{ij} p_{ki} = p_{ji} p_{kj}$$

On dispose de $\frac{n^2(n-1)}{2}$ équations entre les n^2 coefficients p_{ij} . Sur une algèbre de dimension 2, en dehors de l'opérateur nul, un opérateur multiplicativement symétrique consiste en une projection sur la première bissectrice par rapport à une direction quelconque. Dans le cas général, nous appelons *termes antidiagonaux* relatifs à deux colonnes $P(\delta_i)$ et $P(\delta_j)$, les deux coefficients p_{ij} et p_{ji} .

On peut noter (3) sous la forme

$$p_{ij} P(\delta_i) = p_{ji} P(\delta_j)$$

Lorsque les termes antidiagonaux de deux colonnes ne sont pas nuls

tous les deux, les colonnes correspondantes sont linéairement dépendantes et susceptibles du lemme 1. 1. Notamment si $p_{ij} = p_{ji}$ (différent de zéro), les colonnes $P(\delta_i)$ et $P(\delta_j)$ sont égales ainsi que les lignes transposées.

LEMME 2. 1. — Soit P un opérateur multiplicativement symétrique et Q un centralisateur symétrique tel que $PQ = P$. Alors QP est un opérateur multiplicativement symétrique.

$$\begin{aligned} \text{En effet } QP(fQPg) &= QPQ(fPg) = QP(fPg) = QP(gPf) \\ &= QP(gQPf) \end{aligned}$$

Ce lemme nous permet de nous restreindre au cas où toutes les colonnes sont différentes de zéro. Dans ce cas, indiquons les trois remarques suivantes :

(a) Si $p_{ij} = 0$, d'une part $p_{ji} = 0$ et d'autre part le produit terme à terme des éléments de la ligne i par les éléments correspondants de la colonne j donne zéro. En effet puisque $p_{ij} = 0$, la relation (3) fournit $p_{ji}p_{kj} = 0$ et comme la colonne j n'est pas entièrement nulle, on obtient la nullité de l'élément transposé p_{ji} . De plus, en échangeant les rôles de k et de i dans la relation (3), il vient $p_{kj}p_{ik} = p_{jk}p_{ij}$, ce qui donne $p_{ik}p_{kj} = 0$ pour tout k .

(b) Si $p_{ii} = 0$, alors $p_{ij} = p_{ji} = 0$ pour tout j .

En effet la relation (3) appliquée en $k = i$ fournit $p_{ij}(p_{ii} - p_{ji}) = 0$ et symétriquement la relation $p_{ji}(p_{jj} - p_{ij}) = 0$, d'où $p_{ij}p_{ji} = p_{ij}p_{ii} = p_{ji}p_{jj}$ ce qui donne bien $p_{ij} = p_{ji} = 0$ lorsque p_{ii} est nul après utilisation de la remarque (a).

(c) Lorsque p_{ij} est différent de zéro, l'élément diagonal de la ligne i est égal au transposé p_{ji} de p_{ij} .

Ceci étant, nous pouvons changer la numérotation des points de X de sorte que les q colonnes nulles soient placées en dernier, puis, les précédant, les q' colonnes non nulles dont l'élément diagonal est nul. Pour les colonnes restantes, on met en premier une des colonnes ayant le plus grand nombre d'éléments non nuls puis on range à sa suite toutes les colonnes ayant un terme antidiagonal relatif à la première colonne non nul. Dans une telle famille on groupe les colonnes de même terme diagonal.

Supposons que la première famille soit composée de r colonnes. La non-nullité des r premiers éléments de la première ligne implique que ces éléments répètent la diagonale de la matrice $r \times r$. Par contre-coup, les r premiers éléments de la première colonne sont tous égaux au premier terme diagonal. Dès lors, la remarque (a) assure que la matrice $r \times r$ ne possède aucun élément nul et par suite les r lignes de cette matrice sont égales.

En outre cette même remarque (a) permet d'assurer la nullité des $n - r$ derniers éléments des r premières lignes et par suite la nullité des termes trans-

posés, sauf en ce qui concerne les lignes qui correspondent aux colonnes nulles.

Les lignes dont le terme diagonal est nul et dont la colonne transposée n'est pas nulle sont nulles d'après la remarque (b). Quant aux q dernières lignes, les résultats ci-dessus permettent l'application du lemme 1. 1.

Pour décrire la décomposition obtenue, convenons de noter par $[M]$ une matrice quelconque, par $[L]$ une matrice carrée dont toutes les lignes sont égales et par $[L']$ une matrice $q \times r$ associée à $[L]$ de la façon suivante, où l'on a pris comme exemple $r = 3$ et $q = 2$.

$$[L] = \begin{bmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix}; \quad [L'] = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b & \alpha c \\ \beta a & \beta b & \beta c \end{bmatrix}$$

(Les constantes α et β désignent des nombres complexes quelconques). On peut maintenant énoncer un théorème donnant la structure des opérateurs multiplicativement liés symétriques.

THÉORÈME 2.1. — *Un opérateur multiplicativement symétrique dans une algèbre finie peut se représenter sous la forme d'une matrice $[P]$ décomposée en blocs selon*

$$[P] = \left[\begin{array}{cc|cc} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ L'_1 & L'_2 & M & 0 \end{array} \right]$$

Réciproquement une telle matrice représente un opérateur multiplicativement symétrique.

Remarques

(a) Lorsque P est MS, l'opérateur P^n est également M. S. D'ailleurs, dans une algèbre de dimension finie, on dispose de la représentation matricielle pour les puissances :

$$[P^n] = \left[\begin{array}{cc|cc} (\text{Tr } L_1)^{n-1} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\text{Tr } L_2)^{n-1} L_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\text{Tr } L_1)^{n-1} L'_1 & (\text{Tr } L_2)^{n-1} L'_2 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

où $n \geq 2$ et où $\text{Tr } (L_1)$ désigne la trace de la matrice $[L_1]$.

(b) Si $Pe = e$, on a $P^2 = P$ comme on peut le constater directement sur la formule de définition. Une telle relation fait disparaître la matrice $[M]$ et les lignes de zéros. Pour ce faire, il suffirait d'ailleurs de supposer qu'il existe une fonction f , dans l'image de l'opérateur P , qui ne s'annule pour aucune valeur.

(c) Lorsque $P^2 = P$, alors $Pe(x) = e(x)$ pour x appartenant à un sous-ensemble Y de points de X . Cet ensemble Y peut être caractérisé par le fait que la nullité de f sur Y implique la nullité de Pf partout.

(d) Le théorème 2.1 donne une décomposition matricielle laquelle dépend de la base choisie. Nous fournirons plus loin une décomposition intrinsèque (Prop. 2.4).

2.2 Les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques

Ces opérateurs satisfont $P(fPg) = PfPg$. Ce sont les opérateurs d'espérance conditionnelle dont la structure est connue, lorsque l'on suppose $Pe = e$, depuis les travaux de [13] J. Kampé de Fériet et [6] G. Birkhoff. La littérature qui leur est consacrée apparaît considérable (cf. par exemple, la bibliographie de [11]).

Outre la formule (3), on dispose maintenant de la relation

$$(4) \quad p_{ji}(p_{jk} - p_{ik}) = 0$$

Lorsque p_{ji} est différent de 0, les lignes i et j sont égales. Par suite, le théorème 2.1 enseigne que la non-nullité de α dans $[L'_1]$ implique $\alpha = 1$ et la nullité des premières lignes de $[L'_2]$ et $[M]$. En changeant la numérotation des points de l'ensemble X , on peut placer cette ligne non nulle de $[L'_1]$ juste au-dessous du bloc $[L_1]$ et procéder de même pour les autres lignes correspondant aux colonnes nulles. Finalement on a démontré le :

THÉORÈME 2.2. — *Sur une algèbre de dimension finie, un opérateur semi-multiplicatif peut se représenter sous la forme d'une matrice (P), décomposée en blocs selon*

$$[P] = \left[\begin{array}{cc|c} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Réciproquement, une telle matrice représente un opérateur semi-multiplicatif symétrique.

Remarques

(a) Si $Pe = e$, alors $\text{Tr}(L_1) = \text{Tr}(L_2) = 1$ et il n'y a pas de colonnes nulles. Dans ce cas, on a directement $P^2 = P$. Réciproquement, un opérateur SMS idempotent est tel que Pe soit une fonction caractéristique.

(b) Un opérateur SMS détermine une partition de l'ensemble X en classes sur lesquelles Pf est une constante, et le théorème 2.2 peut s'exprimer sous forme intrinsèque en disant que P est somme directe d'opérateurs P_i , d'ailleurs semi-multiplicatifs, qui transforment une fonction en une constante

$$P = \bigoplus_{i=1}^k P_i \quad \text{et} \quad X = \sum_{i=1}^k X_i$$

En outre $P_i(f)$ est une fonction constante sur chaque composante X_i , la valeur de cette constante ne dépendant que des valeurs de f sur X_i . Une telle décomposition se retrouve dans un cas beaucoup plus général si l'on se réserve toutefois d'ajouter une condition topologique *ad hoc*. Ainsi sur l'algèbre des fonctions continues réelles définies sur un espace compact, la continuité de P pour la norme uniforme assure la décomposition de X en classes d'équivalence fermées où $Pf(x)$ reste constante sur cette classe et s'obtient comme une intégrale sur cette classe (cf. [15] J. L. Kelley). De même, sur un espace de probabilité $L^p(X, F, \mu)$, un opérateur SMS tel que

$$Pe = e \quad \text{et} \quad \|P\| \leq 1,$$

est l'opérateur d'espérance conditionnelle associé à une sous-tribu de F , ce qui est l'analogie de la partition de l'espace de base X (cf. [19] S. T. C. Moy).

(c) Lorsque $Pe = e$, $\text{Tr} P$ fournit le nombre de sous-ensembles X_i en lesquels l'opérateur P décompose l'espace X .

(d) Enfin, lorsque P est un opérateur semi-multiplicatif, toute puissance P^n est également un opérateur semi-multiplicatif symétrique.

2.3 Les opérateurs demi-multiplicatifs symétriques

Ce sont des opérateurs satisfaisant $P(Pg) = P(PfPg)$ et dont l'intervention est naturelle dans l'étude des opérateurs de projection pour des algèbres de fonctions continues (cf. [9] J. Dhombres).

Analytiquement il vient les équations canoniques

$$(5) \quad p_{ij}p_{ki} = p_{ji}p_{kj} = \sum_{l=1}^{l=n} p_{li}p_{lj}p_{kl}$$

dont le maniement est peu pratique. Partant du théorème 2.1, on utilise d'abord un lemme analogue au lemme 2.1.

LEMME 2.2. — Soit P un opérateur DMS et Q un centralisateur idempotent tel que PQ = P. Alors QP est un opérateur demi-multiplicatif symétrique.

$$\text{On a } QP(fQPg) = QPQ(fPg) = QP(fPg) = QP(Pf.Pg) = QP(QPf.QPg)$$

en utilisant la relation de définition d'un centralisateur $Q(fg) = fQg$, laquelle jointe à l'idempotence, fournit : $Q(fg) = QfQg$.

Considérons maintenant une matrice du type [L]. Cette matrice représente un opérateur DMS si et seulement si $\text{Tr}(L) = 1$. Les deux équations (5) fournissent en effet avec $p_{ki} = p_{li}$

$$p_{ij} = \sum_{l=1}^r p_{kl}p_{lj} = \text{Tr}(L)p_{ij}$$

D'ailleurs [L] est un opérateur SMS, et lorsque la trace de [L] vaut 1 nous avons affaire à un opérateur idempotent, donc en particulier à un opérateur demi-multiplicatif symétrique.

Finalement on dispose du :

THÉORÈME 2.3. — Un opérateur demi-multiplicatif symétrique, sur une algèbre de dimension finie, peut se représenter sous la forme d'une matrice [P], décomposée en blocs selon :

$$[P] = \left[\begin{array}{cc|cc} L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ L'_1 & L'_2 & M & 0 \end{array} \right] \text{ avec } \text{Tr}[L_1] = \text{Tr}[L_2] = \dots = 1$$

Réciproquement une telle matrice représente un opérateur DMS.

Le théorème 2.3 permet de démontrer le résultat suivant :

COROLLAIRE 2.1. — Si les fonctions de l'image d'un opérateur DMS ne s'annulent pas toutes en un même point de l'espace X, cet opérateur est alors idempotent.

Remarques

(a) D'une manière générale, toute puissance d'un opérateur DMS est elle-même DMS.

(b) Si P est un opérateur multiplicativement symétrique idempotent, alors P est un opérateur demi-multiplicatif symétrique. En effet, $P^2 = P$ implique $P(fPg) = P(fP^2g) = P(PfPg)$.

(c) Il ne faudrait pas croire qu'un opérateur DMS dont l'image est une sous-algèbre réalise *ipso facto* un opérateur semi-multiplicatif. Même en dimension finie, on peut construire des contre-exemples. (Bien entendu ce résultat est assuré dès que P est un opérateur idempotent). Un autre cas est susceptible de généralisation :

Désignons par $k(P)$ l'ensemble des points de X pour lesquels $P(f)(x)$ s'annule pour toute fonction de l'algèbre de départ \mathcal{A} et par $\chi(P)$ la fonction caractéristique de ce sous-ensemble.

PROPOSITION 2.1. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur demi-multiplicatif symétrique dont l'image est une algèbre, et tel que P soit nul sur la sous-algèbre $\chi(P)\mathcal{A}$, est un opérateur semi-multiplicatif symétrique.*

On sait qu'une algèbre de fonctions, sur un espace de base X , détermine une partition de X en classes d'équivalence sur lesquelles les fonctions de l'algèbre restent constantes.

Tenant compte de la classe particulière de nullité des éléments de l'algèbre, une relation d'équivalence détermine à son tour l'algèbre génératrice (en dimension finie). Appliquons ceci à ImP lorsque P est un opérateur DMS. L'hypothèse faite implique la nullité de la matrice $[M]$ dans la représentation de l'opérateur P selon le théorème 2.4. Que dire des matrices $[L_i]$? A partir de notations simplificatrices évidentes, on a

$$Pf(x_4) = \alpha_1 Pf(x_1) + \alpha_2 Pf(x_2)$$

Par suite, x_4 ne peut constituer à lui seul une classe d'équivalence de la partition associée à l'algèbre ImP puisque $P(f)(x_4)$ dépend des valeurs prises en x_1 et en x_2 . Donc x_4 est un élément, soit de la classe $k(P)$, soit d'une classe comme x_1 ou x_2 . D'où, par exemple :

$$(1 - \alpha_1)Pf(x_1) + \alpha_2 Pf(x_2) = 0$$

ou

$$\alpha_1 Pf(x_1) + \alpha_2 Pf(x_2) = 0$$

ce qui, compte tenu de l'indépendance des valeurs $Pf(x_1)$ et $Pf(x_2)$, fournit $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ou $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$. A un regroupement près, P prend maintenant la forme typique d'un opérateur SMS, ce qui termine la démonstration.

2.4 Les opérateurs d'interpolation

Ces opérateurs satisfont $P(fg) = P(fPg)$ et analytiquement les équations canoniques sont de la forme :

$$p_{ij}p_{ki} = p_{ji}p_{kj} = p_{ki}\delta_{ij} \text{ c'est-à-dire (6) } \begin{cases} p_{ki}(p_{ii} - 1) = 0 \\ p_{ki}p_{ij} = 0 \text{ pour } i \neq j \end{cases}$$

En faisant $g = e$, on constate l'idempotence de l'opérateur P et donc que P est un DMS. Par suite si p_{ii} n'est pas nul, p_{ii} vaut 1 et les matrices $[L]$ du théorème 2.4 sont réduites à un seul élément. D'où le :

THÉORÈME 2.4. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur d'interpolation peut se représenter sous la forme d'une matrice $[P]$, décomposée selon*

$$[P] = \begin{bmatrix} I & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

où I désigne une matrice unité. Réciproquement une matrice du type précédent représente un opérateur d'interpolation.

On conçoit la raison de la terminologie utilisée pour ces opérateurs, d'autant que le même phénomène se reproduit sur les algèbres de fonctions continues définies sur un espace compact (cf. [11] J. G. Dhombres).

2.5 Les opérateurs multiplicativement antisymétriques et les opérateurs U-Nilpotents

Par souci de ne négliger aucun cas, on peut considérer les opérateurs multiplicativement antisymétriques (MAS) :

$$P(fPg + gPf) = 0:$$

Dans une algèbre de dimension finie, la structure des opérateurs multiplicativement antisymétriques est simple. En effet les équations canoniques donnent $p_{ij}p_{ki} = -p_{ji}p_{kj}$ donc $p_{ii} = 0$ et $p_{ij}p_{ji} = 0$. Si p_{ij} est différent de 0, pour $i \neq j$, alors $p_{ji} = 0$ et p_{ki} est nul pour tout k , donc $P(\delta_i) = 0$. De plus si $p_{ij} = 0$, bien que $P(\delta_j)$ ne soit pas nul, alors $p_{ji} = 0$. On peut ranger d'abord les colonnes non nulles et observer facilement que $[P]$ prend la forme :

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

et cette dernière forme est caractéristique de l'identité $P(fPg) = 0$. D'où le théorème :

THÉORÈME 2.5. — *Un opérateur multiplicativement antisymétrique est multiplicativement nilpotent (donc nilpotent) et réciproquement.*

Un opérateur qui satisfait la relation $P(PfPg) = 0$ est un opérateur *U-nilpotent*. Dans la réduction des opérateurs multiplicativement liés, nous n'avons rencontré ces opérateurs que munis de la mention supplémentaire : $Pe = 0$. (Si l'on pose $P_1(f) = P(fPe)$, P_1 est alors un opérateur nilpotent).

PROPOSITION 2.2. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur U-nilpotent positif est un opérateur multiplicativement nilpotent.*

Les équations canoniques sont :

$$(7) \quad \sum_{l=1}^n p_{li} p_{lj} p_{kl} = 0.$$

Mais la positivité implique $p_{ii} p_{ij} p_{ki} = 0$.

En particulier $p_{ii} p_{ki} = 0$. Par suite, tous les termes diagonaux sont nuls et l'on vérifie facilement que l'on peut écrire la matrice $[P]$, représentative de l'opérateur U-nilpotent P , sous la forme caractérisant un opérateur multiplicativement nilpotent.

$$[P] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

Lorsque P est un opérateur U-nilpotent, il en est de même pour tout opérateur $F(P)$, où F est une fonction holomorphe nulle à l'origine. Bien entendu, il existe des opérateurs U-nilpotents non multiplicativement nilpotents. En dimension 2 par exemple, l'opérateur représenté par la matrice

$$[P_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

est un opérateur U-nilpotent. Cet opérateur est en outre un opérateur de quasi-interpolation satisfaisant la relation $P^2 = 2P$. On peut construire d'autres types d'opérateurs U-nilpotents qui ne sont pas somme directe d'opérateurs tels que $[P_1]$, c'est-à-dire de quasi-interpolation satisfaisant $P^2 = 2P$, et d'opérateurs multiplicativement nilpotents. A-t-on pourtant une décomposition en somme directe d'opérateurs U-nilpotents tels que $Pe = 0$ et d'opérateurs multiplicativement nilpotents ?

PROPOSITION 2.3. — *Un opérateur U-nilpotent multiplicativement symétrique est nilpotent.*

Prenant f de la forme Pf et $g = e$ dans la relation de symétrie multiplicative, on a $P(PfPe) = 0 = P(eP^2f) = P^3f$ donc $P^3 = 0$. En dimension finie, d'après la forme d'un opérateur multiplicativement symétrique, on déduit $\text{Tr}(L_1) = 0$ donc $P^2 = P^3 = 0$.

Réciproquement, un opérateur nilpotent d'ordre 2 multiplicativement symétrique est un opérateur U-nilpotent car $P(PfPg) = P(fP^2g) = 0$.

Nous pouvons concocter maintenant une décomposition, non unique, d'un opérateur multiplicativement symétrique.

Convenons de dire que deux opérateurs P_i et P_j sont *mutuellement multiplicativement nilpotents* lorsque $P_i(fP_jg) = P_j(fP_i g) = 0$ pour tous f et g dans l'algèbre \mathcal{A} .

PROPOSITION 2.4. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur multiplicativement symétrique P peut se décomposer en une somme d'opérateurs mutuellement multiplicativement nilpotents*

$$P = \sum_{i=1}^k P_i + P_{k+1}$$

En outre, P_{k+1} est un opérateur multiplicativement nilpotent et les opérateurs P_i , où i vaut $1, 2, \dots, k$, sont, soit des opérateurs demi-multiplicatifs symétriques à une constante près, soit des opérateurs nilpotents, multiplicativement symétriques et annulant l'unité.

En utilisant la représentation d'un opérateur multiplicativement symétrique obtenue au théorème 2.1, nous posons naturellement, en ayant pris soin de choisir $k = 2$ pour simplifier :

$$[P_1] = \begin{bmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ L'_1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [P_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L'_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [P_3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}$$

Les opérateurs P_1, P_2 et P_3 sont mutuellement multiplicativement nilpotents. En outre, P_3 est multiplicativement nilpotent. Examinons $[P_1]$ par exemple. Deux éventualités se présentent

- ou bien $P_1e = 0$, auquel cas l'opérateur P est nilpotent ;
- ou bien $P_1e \neq 0$, auquel cas la trace de l'opérateur P_1 n'est pas nulle

et donc la matrice $[P_1]/\text{Tr } [P_1]$ est celle d'un opérateur demi-multiplicatif symétrique idempotent.

Réciproquement, tout opérateur P s'écrivant comme $\sum_{i=1}^k P_i + P_{k+1}$, où

les opérateurs P_i ont les propriétés de la proposition 2.4, est un opérateur multiplicativement symétrique.

Cette proposition 2.4 indique qu'un opérateur demi-multiplicatif symétrique est somme d'opérateurs demi-multiplicatifs symétriques idempotents et d'un opérateur multiplicativement nilpotent, également demi-multiplicatif symétrique. En outre, ces opérateurs sont mutuellement multiplicativement nilpotents.

Nous ne donnerons pas ici les théorèmes concernant les opérateurs multiplicativement liés d'un type hémi-multiplicatif et de types voisins, comme $E(\alpha)$ et PP . Leurs propriétés, d'une nature plus combinatoire, les rapprochent des opérateurs de Baxter, et seront détaillées dans une publication ultérieure (cf. J. G. Dhombres Hemi-multiplicative operators on finite dimensional algebras, à paraître dans *Acq. Math.*).

3. OPÉRATEURS MULTIPLICATIVEMENT LIÉS

3.1 Opérateurs semi-multiplicatifs

Ce sont les opérateurs qui vérifient une relation du type

$$P(fPg + gPf) = 2Pfg$$

THÉORÈME 3.1. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur semi-multiplicatif est multiplicativement symétrique.*

Les équations canoniques, en nombre égal à $\frac{n(n(n+1)-2)}{2}$, s'écrivent

$$(8) \quad p_{ki}(p_{ij} - p_{kj}) = p_{kj}(p_{ki} - p_{ji})$$

Nous allons accumuler quelques propriétés afin de donner la forme générale des matrices représentant un opérateur semi-multiplicatif.

(a) $P(fPf) = 0$ implique $Pf = 0$. En particulier si $p_{ii} = 0$, la colonne $P(\delta_i)$ est entièrement nulle. Il convient de se restreindre d'abord au bloc dont les éléments diagonaux ne sont pas nuls (cf. par analogie le lemme 3.1).

(b) $p_{ki} = 0$ implique $p_{kj}p_{ji} = 0$, c'est-à-dire que le produit terme à terme de la ligne k par la colonne i est nul.

(c) Lorsque p_{ki} est différent de 0, on a $p_{ii} = p_{ki}$ et $p_{kk} = p_{ik}$.

En effet, si l'on fait $i = j$ dans les équations (8), il vient :

$$p_{ki}(p_{ii} - p_{ki}) = 0, \text{ donc } p_{ik} = p_{kk}$$

et de même si l'on fait $j = k$ dans les équations (8) :

$$p_{ki}(p_{ik} - p_{kk}) = 0, \text{ donc } p_{ik} = p_{kk}$$

(d) De façon générale, on a $p_{ii}p_{ij} = p_{jj}p_{ji} = p_{ij}p_{ji}$ en faisant $k = i$ puis $k = j$ dans les équations canoniques et en comparant. Par conséquent si $p_{ii} = p_{jj} \neq 0$, on a ou bien $p_{ij} = p_{ji} = 0$, ou bien $p_{ii} = p_{jj} = p_{ij} = p_{ji}$.

En particulier si p_{jj} est différent de 0, la nullité de p_{ij} implique celle de p_{ji} .

(e) Enfin si $p_{ij} = p_{ji} = 0$, il vient $P(\delta_i)P(\delta_j) = 0$.

Nous pouvons disposer en dernier les colonnes (d'ailleurs nulles) dont l'élément diagonal est nul. Puis, en premier, une colonne ayant le plus d'éléments non nuls et, à sa suite, toutes les colonnes dont le terme antidiagonal relatif à cette première colonne n'est pas nul. Dans une telle famille, nous groupons les colonnes de même élément diagonal. Nous constatons alors une décomposition de la matrice carrée, formée sur les éléments diagonaux non nuls, en blocs dont les lignes sont égales. Choisissons maintenant une ligne k correspondant à une colonne nulle. La remarque (e) assure que si un élément p_{ki} est non nul alors les éléments de cette ligne situés sous des blocs distincts de celui sous lequel se trouve p_{ki} sont nuls. En outre la remarque (b), compte tenu du fait que les blocs sont composés d'éléments différents de 0, implique que cette ligne k répète une ligne de l'un des blocs. Quitte à renuméroter les points de X , on peut s'arranger pour que toutes les lignes égales soient groupées, ce qui permet d'obtenir la forme caractéristique des matrices représentatives des opérateurs semi-multiplicatifs d'après le théorème 2.2. En dimension finie, la semi-multiplicativité assure donc la multiplicative symétrie, mais ce résultat est plus général (cf. [11] J. G. Dhombres).

3.2 Opérateurs de quasi-interpolation

Passons au cas des opérateurs de quasi-interpolation lesquels satisfont une relation du type $P(fPg + gPf) = 2P(fg)$.

Lorsque $Pe = e$, un opérateur de quasi-interpolation est d'interpolation puisque P est idempotent grâce à $Pf + P^2f = 2Pf$. Ce résultat implique

à son tour $P(PfPg) + P(gP^2f) = 2P(gPf)$ donc la multiplicative symétrie. (Sur les opérateurs multiplicativement liés, c'est un fait assez fréquent que l'idempotence implique la symétrie multiplicative).

La structure générale des opérateurs de quasi-interpolation peut s'obtenir, dans les algèbres finies, à partir des remarques suivantes :

(a) $(1 - p_{ii})P(\delta_i) = 0$, donc si $p_{ii} \neq 1$ alors $P(\delta_i) = 0$ et en particulier $p_{ii} = 0$.

Nous allons d'abord nous restreindre, après une éventuelle renumérotation des points X , au bloc dont les éléments diagonaux sont différents de zéro.

(b) Lorsque $p_{ii} = p_{jj} = 1$, pour $i \neq j$, on dispose des relations $p_{ij}(1 + p_{ji}) = 0$, donc par symétrie, $p_{ij} = p_{ji}$, c'est-à-dire $p_{ij} = 0$ ou -1 .

(c) Enfin lorsque $p_{ij} = p_{ji}$ avec $i \neq j$, on a $p_{ki} + p_{kj} = 0$, c'est-à-dire

$$P(\delta_i) + P(\delta_j) = 0.$$

Cependant, dans le bloc étudié, lorsque p_{ki} n'est pas nul, on doit avoir

$$p_{ki} = -1$$

d'après la remarque précédente, par suite $p_{kj} = +1$, ce qui contredit la remarque (b). Donc, pour k différent de i et de j , on a $p_{ki} = p_{kj} = 0$. On constate que le bloc se décompose en une somme directe. Tenant compte de la relation $P(\delta_i) + P(\delta_j) = 0$ lorsque $p_{ii} = p_{jj} = 1$ et $p_{ij} = p_{ji} = -1$, on convient de désigner par $[C]$ la matrice 2×2 : $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ et par $[C']$ une matrice $q \times 2$ dont les deux colonnes sont opposées. Par exemple pour $q = 3$,

$$[C'] = \begin{bmatrix} a & -a \\ b & -b \\ c & -c \end{bmatrix}$$

Une matrice représentant un opérateur de quasi-interpolation peut s'écrire sous une forme décomposée en blocs :

$$\begin{bmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ C'_1 & C'_2 & M & 0 \end{bmatrix}$$

où I désigne une matrice carrée unité, $[M]$ une matrice quelconque et où

un groupement tel que [C] peut se présenter plusieurs fois (2 fois dans l'exemple donné). Posons maintenant :

$$[Q_i] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C'_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & M & 0 \end{bmatrix}$$

on constate que l'opérateur P peut s'écrire comme une somme :

$$P = \sum_{i=1}^k Q_i + R$$

Or tout Q_i est un opérateur de quasi-interpolation tel que $Q_i e = 0$ tandis que R est un opérateur d'interpolation. De plus, les opérateurs R et Q_i sont mutuellement multiplicativement nilpotents.

THÉORÈME 3.2. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur de quasi-interpolation est la somme d'un opérateur d'interpolation R et d'un opérateur de quasi-interpolation Q tel que $Qe = 0$. D'ailleurs Q est la somme d'opérateurs de quasi-interpolation de la forme Q_i .*

COROLLAIRE 3.1. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur de quasi-interpolation pour lequel Pe ne s'annule pas est un opérateur d'interpolation.*

COROLLAIRE 3.2. — *Si $\delta_i P(\delta_i)$ ne s'annule pour aucun indice i , un opérateur de quasi-interpolation P est une somme directe : $P = \bigoplus_i Q_i \oplus R$.*

Remarques :

1. Un opérateur de quasi-interpolation tel que $Qe = 0$ satisfait $Q^2 = 2Q$. Par suite Q est un opérateur U-nilpotent. On a cette propriété sur les opérateurs Q_i . D'ailleurs un opérateur QI , et U-nilpotent, satisfait $Qe = 0$ et $Q^2 = 2Q$.

2. Tout opérateur QI s'écrivant en dimension finie $P = Q + R$, on a

$$P^2 = 2Q + R,$$

donc $P^2 - P = Q$ et $R = 2P - P^2$. En outre $P(PfPg) = R(RfRg) = P^2(PfPg)$. Réciproquement, partons d'un opérateur QI et posons $P^2 - P = Q$ et $R = 2P - P^2$. On peut alors montrer que R est un opérateur multipli-

cativement symétrique et que $QR = RQ$. Enfin, si nous supposons que

$$P(PfPg) = P^2(PfPg),$$

Q est alors un opérateur de quasi-interpolation tel que $Qe = 0$. D'un côté, si nous supposons que e appartient à l'image de l'opérateur Q , alors $Q=0$ et P est un opérateur d'interpolation. D'un autre côté, si nous supposons que Pe est un idempotent, $(Pe)^2 = Pe$, alors R est un opérateur d'interpolation.

3. En général les puissances successives d'un opérateur de quasi-interpolation ne sont pas des opérateurs de quasi-interpolation. On a toutefois la proposition :

PROPOSITION 3.1. — *Si P et P^2 sont des opérateurs de quasi-interpolation, alors P^n est un opérateur de quasi-interpolation héli-multipliatif pour tout n supérieur ou égal à 2.*

D'une part $P(fPg + gPf) = 2P(fg)$ procure

$$P^2(fP^2g + gP^2f) = 4P^2(fg) - 2P^2(PfPg).$$

D'autre part $P^2(fP^2g + gP^2f) = 2P^2(fg)$ par hypothèse. D'où l'égalité

$$P^2(fg) = P^2(PfPg)$$

et notamment

$$P^2(fg) = P^2(P^2 fP^2 g),$$

c'est-à-dire l'héli-multipliativité de P^2 , dont on déduit celle de P^n .

Raisonnons par récurrence en supposant que P^n soit de quasi-interpolation.

De
$$P^n(fP^n g + gP^n f) = 2P^n(fg),$$

on déduit l'égalité

$$P^n(gP^{n+1}f + fP^{n+1}g) = 2P^n(gPf + fPg) - P^n(PfP^n g + P^n fPg)$$

et
$$P^{n+1}(fP^{n+1}g + gP^{n+1}f) = 4P^{n+1}(fg) - P^{n+1}(PfP^n g + PgP^n f)$$

Or P^{n-1} est de quasi-interpolation, par suite

$$P^{n-1}(PfP^n g + PgP^n f) = 2P^{n-1}(PfPg)$$

soit
$$P^{n+1}(fP^{n+1}g + gP^{n+1}f) = 4P^{n+1}(fg) - 2P^{n+1}(PfPg)$$

ce qui termine la démonstration. Dans le cadre d'une algèbre de dimension finie, on énonce :

COROLLAIRE 3.3. — *Dans une algèbre finie, un opérateur de quasi-interpolation a un carré de quasi-interpolation si et seulement si l'opérateur est d'interpolation.*

La condition est suffisante puisque $P(fP^2g) = P(fPg) = P(fg)$ donc $P(fg) = P(fPg)$.

Grâce à la proposition 3.1, la condition est nécessaire à partir des théorèmes de représentation 3.2 et 2.5.

3.3 Opérateurs du type $D(\alpha)$ et $D'(\alpha)$

Un opérateur du type $D(\alpha)$ satisfait la relation fonctionnelle

$$(9) \quad P(fPg + gPf) = \alpha P(fg) + (1 - \alpha)PfPg + P(PfPg)$$

Une homothétie transforme P en un opérateur de type $D'(\alpha)$. En effet, l'opérateur $Q = \frac{P}{\alpha}$ satisfait, lorsque α n'est pas nul, la relation de définition des opérateurs $D'(\alpha)$:

$$Q(fQg + gQf) = Q(fg) + (1 - \alpha)QfQg + \alpha Q(QfQg)$$

A. ÉTUDES D'ABORD LE CAS $D(0)$

Il s'agit d'un opérateur de Reynolds. Sur les algèbres de dimension finie, les opérateurs de Reynolds furent envisagés par différents auteurs, notamment [18] I. Molinaro dans le cas d'un opérateur positif, [1] J. Arbault dans le cas général, puis [5] M. Billik et G. C. Rota. Nous allons indiquer leurs résultats en bref.

D'après [19] J. B. Miller, une antidérivation satisfait $P(fPg + gPf) = PfPg$.

LEMME 3.1. — *Dans une algèbre de dimension finie une antidérivation est nulle.*

LEMME 3.2. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur de Reynolds surjectif est l'identité.*

LEMME 3.3 (cf. [5]). — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur de Reynolds satisfait $P^2 = P^3$.*

LEMME 3.4. — *Pour un opérateur de Reynolds dans une algèbre fonctionnelle, on a l'équivalence entre $Pe = 0$ et $P^2 = 0$. Dans ce cas, P est une antidérivation.*

LEMME 3.5. — *Soit P un opérateur de Reynolds tel que $P^2 = P^3$. Alors P^2 est un opérateur semi-multiplicatif symétrique tandis que $P - P^2$ est une antidérivation nilpotente.*

THÉORÈME 3.3. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur de Reynolds est un opérateur idempotent semi-multiplicatif symétrique.*

Pour les opérateurs du type $B(\alpha)$ ou $D(\alpha)$, on ne dispose pas encore de résultats aussi généraux. Deux attitudes sont alors possibles : soit préciser le comportement de l'opérateur sur certaines sous-algèbres conveables, comme celle engendrée par des éléments e et Pe ; soit examiner des cas particuliers d'opérateurs en ajoutant une condition telle que la symétrie multiplicative.

Citons comme exemple de la première démarche le théorème suivant (cf. [2] F. V. Atkinson), auquel on parvient au terme d'une étude explicite de la résolvante de l'opérateur de Baxter.

THÉORÈME 3.4. — *Sur une algèbre de Banach commutative, un opérateur de Baxter continu réalise une résolution de l'unité de sorte qu'il existe une famille finie d'idempotents orthogonaux δ_i tels que*

$$\sum_{-n}^m \delta_i = e \quad \text{et} \quad \begin{cases} P(\delta_k) = -\sum_{k+1}^m \delta_i & 0 \leq k \leq m \\ P(\delta_k) = \sum_{-n}^m \delta_i - n & -n \leq k \leq 0 \end{cases}$$

Le dernier mot est donné par le résultat combinatoire de [21] G. C. Rota, lequel assure qu'une algèbre de Baxter standard construite à partir de n générateurs est une algèbre libre.

En choisissant la seconde voie, on est conduit au résultat suivant :

THÉORÈME 3.5. — *Dans une algèbre de dimension finie, un opérateur multiplicativement symétrique du type $B(\alpha)$, pour α différent de zéro, est un opérateur d'interpolation.*

Nous supposons aussi α différent de 2 car pour $\alpha = 2$ le théorème est trivial. Grâce au théorème 2.1, on dispose d'une représentation matricielle de l'opérateur P , où, rappelons-le, les matrices $[L_1]$ et $[L_2]$ n'ont aucun coefficient nul. Ecrivons les équations canoniques relatives à un opérateur du type $B(\alpha)$:

$$(10) \quad p_{ij}p_{ki} + p_{ji}p_{kj} = (2 - \alpha) \sum_{l=1}^n p_{li}p_{lj}p_{kl} \quad \text{pour } i \neq j$$

et

$$(11) \quad (2p_{ii} - 1)p_{ki} = (2 - \alpha) \sum_{l=1}^n p_{il}^2 p_{kl}$$

L'équation (10) devient dans le cas d'une matrice $[L_1]$ dont l'ordre est noté $\text{Or } [L_1]$:

$$2p_{1i}p_{1j} = (2 - \alpha)p_{1i}p_{1j} \text{ Tr } [L_1]$$

Comme aucun coefficient de $[L_1]$ ne peut être nul, c'est que $\text{Tr } [L_1] = \frac{2}{2-\alpha}$, du moins lorsque $\text{Or } [L_1] > 1$. Mais une telle valeur est rendue impossible par l'équation (11) laquelle impose

$$(2p_{1i} - 1)p_{1i} = (2 - \alpha)p_{1i}^2 \text{Tr } [L_1]$$

soit $(2p_{1i} - 1)p_{1i} = 2p_{1i}^2$, donc $p_{1i} = 0$, ce qui est refusé.

Par suite, $\text{Or } [L_1] = 1$. Montrons maintenant que la matrice $[M]$ introduite au théorème 2.1 est nulle. Si une fonction f a pour support l'ensemble $k(P)$, l'équation du type $B(\alpha)$ conduit à $\alpha P(f^2) = 0$, d'où $[M] = 0$ comme on le voit en utilisant les fonctions dont le support est dans l'ensemble $k(P)$. Finalement, la matrice $[P]$, représentative de l'opérateur P , est de la forme

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix}$$

qui est justement celle d'un opérateur d'interpolation (Th. 2.4).

Réciproquement, il est bien vrai que tout opérateur d'interpolation est un opérateur du type $B(\alpha)$.

En ce qui concerne le type $D(\alpha)$, sauf le cas $\alpha = 0$ de Reynolds (cf. Th. 3.3), la multiplicativité symétrique produit une décomposition de l'opérateur (cf. tableau du § 6).

On a également le théorème suivant, valable d'ailleurs sous des conditions plus générales. Pour abrégé, on note D le type $D(1)$ (ou $B(1)$).

THÉORÈME 3.6. — *Dans une algèbre de dimension finie un opérateur positif du type D est un opérateur d'interpolation.*

Il suffit d'écrire les équations canoniques du type D sous la forme

$$(12) \quad p_{ki}(p_{ii} - 1)^2 + \sum_{l \neq i} p_{il}^2 p_{kl} = 0$$

La positivité de P implique la positivité des coefficients p_{ij} de la matrice $[P]$, donc

$$(13) \quad p_{ki}(p_{ii} - 1)^2 = 0$$

et

$$(14) \quad p_{ii}^2 p_{kl} = 0 \quad \text{pour } l \neq i.$$

Par suite p_{ki} non nul implique $p_{ii} = 1$, tandis que $p_{ii} = 1$ procure $p_{li} = 0$ grâce à la relation (13) pour tout l différent de i . Ceci fournit la nullité de la ligne l , le terme diagonal étant excepté. Au contraire, si $p_{ii} = 0$, alors $p_{ki} = 0$ pour tout k , c'est-à-dire que la $i^{\text{ème}}$ colonne est entièrement nulle. Reportant ces résultats sur la matrice $[P]$, on trouve la forme d'un opérateur d'interpolation (d'ailleurs positif).

Bien entendu, il existe des exemples d'opérateurs, non positifs et non multiplicativement symétriques, de type $B(\alpha)$. Ainsi, à deux dimensions, la matrice

$$[P] = \begin{bmatrix} a & -a \\ a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

où a est une constante quelconque, représente un opérateur de type $B(1)$, d'ailleurs idempotent puisque $Pe = 0$. Géométriquement, cette matrice représente une projection sur la droite $(a-1)x = y$.

4. RELATIONS DE RÉCURRENCE

Lors de l'étude de la structure des opérateurs héli-multiplicatifs ou $E(\alpha)$, on doit transformer les relations de définition pour établir une nouvelle relation concernant les puissances de f et Pf . Plus généralement, il est intéressant d'examiner ce qui se passe pour un opérateur multiplicativement lié, c'est-à-dire de construire certaines relations de récurrence. Il en est de deux genres. D'une part on peut souhaiter des relations établissant le type vérifié par P^n , d'autre part on peut souhaiter des relations entre $(Pf)^n$ et f^n . Ces dernières sont de fait les plus utilisables.

PROPOSITION 4.1. — *Sur une algèbre commutative, un opérateur du type*

(a) *semi-multiplicatif, satisfait* $P(f(Pf)^n) = (Pf)^{n+1}$ *pour tout* $n \geq 0$.

(b) *demi-multiplicatif, satisfait* $P(f(Pf)^{n-1}Pg) = P((Pf)^nPg)$ *pour tout* $n \geq 1$.

(c) *héli-multiplicatif, satisfait* $P(f^n g) = P(gf^{n-2}(Pf)^2)$ *pour tout* $n \geq 2$.

Les démonstrations sont faciles : par exemple pour (b), on prend f de

la forme fP_f dans la relation de définition en utilisant $P(fP_f) = P(P_f)^2$ et l'on effectue un raisonnement par récurrence.

PROPOSITION 4.2. — *Sur une algèbre commutative, un opérateur du type*

(a) $D(\alpha)$, pour $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq 0$, satisfait

$$P(\alpha f - P_f)^{n+1} = (\alpha - 1)^n [\alpha (P_f)^{n+1} - P(P_f)^{n+1}] \text{ pour } n \geq 0$$

(b) $D(1) = D = B(1)$, satisfait :

$$P((f - P_f)^n (g - P_g)^m) = 0 \text{ pour } n \geq 1, \text{ et } m \geq 1.$$

(c) $D(0)$, c'est-à-dire de Reynolds, satisfait :

$$nP(f(P_f)^{n-1}) = (P_f)^n + (n - 1)P(P_f)^n \text{ pour } n \geq 1$$

(d) du type $D'(0)$, c'est-à-dire de Baxter, satisfait :

$$P(P_f - f)^n = P(P_f)^n - (P_f)^n \text{ pour } n \geq 1$$

(e) $B(\alpha)$, pour α différent de 1, 2 ou 0, satisfait, lorsque $n, m \geq 1$:

$$P((\alpha f - P_f)^n (\alpha g - P_g)^m) = (1 - \alpha)^2 P[P_f P_g (\alpha f - P_f)^{n-1} (\alpha g - P_g)^{m-1}]$$

Nous ne donnerons que la démonstration de (a). On part de la relation

$$(14) \quad 2P(fP_f) = \alpha P(f^2) + (1 - \alpha)(P_f)^2 + P(P_f)^2$$

que l'on peut écrire

$$(15) \quad P(\alpha f - P_f)^2 = (\alpha - 1)^2 (\alpha (P_f)^2 - P(P_f)^2)$$

ce qui montre que la relation (a) est exacte pour $n = 1$ et $n = 0$.

Supposons (a) vraie jusqu'à l'ordre n

$$P(\alpha f - P_f)^{n+1} = P((\alpha f - P_f)(\alpha f - P_f)^n)$$

et après avoir posé $F = \alpha f - P_f$ et $G = (\alpha f - P_f)^n$, il vient :

$$P(\alpha f - P_f)^{n+1} = \alpha P(FG) - P(GP_f)$$

Or par l'hypothèse de récurrence :

$$P(G) = (\alpha - 1)^{n-1} [\alpha (P_f)^n - P(P_f)^n]$$

d'où en posant $g = (P_f)^n$, on obtient

$$\begin{aligned} P(\alpha f - P_f)^{n+1} &= (\alpha - 1)^{n-1} [\alpha P(fg) - P(fPg) + (1 - \alpha)P_f P_g + P(P_f P_g) \\ &\quad - \alpha(1 - \alpha)(P_f)^{n+1} - \alpha P(P_f)^{n+1}] \\ &= (\alpha - 1)^{n-1} [P(gP_f) - \alpha(1 - \alpha)(P_f)^{n+1} - \alpha P(P_f)^{n+1}] \\ &= (\alpha - 1)^n [\alpha (P_f)^{n+1} - P(P_f)^{n+1}] \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. La formule (a) fournit un cas particulier de (b) en faisant $\alpha = 1$, mais ne donne rien pour $\alpha = 0$.

Ces relations sont utiles pour la construction effective d'un opérateur multiplicativement lié possédant des propriétés fixées *a priori* comme nous allons le montrer sur un exemple. Proposons-nous de construire un opérateur P du type $D(\alpha)$, pour $0 < \alpha < 1$, sur l'algèbre \mathcal{A} des fonctions entières munie de la topologie de la convergence compacte, pour laquelle nous supposons P continu. Nous supposons en outre que P commute avec les translations. Ce dernier point fournit l'image du polynôme z^n selon

$$P(z^n) = \sum_{k=0}^{k=n} C_k^k a_{n-k} z^k$$

où a_{n-k} est une constante, d'ailleurs égale à $P(z^k)(0)$. En outre la relation $D(\alpha)$, pour $f = g = 1$, donne $a_0(a_0 - \alpha)(a_0 - 1) = 0$. Les cas $a_0 = \alpha$ ou $a_0 = 0$, conduisent, après homothétie de rapport $\frac{1}{\alpha}$, à un opérateur de Baxter. Nous étudions donc le seul cas restant $a_0 = 1$, c'est-à-dire $P(1) = 1$.

Nous pouvons appliquer la relation (a) à la fonction $z - y_0$ où y_0 est un nombre complexe quelconque. En posant $a_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} b_1$, et $z_0 = y_0 - a_1$, on obtient

$$(16) \quad (\alpha - 1)P(x - z_0 - b_1)^{n+1} = \alpha(z - z_0)^{n+1} - P(z - z_0)^{n+1}$$

Sur la formule de Taylor d'un polynôme f , cela conduit à l'équation aux différences :

$$(17) \quad (\alpha - 1)Pf(z - b_1) = \alpha f(z) - Pf(z)$$

La solution unique de (17), lorsque $0 < \alpha < 1$, est fournie par

$$(18) \quad Pf(z) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \alpha)^k f(z - kb_1)$$

Un opérateur $D(\alpha)$ donne donc, dans certaines algèbres, l'opérateur résolvant une équation aux différences.

THÉORÈME 4.1. — *Sur une algèbre de polynômes, un opérateur linéaire commutant avec les translations et satisfaisant une relation du type $D(\alpha)$, où $0 < \alpha < 1$, peut s'écrire sous la forme (18).*

Quant aux puissances d'un opérateur multiplicativement lié, on peut obtenir les résultats résumés par les propositions suivantes :

PROPOSITION 4.3. — *Pour tout entier n , lorsque P est un opérateur du type*

(a) *multiplicativement symétrique, alors P^n est aussi multiplicativement symétrique,*

(b) *hémi-multiplicatif, alors P^n est aussi hémi-multiplicatif,*

(c) *U-idempotent, alors P^n est du même type,*

(d) *D, alors P^n est également du type D.*

PROPOSITION 4.4. — *Soit n un entier. Dans une algèbre commutative, pour que les opérateurs P et P^2 soient des opérateurs du type :*

(a) *de quasi-interpolation, il faut et il suffit que $P^2(fg) = P^2(PfPg)$ et dans ce cas P^n est également de quasi-interpolation,*

(b) *semi-multiplicatif, il faut et il suffit que $P^2fP^2g = P^2(PfPg)$ et dans ce cas P^n est également semi-multiplicatif,*

(c) *demi-multiplicatif, il faut et il suffit que $P^2(PfPg) = P^2(P^2fP^2g)$ et dans ce cas P^n est demi-multiplicatif,*

(d) *de Reynolds, il faut et il suffit que $P(P^2fP^2g) = P^2(PfPg)$ et dans ce cas P^n est de Reynolds,*

(e) *de Baxter, il faut et il suffit que $P(PfPg) = P^2(PfPg)$ et dans ce cas P^n est de Baxter.*

Jointe à la proposition 4.4, nous disposons du résultat suivant, en dimension finie :

THÉORÈME 4.2. — *Dans une algèbre de dimension finie, les puissances $n^{\text{ièmes}}$ conservent le type d'un opérateur semi-multiplicatif, d'un opérateur demi-multiplicatif symétrique, ou d'un opérateur de Reynolds.*

5. CARACTÉRISATIONS ALGÈBRIQUES

Une projection ($P^2 = P$) sur un sous-espace vectoriel d'une algèbre est souvent multiplicativement liée moyennant une propriété de type algébrique concernant soit le sous-espace sur lequel on projette, soit un sous-espace supplémentaire. De cette façon, on dispose de résultats qui caractérisent les opérateurs semi-multiplicatifs symétriques (cf. [6] G. Birkhoff), les opérateurs de Baxter (cf. [2] F. V. Atkinson). Parmi d'autres, nous ne donnerons que quelques exemples particulièrement simples.

THÉORÈME 5.1. — *Soit \mathcal{A} une algèbre et E un sous-espace vectoriel de \mathcal{A} dont un supplémentaire algébrique E' constitue une algèbre. La projection de \mathcal{A} sur E parallèlement à E' définit alors un opérateur du type D.*

Comme $\mathcal{A} = E \oplus E'$, on peut écrire $f = f_1 + f_2$ où $Pf = f_1$ appartient à E et f_2 appartient à E' .

De même $g = g_1 + g_2$. Par suite $f_2g_2 = (f - f_1)(g - g_1)$ appartient au sous-espace E' grâce à l'hypothèse faite, donc $P(f_2g_2) = 0$ ce qui donne

$$P((f - Pf)(g - Pg)) = 0.$$

Cette relation est équivalente à la définition du type D (cf. Prop. 4.2 [6]). Si de plus le sous-espace E constitue également une algèbre, alors l'opérateur idempotent P est un opérateur de Baxter.

De même, nous avons les résultats suivants :

PROPOSITION 5.1. — *Soit P un opérateur nilpotent. Cet opérateur est multiplicativement nilpotent si et seulement si son noyau est un idéal.*

Cet opérateur est U-nilpotent, si et seulement si $\text{Ker } P \times \text{Im } P$ appartient à $\text{Ker } P$.

PROPOSITION 5.2. — *Soit P un opérateur idempotent. Cet opérateur est d'interpolation si et seulement si son noyau est un idéal.*

Cet opérateur est demi-multiplicatif si et seulement si $\text{Ker } P \times \text{Im } P$ appartient à $\text{Ker } P$.

6. OPÉRATEURS DOUBLEMENT MULTIPLICATIVEMENT LIÉS

Il arrive que des opérateurs P vérifient deux relations du genre

$$\begin{aligned} P(fPf) &= F_1(f, Pf, P(f^2), P(Pf)^2) \\ \text{et} \quad P(fPf) &= F_2(f, Pf, P(f^2), P(Pf)^2) \end{aligned}$$

Ils sont dits doublement multiplicativement liés. Nous allons, à partir des types réduits envisagés au § 1, indiquer que ces opérateurs multiplicativement liés ont des propriétés simples. Nous ne donnons aucune démonstration et nous ne considérons que le cas des algèbres finies. Les résultats sont fournis sous forme d'un tableau triangulaire où une case indique un opérateur satisfaisant à la fois le type de la colonne et celui de la ligne correspondantes. Les notations utilisées sont celles du § 1 avec les conventions supplémentaires suivantes : Un signe \uparrow indique une implication d'un type

par un autre, un signe comme Th suivi d'un numéro renvoie au théorème *ad hoc* de cet article, un numéro entre parenthèses renvoie à une note explicative située au-dessous du tableau. Le signe C est utilisé pour désigner un centralisateur, le signe I pour un opérateur d'interpolation, le signe M pour un homomorphisme algébrique (opérateur multiplicatif $P(fg) = PfPg$) et le signe U2 pour les opérateurs tels que $I - P$ soit du type D. Ces derniers opérateurs sont dits *U-idempotents* et satisfont $P(PfPg) = PfPg$.

TABLEAU DE COMPARAISON

	MS	QI	SM	DM	D(α)	R	B(α)	D	D'(α)	Ba	U2	MAS	UN
MS	Th. 2.1	Th. 2.4	↓	Th. 2.3	(⁴)	↓	I	I	(⁴)	(⁵)	SMS 2I	↓	2N
	QI	Th. 3.2	M 2I	MS 2I	M 2I	M 2I	I	I	M 2I	M 2I	M 2I	0	(³)
		SM	Th. 3.1	2I	M 2I	↓	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	2I	0	2N Pe = 0
			DM		M 2I	↓	I	I	M 2I	M 2I	M 2I	↓	MN
			$\alpha \neq 1$ $\alpha \neq 0$	D(α)		M	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	M 2I	(²)	0
					R	Th. 3.3	M	M	M	M	↑	0	0
					$\alpha \neq 2$ $\alpha \neq 1$ $\alpha \neq 0$	B(α)	Th. 3.5	I	(¹)	M 2I	M 2I	0	(⁶)
						D	Th. 3.6	Ba 2I	U2 2I	Ba 2I	Ba 2I	0	(⁶)
					$\alpha \neq 1$ $\alpha \neq 0$	D'(α)			U2 2I	Ba 2I	(²)	MN (²)	
							Ba	Th. 4.4	D 2I	(²)	MN (²)		
								U2		0	0		
									MAS	Th. 2.5	↑		
										UN			

(¹) Si $(Pe)^2 = P(Pe)^2$ ou bien $P^2e = Pe$, alors P est idempotent multiplicatif.

(²) A une homothétie près, P est nilpotent multiplicatif.

(³) $Pe = 0$ et $P^2 = 2P$.

(⁴) Somme directe de trois opérateurs : $P = P_{11} \oplus P_{22} \oplus P_{34}$

où P_{11} est un opérateur idempotent multiplicatif,

P_{22} est un opérateur idempotent multiplicatif à une homothétie près,

et P_{34} est un opérateur nilpotent multiplicatif à une homothétie près.

(⁵) Même remarque qu'en (⁴), sans opérateur P_{22} toutefois.

(⁶) $Pe = 0$ et on se ramène à (³) après une homothétie convenable.

Nous n'avons pas fait figurer dans ce tableau les opérateurs de type E(α), non étudiés dans ce travail (cf. références citées).

Nous nous sommes volontairement restreints au cas d'algèbres de dimension finie. En fait, les méthodes de calcul utilisées s'adaptent également à l'étude des opérateurs multiplicativement liés sur des algèbres $K(F)$, c'est-à-dire sur des espaces de suites dont les éléments appartiennent à un anneau commutatif intègre F et qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls. L'algèbre $K(F)$ est en effet engendrée par une famille d'idempotents orthogonaux.

Du point de vue fonctionnel, $K(F)$ peut se réaliser comme l'algèbre des fonctions définies sur un ensemble dénombrable et ne prenant qu'un nombre fini de fois des valeurs non nulles. La plupart des résultats obtenus, et exprimés en termes d'opérateurs, se transcrivent dans cette nouvelle situation. Cependant on peut obtenir des résultats fonctionnels plus intéressants en se plaçant sur des algèbres topologiques pour lesquelles le sous-espace vectoriel engendré par les idempotents est un sous-espace dense et en imposant une condition convenable de continuité à l'opérateur P : par exemple l'ensemble des fonctions continues à valeurs complexes définies sur un espace stonien, sur lequel on peut essayer de démontrer les résultats donnés ici sous forme intrinsèque (Prop. 2.1, Prop. 2.4, Th. 2.5, Th. 3.1, Th. 3.2, Th. 3.3, etc.).

Imposant à P une condition de continuité adéquate, il devient plus intéressant d'entreprendre l'étude des opérateurs multiplicativement liés dans le cadre des algèbres $C(X)$, c'est-à-dire des algèbres de fonctions continues définies sur un espace topologique compact (cf. [15] J. L. Kelley). On peut aussi envisager des espaces de Banach à norme fonctionnelle, comme les espaces $L^p(\chi, \mathcal{F}, \mu)$ (cf. [20] G. C. Rota), à condition de ne définir P que sur un sous-espace dense, l'espace $L^\infty(\chi, \mathcal{F}, \mu)$ faisant l'affaire. Dans une telle situation, la considération de l'adjoint joue un grand rôle. En fait, par un théorème de représentation, on peut toujours se retrouver dans le cas de l'algèbre $C(X)$ (cf. [11] J. G. Dhombres). Une autre étude intéressante consiste à se placer sur l'algèbre de groupe d'un groupe abélien localement compact où la définition d'un opérateur multiplicativement lié utilise cette fois la convolution en lieu et place de la multiplication. De tels opérateurs font intervenir des transformations classiques en Analyse Harmonique (cf. résumé de résultats, à paraître aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. ARBAULT, Transformations de Reynolds sur les ensembles finis, C. I. M. E. Corso sulla teoria della turbolenza, Varenna, Settembre 1957.

- [2] F. V. ATKINSON, Some aspects of Baxter's functional equation. *J. of Math. Anal. and Appl.*, t. 7, 1963, p. 1-30.
- [3] J. BASS, Suites stationnaires dans l'espace de Hilbert. Moyennes temporelles. Moyennes abstraites. *J. de Math.*, t. 43, 1964, p. 321-352.
- [4] G. BAXTER, An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity. *Pacific J. of Math.*, t. 10, 1960, p. 731-742.
- [5] M. BILLIK and G. C. ROTA, On Reynolds operators in finite-dimensional algebras. *J. of Math. and Mech.*, t. 9, 1960, p. 927-932.
- [6] G. BIRKHOFF, Moyennes de fonctions bornées, Colloque international du CNRS, 1950, n° 24, *Algèbre et théorie des nombres*, p. 143-153.
- [7] G. BIRKHOFF, Lattices in applied mathematics, *Proc. of Symposium in Pure Mathematics*, vol. 2, 1961.
- [8] J. G. DHOMBRES, Sur une classe de moyennes. *Ann. de l'Institut Fourier*, t. 17, 1967, p. 135-156.
- [9] J. G. DHOMBRES, Opérateurs semi-multiplicatifs de norme unité. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, p. 1046-1049.
- [10] J. G. DHOMBRES, Sur les opérateurs multiplicativement liés dans les algèbres de dimension finie. *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, 1970, p. 444-447.
- [11] J. G. DHOMBRES, Sur les opérateurs multiplicativement liés (Thèse). *Mémoires de la Soc. Math. France*, Paris, n° 27, 1971.
- [12] M. L. DUBREIL-JACOTIN, Propriétés algébriques des transformations de Reynolds. Colloque d'algèbre supérieure, *C. B. R. S. Louvain*, 1957, p. 2-27.
- [13] J. KAMPÉ DE FÉRIET, Sur un problème d'algèbre abstraite posé par la définition de la moyenne dans la théorie de la turbulence. *Ann. de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 63, Série 1, 1949, p. 165-180.
- [14] J. F. C. KINGMAN, On the algebras of queues. *J. of Appl. Prob.*, t. 3, 1966, p. 285-326.
- [15] J.-L. KELLEY, Averaging operators on $C_\infty(X)$. *Ill. J. of Math.*, t. 2, n° 1, 1958, p. 214-223.
- [16] J. B. MILLER, Some properties of Baxter operators. *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 17, 1966, p. 387-400.
- [17] J. B. MILLER, Averaging and Reynolds operators on Banach algebras (I). *J. Math. Anal. Appl.*, t. 14, 1966, p. 527-548.
- [18] I. MOLINARO, Sur les endomorphismes de Reynolds sur un ensemble fini. *Publ. Sc. Univ. Alger*, t. 4, Série A, 1957, p. 87-101.
- [19] S. T. C. MOY, Characterization of conditional expectation as a transformation on function spaces. *Pacific J. Math.*, t. 4, 1954, p. 47-63.
- [20] G. C. ROTA, On the representation of averaging operators. *Rend. del Sem. Mat. Univ. Padova*, t. 30, 1960, p. 52-64.
- [21] G. C. ROTA, Baxter algebras and combinatorial identities I, II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 75, 1969, p. 325-334.

(Manuscrit reçu en février 1972).