ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

X. GUYON
E. LESQUOY
F. SCHAEFFER

Plans d'expérience adaptés à un champ d'hypothèses a priori. Construction. Précision globale

Annales de l'I. H. P., section B, tome 9, nº 4 (1973), p. 379-396
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1973__9_4_379_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. IX, n° 4, 1973, p. 379-396. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Plans d'expérience adaptés à un champ d'hypothèses *a priori*. Construction. Précision globale

par

X. GUYON, E. LESQUOY, F. SCHAEFFER

SUMMARY. — Following the first paper about experimental designs, this one gives some information about the precision of the estimation in a linear model. It also study the problem of what experiences can be dropped if the class of the operators A is restricted to a smaller one.

INTRODUCTION

La notion de plan d'expérience adapté à un champ d'hypothèses *a priori* est abordée par Pham Dinh [*1*] et reprise avec une formulation plus générale par D. Vaguelsy [*2*] peut se résumer ainsi.

Soit $T = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ un ensemble de traitements pouvant être appliqués sur des unités expérimentales et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^T$ fixant le champ d'hypothèses *a priori* :

$$(t \rightarrow EY_t) \in V.$$

Quelles expériences faut-il réaliser afin de pouvoir estimer tous les paramètres du modèle V ?

Un tel ensemble d'expériences sera dit, adapté au champ d'hypothèses *a priori* ou plan adapté au modèle V.

Le but de cet article est

1. de donner une méthode de construction générale de plans adaptés au modèle V,

2. de définir une mesure de la précision globale d'un plan adapté,

3. de répondre à la question : dans le cas où on ne voudrait estimer que certaines projections de la moyenne, comment obtenir des plans adaptés à ces estimations ?

PRÉLIMINAIRES ET NOTATIONS

On notera $T = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ l'ensemble des traitements réalisables, t un traitement.

Si, sur une unité expérimentale on applique le traitement t, on notera Y_t le résultat observé sur cette unité. Y_t est une variable aléatoire de moyenne :

$$EY_t = \varphi(t)$$

La condition « $\varphi \in V$ » définit le champ d'hypothèses *a priori*, ou modèle.

Reprenant les notations de D. Vaguelsy [*2*] on définira un plan d'expérience par un couple (U, s) où :

1. $U = \{1, 2, \ldots, n\}$ est l'ensemble de numérotation des unités expérimentales.

2. s est une application de U dans T ; $s(i)$ est le traitement appliqué à l'unité i.

Etant donné un plan d'expérience quelconque (U, s) on supposera connue la matrice Σ de covariance du vecteur ${}^t(Y_{s(1)}, \ldots, Y_{s(n)})$ et on supposera que cette matrice est régulière.

$\mathbb{R}^T$ est muni du produit scalaire canonique

$$(u, v) = \sum_{t \in T} u(t)v(t)$$

δ_t est le vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^T$

$$\delta_t(t') = 0 \qquad \text{si} \quad t \neq t'$$
$$\delta_t(t) = 1$$

V est muni du produit scalaire induit par celui de $\mathbb{R}^T$.

ψ est l'application linéaire :

$$\psi : V \to \mathbb{R}^U$$
$$\phi \mapsto \phi \circ s$$

Elle caractérise le plan d'expérience.

ESTIMATION LINÉAIRE DE VARIANCE GÉNÉRALISÉE MINIMALE D'UN OPÉRATEUR A

Soit (U, s) un plan adapté à l'estimation de V dans le modèle V. Soit E un espace euclidien, A un opérateur de V dans E,

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "A"'] & \mathbb{R}^u \arrow[d, "\tilde{A}"] & (\Omega, \mathscr{A}, P) \arrow[l, "Y"'] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Notons :

$$Y = {}^t(Y_{s(1)}, Y_{s(2)}, \ldots, Y_{s(n)})$$

$\tilde{A}Y$ est un estimateur sans biais de $A\varphi$ si et seulement si

$$E\tilde{A}Y = A\varphi \Leftrightarrow \tilde{A}\psi\varphi = \varphi.$$

On appelle « variance généralisée » de l'estimateur $\tilde{A}Y$ de $A\varphi$ la quantité :

$$E\,||\,\tilde{A}Y - A\varphi\,||^2 = \text{varg}\,(\tilde{A}Y).$$

Le théorème de Gauss-Markov s'écrit alors : cf. D. Vaguelsy [*2*], Courrège [*3*]. « Il existe un opérateur $\tilde{A}_0$ unique de $\mathbb{R}^U$ dans E tel que

1. $\tilde{A}_0Y$ estime $A\varphi$ sans biais pour tout φ de V.
2. $\tilde{A}_0Y$ est de variance généralisée minimale.
3. $\tilde{A}_0 = A({}^t\psi\Sigma^{-1}\psi)^{-1}\,{}^t\psi\Sigma^{-1}$.

Σ est l'opérateur de covariance associé à Y

$$\Sigma : \mathbb{R}^U \to (\mathbb{R}^U)$$

où :

$$\langle \Sigma a, b \rangle = \text{cov}\,(aY, bY)$$

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$
$$b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

et (U, s) adapté implique que

$$\text{rg}\,\psi = \dim V$$

${}^t\psi\Sigma^{-1}\psi$ est donc inversible.

DÉFINITIONS. — On notera plan A-adapté dans le modèle V un plan qui permet d'estimer, dans le modèle V, l'opérateur A Si :

$$E = V, \qquad A = I^d$$

opérateur identique de V, on notera plan V-adapté dans le modèle V. Si

$$E = V_1$$

sous-espace vectoriel de V et si

$$A = P_{V_1}$$

est la projection orthogonale sur V_1, on notera plan V_1-adapté dans le modèle V au lieu de P_{V_1}-adapté.

I. CARACTÉRISATIONS D'UN PLAN V-ADAPTÉ. PLANS MINIMAUX

Soit un plan (U, s), un modèle V. Notons

$$s^*(u) = \{ \delta_t, t \in s(u) \}$$

la partie de $\mathbb{R}^T$ associée à $s(u)$ par dualité ; [E] l'espace vectoriel engendré par la partie E et P_V la projection orthogonale sur V.

THÉORÈME 1. — *(U, s) est V-adapté dans le modèle V si et seulement si $P_V \{ s^*(u) \}$ engendre V :*

$$P_V[s^*(u)] = V.$$

Cette condition est équivalente à

$$\psi \text{ est de rang } p \quad \text{où} \quad p \text{ est la dimension de } V.$$

En particulier, (U, s) *est V-adapté minimal si et seulement si*

$$P_V \{ s^*(u) \} \text{ est une base de } V.$$

Dans ce cas : Card U = Card s(U) = dim V.

On sait que (U, s) est adapté si et seulement si

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in V \\ \varphi \text{ nulle sur } s(u) \end{array}\right\} \text{ entraîne } \varphi \text{ nulle}$$

Donc (U, s) est adapté si et seulement si

$$(s^*(u))^\perp \cap V = \{ 0 \}$$

c'est-à-dire

$$[s^*(u)] + V^\perp = \mathbb{R}^T$$

comme :

$$P_V[s^*(u)] \oplus V^\perp = [s^*(u)] + V^\perp$$

le résultat en découle immédiatement.

COROLLAIRE. — Si les traitements $\{ t_1, t_2, \ldots, t_p \}$ et la base $\mathscr{B}$ de V

$$\mathscr{B} = \{ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p \}$$

satisfont à

$$\begin{array}{ll} \varphi_i(t_i) \neq 0 & i = 1, 2, \ldots, p \\ \varphi_i(t_j) = 0 & j < i \end{array}$$

c'est-à-dire si le tableau des valeurs des φ_j en t_i est de la forme suivante :

$$\begin{array}{c|cccc} & \varphi_1 & \cdots\cdots & & \varphi_p \\ \hline t_1 & \neq 0 & & 0 & \\ t_2 & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_p & & & & \neq 0 \end{array}$$

alors $\{ t_1, t_2, \ldots, t_p \}$ est un plan V adapté minimal.

Application à la construction d'un tel plan

On part d'une base quelconque φ^0 de V :

$$\varphi^0 = \{ \varphi_1^0, \ldots, \varphi_p^0 \}.$$

On choisit un point t_1 tel que $\varphi_1^0(t_1)$ soit différent de 0 et on construit une nouvelle base φ^1 de V :

$$\begin{cases} \varphi_1^1 = \varphi_1^0 & \\ \varphi_j^1 = \varphi_1^0(t_1)\varphi_j^0 - \varphi_j^0(t_1)\varphi_1^0 & j = 2, \ldots, p. \end{cases}$$

On choisit alors un point t_2 tel que

$$\varphi_2^1(t_2) \neq 0 \ldots.$$

On pose

$$\begin{cases} \varphi_1^2 = \varphi_1^0 & \\ \varphi_1^2 = \varphi_1^1 & \\ \varphi_j^2 = \varphi_2^1(t_2)\varphi_j^1 - \varphi_j^1(t_2)\varphi_2^1 & j = 3, \ldots, p. \end{cases}$$

On continue le procédé jusqu'à φ^p.

Alors $\{ t_1, \ldots, t_p \}$ et $\{ \varphi_1^p, \ldots, \varphi_p^p \}$ satisfont aux conditions du corollaire.

II. PRÉCISION GLOBALE D'UN PLAN V-ADAPTÉ DANS LE MODÈLE V

Soit $\mathscr{V} = \{ v_1, v_2, \ldots, v_p \}$ une base orthogonale de V. On note $\psi_{\mathscr{V}}$ la matrice de l'opérateur ψ dans la base $\mathscr{V}$ de V et la base canonique de $\mathbb{R}^U$, Σ la matrice de covariance de Y. Alors la variance généralisée de $\hat{\varphi}$ s'écrit

$$\operatorname{varg} \hat{\varphi} = \mathrm{E} \| \hat{\varphi} - \varphi \|^2 = \operatorname{trace} ({}^t\psi_{\mathscr{V}} \Sigma^{-1} \psi_{\mathscr{V}})^{-1}.$$

En effet si $\mathscr{V}$ est orthonormale et si φ s'écrit

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i v_i$$

alors

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \hat{\lambda}_2 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_p \end{pmatrix} = ({}^t\psi_{\mathscr{V}} \Sigma^{-1} \psi_{\mathscr{V}})^{-1} \, {}^t\psi_{\mathscr{V}} \Sigma^{-1} \mathrm{Y}.$$

et :

$$\operatorname{varg} \hat{\varphi} = \operatorname{trace} \operatorname{cov} (\hat{\lambda}) = \operatorname{trace} \mathrm{E} \{ (\hat{\lambda} - \lambda)^t (\hat{\lambda} - \lambda) \}.$$

Nous appellerons ce nombre, « précision globale » du plan.

Remarquons que la « précision globale » d'un plan d'expérience est invariante par les permutations σ_1 de A_1, σ_2 de A_2, ..., σ_p de A_p. On en déduit une permutation σ de T :

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_p).$$

Il correspond à cette permutation σ, un changement de base de V ; si :

$$v_i = \sum_{t \in \mathrm{T}} a_t^i \delta_t$$

alors :

$$\sigma(v_i) = \sum_{t \in \mathrm{T}} a_t^i \delta_{\sigma(t)}$$

Si $\mathscr{V}$ est orthonormale, $\sigma(\mathscr{V})$ est encore orthonormale :

$$\langle \sigma(v_i), \sigma(v_j) \rangle = \sum_{t \in \mathrm{T}} a_t^i a_t^j = \langle v_i, v_j \rangle$$

et comme la précision globale est la trace d'une matrice, elle est invariante par transformation orthogonale ; en effet si $\mathcal{W}$ est une autre base orthonormale

$$\psi_{\mathcal{V}} = \psi_{\mathcal{W}} \mathrm{P}$$

où P est orthogonale

$$\operatorname{trace} ({}^t\psi_{\mathcal{V}} \Sigma^{-1} \psi_{\mathcal{V}})^{-1} = \operatorname{trace} ({}^t\mathrm{P}{}^t\psi_{\mathcal{W}} \Sigma^{-1} \psi_{\mathcal{W}} \mathrm{P})^{-1}.$$

DÉFINITION. — On appellera « équivalents » (cf. [*1*]) deux plans (U_1, s_1), (U_2, s_2) tels que :

* $$\mathrm{U}_1 = \mathrm{U}_2$$

** Il existe une permutation $\sigma = (\sigma_1 \ldots \sigma_p)$ telle que

$$s_1 = \sigma \circ s_2.$$

PROPOSITION II.1. — Soit $(\mathrm{W}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+q}$ un système de générateurs de V. Si tout élément φ dans V se décompose de façon unique

$$\varphi = \sum_{i=1}^{p+q} \lambda_i \mathrm{W}_i$$

où les λ_i sont définies par les conditions supplémentaires

$$\begin{cases} \mu'_1 \lambda = 0 \\ \vdots \\ \mu'_q \lambda = 0 \end{cases} \qquad \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{p+q} \end{pmatrix}$$

et si on pose

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_q \end{pmatrix}$$

On a le résultat suivant :

$$\operatorname{varg} \hat{\varphi} = \sum_{i,j} [\langle \mathrm{W}_i, \mathrm{W}_j \rangle + \langle q_i, q_j \rangle] \operatorname{cov} (\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j)$$

où q_i est la i^e colonne de Q. En particulier si $(\mathrm{W}_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ est une base orthonormale de V :

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{var} \hat{\lambda}_i = \mathrm{E} \| \hat{\varphi} - \varphi \|^2 = \operatorname{varg} \hat{\varphi}.$$

Démonstration. — Démontrons d'abord le résultat pour une base $(v_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ orthonormale

$$\varphi = \Sigma \lambda_i v_i.$$

Si $\hat{\varphi}$, $\hat{\lambda}_i$ sont les estimateurs de variance minimum, alors :

$$\hat{\varphi} = \Sigma \hat{\lambda}_i v_i$$

On a donc :

$$\operatorname{varg} \hat{\varphi} = \mathrm{E} \| \hat{\varphi} - \varphi \|^2 = \mathrm{E}\Sigma(\hat{\lambda}_i - \lambda_i)^2 = \sum_i \operatorname{var} \hat{\lambda}_i.$$

Si P est la matrice $(p, p + q)$ des coordonnées de $\mathscr{W}$ dans $\mathscr{V}$ alors

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{P} \\ \hline \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_q \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{p+q} \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{cov} \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\left[\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 - \lambda_1 \\ \hat{\lambda}_2 - \lambda_2 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_p - \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} {}^t\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_1 - \lambda_1 \\ \hat{\lambda}_2 - \lambda_2 \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_p - \lambda_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \mathrm{P} \\ \hline \mathrm{Q} \end{bmatrix} \operatorname{cov} (\hat{\alpha}) [\mathrm{P}', \mathrm{Q}'].$$

En prenant la trace de cette matrice on obtient bien

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{var} \hat{\lambda}_i = \sum_{i,j} [\langle \mathrm{W}_i, \mathrm{W}_j \rangle + \langle q_i, q_j \rangle] \operatorname{cov} (\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j).$$

Exemple : modèle additif.

Les paramètres classiques de l'analyse de variance sont tels que

$$\varphi = \mu + \sum_{i=1}^{\mathrm{I}} \alpha_i \delta_{a_i} + \sum_{j=1}^{\mathrm{J}} \beta_j \delta_{b_j}$$

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \dots 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \underbrace{0 \dots 0}_{\mathrm{I}} & \underbrace{1 \dots 1}_{\mathrm{J}} \end{pmatrix}$$

Les matrices des produits scalaires $\langle W_i, W_j \rangle$ et $\langle q_i, q_j \rangle$ s'écrivent :

$$(\langle W_i, W_j \rangle) = \begin{array}{r} \\ I\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}}\right. \\ J\left\{\vphantom{\begin{matrix}1\\ \ddots\\ 1\end{matrix}}\right. \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} IJ & \overbrace{J \; \cdots \; J}^{I} & \overbrace{I \; \cdots \; I}^{J} \\ \hline & \begin{matrix} J & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J \end{matrix} & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix} \\ \hline & & \begin{matrix} I & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$(\langle q_i, q_j \rangle) = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & \underbrace{\begin{matrix} \\ 0 \\ \\ \end{matrix}}_{I} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{matrix}}_{J} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}}\right\} I \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\ \vdots\\ 1\end{matrix}}\right\} J \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{varg } \hat{\varphi} = \text{IJ var } \hat{\mu} &+ J \sum_i \text{var } \hat{\alpha}_i + I \sum_j \text{var } \hat{\beta}_j \\ &+ 2J \sum_i \cos(\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i) + 2I \sum_j \text{cov}(\hat{\mu}, \hat{\beta}_j) \\ &+ \sum_{i,j} \text{cov}(\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j) + \sum_{i,j} \text{cov}(\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j). \end{aligned}$$

Les $\hat{\alpha}_i$ et les $\hat{\beta}_j$ étant les estimateurs sans biais de variance minimum des paramètres, on a :

$$\sum_i \hat{\alpha}_i = 0$$

$$\sum_j \hat{\beta}_j = 0.$$

On en déduit donc :

$$\operatorname{varg} \hat{\varphi} = \mathrm{IJ} \operatorname{var} \hat{\mu} + \mathrm{J} \sum_i \operatorname{var} \hat{\alpha}_i + \mathrm{I} \sum_j \operatorname{var} \hat{\beta}_j .$$

Remarque. — En décomposant φ sur la base orthonormale $(\delta_t)_{t \in \mathrm{T}}$ on obtient

$$\mathrm{E} \| \varphi - \hat{\varphi} \|^2 = \sum_{t \in \mathrm{T}} \mathrm{E}[(\hat{\mu}_t - \mu_t)^2] = \sum_{t \in \mathrm{T}} \operatorname{var} \hat{\mu}_t$$

où $\hat{\mu}_t$ est l'estimateur de variance minimum de la moyenne μ_t. Si le plan adapté est minimal :

$$\hat{\mu}_t = \mathrm{Y}_t \qquad t \in \mathrm{S}(u)$$

et si t n'est pas dans $\mathrm{S}(u)$, $\hat{\mu}_t$ est la combinaison linéaire des $\mathrm{Y}_{s(i)}$ dont l'espérance vaut μ_t. On trouvera dans le paragraphe 4, comment dans le cas du modèle additif à deux facteurs on lit directement sur le plan d'expérience, la valeur de la variance généralisée.

III. PLANS V_1-ADAPTÉS DANS LE MODÈLE V

Soient V_2 le supplémentaire orthogonal de V_1 dans V et $\tilde{\mathrm{V}}_1$ un supplémentaire quelconque de V_1 dans V. Un plan qui rend estimable la projection orthogonale $\mathrm{P}_{\mathrm{V}_1}$ rend estimable la projection $\pi_{\tilde{\mathrm{V}}_1}^{\mathrm{V}_2}$ sur $\tilde{\mathrm{V}}_1$ parallèlement à V_2, car il existe un isomorphisme L tel que :

$$\pi_{\tilde{\mathrm{V}}_1}^{\mathrm{V}_2} = \mathrm{L} \circ \mathrm{P}_{\mathrm{V}_1} .$$

Un plan est donc V_1 adapté si et seulement si il permet d'estimer tout opérateur nul sur V_2.

PROPOSITION III.1. — Un plan $(\mathscr{U}, s)$ est V_1-adapté dans le modèle V si et seulement si

$$\mathrm{V}_1 \subset \mathrm{P}_{\mathrm{V}}[\mathrm{S}^*(u)] .$$

Démonstration. — « $(\mathscr{U}, s)$ V_1-adapté dans le modèle V » s'écrit :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi \in \mathrm{V} \\ \varphi \,|_{\mathrm{S}(u)} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \in \mathrm{V}_1$$

c'est-à-dire

$$(\mathrm{S}^*(u))^{\perp} \cap \mathrm{V} \subset \mathrm{V}_2 .$$

On en déduit alors :

$$[S^*(u)] + V^{\perp} \supset V_1$$
$$P_V[S^*(u)] \oplus V^{\perp} \supset V_1$$
$$P_V[S^*(u)] \supset V_1.$$

Relations entre plans V_1-adaptés et plans V-adaptés, dans le modèle V

Ces relations sont explicitées par les trois résultats suivants :

PROPOSITION III.2. — Tout plan minimal $\{ t_1, t_2, \ldots, t_k \}$ V_1-adapté dans le modèle V peut se prolonger en un plan $\{ t_1, t_2, \ldots, t_k, \ldots, t_p \}$ V-adapté dans le modèle V, minimal.

PROPOSITION III.3. — De tout plan V-adapté dans V minimal, on peut extraire un unique plan minimal V_1-adapté dans V.

PROPOSITION III.4. — Si $S(u)$ et $S'(u)$ sont deux plans V-adaptés dans V, minimaux, qui induisent par extraction le même plan $S^1(u)$ V_1-adapté dans V, alors tout élément de V_1 admet le même estimateur de variance minimum dans $S(u)$ et $S'(u)$, c'est-à-dire, l'estimateur de la projection orthogonale sur V_1 ne dépend que de $S^1(u)$.

Démonstration de la proposition III.2. — Soit $S_1(u)$ un plan V_1-adapté dans V, minimal (au sens de l'inclusion) et différent de T.

$$S_1(u) = \{ t_1, t_2, \ldots, t_k \}.$$

La suite des espaces vectoriels $[P_V\delta_{t_1}]$, $[P_V\delta_{t_1}, P_V\delta_{t_2}]$, $\ldots$, $[P_V\delta_{t_1}, \ldots, P_V\delta_{t_k}]$ est strictement croissante puisque $\{ t_1, t_2, \ldots, t_k \}$ est minimale. De plus d'après la proposition III.1, on a :

$$[P_V\delta_{t_1}, \ldots, P_V\delta_{t_k}] \supset V_1.$$

On a donc

$$\begin{cases} \dim [P_V\delta_{t_1}, \ldots, P_V\delta_{t_i}] = i & i = 1, 2, \ldots, k \\ [P_V\delta_{t_1}, \ldots, P_V\delta_{t_k}] \supset V_1. \end{cases}$$

On peut alors trouver des fonctions orthonormales de V, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ telles que :

$$[P_V\delta_{t_1}, \ldots, P_V\delta_{t_i}] = [\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_i] \qquad i = 1, 2, \ldots, k$$

et le tableau des valeurs des φ_i sur les t_i de la forme

$$
\begin{array}{c|ccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2, \ldots, & \varphi_k \\
\hline
t_1 & \neq 0 & & \\
t_2 & & \ddots & 0 \\
\vdots & & & \\
t_k & & & \neq 0.
\end{array}
$$

Comme pour la construction d'un plan minimal faite au paragraphe I, on peut trouver des fonctions $\varphi_{k+1}, \ldots, \varphi_p$ et des points $t_{k+1}, \ldots, t_p$ tels qu'on ait le tableau suivant

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & \varphi_1 & \varphi_2 \ldots & \varphi_k, & \varphi_{k+1}, \ldots, & \varphi_p \\
\hline
t_1 & \neq 0 & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & \\
t_k & & & & & 0 \\
t_{k+1} & & & \ddots & & \\
\vdots & & & & & \\
t_p & & & & & \neq 0
\end{array}
$$

c'est-à-dire $\{ t_1, t_2, \ldots, t_p \}$ V-adapté dans V et minimal.

Démonstration de la proposition III.3. — Soit $S(u)$ un plan V-adapté dans V et minimal :

$$S(u) = \{ t_1, t_2, \ldots, t_p \}$$

Si il existe un indice i tel que :

$$[P_V \delta_{t_j}, 1 \leqslant j \leqslant p, j \neq i] \supset V_1$$

on retire le point t_i et on ne considère plus que

$$\{ t_1, t_2, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_p \} ;$$

sinon $\{ t_1, t_2, \ldots, t_p \}$ est le plan V_1-adapté dans V minimal que l'on peut extraire de $S(u)$. Si on est dans le premier cas, on recommence l'opération sur $\{ t_j, j \neq i \}$ et finalement au bout d'un nombre fini de telles extractions on aboutit à une partie $S_1(u)$ incluse dans $S(u)$ minimale, V_1-adaptée dans V.

* Supposons maintenant que nous ayons trouvé deux parties de $S(u)$,

minimales, $s^1(u)$ et $s^2(u)$, qui soient V_1-adaptées dans le modèle V. Posons

$$\begin{aligned} A_1 &= [P_V\delta_t,\ t \in s^1(u)] \\ A_2 &= [P_V\delta_t,\ t \in s^2(u)] \\ A &= [P_V\delta_t,\ t \in s^1(u) \cap s^2(u)] \\ \tilde{A}_1 &= [P_V\delta_t,\ t \in s^1(u) - s^1(u) \cap s^2(u)] \\ \tilde{A}_2 &= [P_V\delta_t,\ t \in s^2(u) - s^1(u) \cap s^2(u)] \end{aligned}$$

alors :

$$A_1 = A \oplus \tilde{A}_1, \qquad A_2 = A \oplus \tilde{A}_2$$
$$A_1 \cap A_2 = A$$

Parce que $\{ P_V\delta_t, t \in s(u) \}$ sont linéairement indépendants. Comme A_1 et A_2, A contient V_1 ; la minimalité entraîne que :

$$A = A_1 = A_2$$

c'est-à-dire

$$s^1(u) = s^2(u)$$

Démonstration de la proposition III.4. — Posons

$$\begin{aligned} S_1(u) &= \{ t_1, t_2, \ldots, t_k \} \\ S(u) &= \{ t_1, t_2, \ldots, t_k, t_{k+1}, \ldots, t_n \} \end{aligned}$$

On sait que

$$P\ [S_1^*(u)] \supset V_1.$$

Soit $(v_1, v_2, \ldots, v_l)$ une base orthonormale de V_1 que l'on prolonge en une base orthonormale de V, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} [v_1, v_2, \ldots, v_k] = P_V[S_1^*(u)] \\ v_j \perp P_V[S_1^*(u)], \qquad k + 1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

Par hypothèse la fonction φ donnée par

$$\varphi(t) = EY_t$$

est dans V. Donc

$$EY_{t_i} = \varphi(t_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j(t_i)$$

$$1 \leqslant i \leqslant n$$

relation que l'on écrit matriciellement :

$$\begin{cases} EY = \psi\lambda \\ \psi_{ji} = v_j(t_i) \qquad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

ψ est de la forme suivante :

$$\psi = \left(\begin{array}{c|c} \psi_1 & 0 \\ \hline \underset{\longleftarrow k \longrightarrow}{\psi_2} & \psi_3 \end{array}\right)\updownarrow k$$

ψ étant régulière on obtient l'estimateur de λ, $\hat{\lambda}$:

$$\hat{\lambda} = \left(\begin{array}{c|c} \psi_1^{-1} & 0 \\ \hline -\psi_3^{-1}\psi_2\psi_1^{-1} & \psi_3^{-1} \end{array}\right) Y$$

En particulier $P_{V_1}\varphi = \sum_{i=1}^{I} \lambda_i v_i$ est estimé par $\sum_{i=1}^{I} \hat{\lambda}_i v_i$ et ne dépend que des k observations effectuées sur $S_1(u)$.

Recherche du plan V_1-adapté dans V minimal extrait d'un plan V-adapté minimal

Soit $S(u) = \{ t_1, t_2, \ldots, t_p \}$ un plan V-adapté minimal et $\{ v_1, v_2, \ldots, v_I \}$ une base de V_1 que l'on complète en une base de V, $\{ v_1, v_2, \ldots, v_I, \ldots, v_p \}$. On appelle t_ψ la matrice qui contient en colonnes les vecteurs $P_V\delta_{t_k}$ exprimés dans la base $\{ v_1, v_2, \ldots, v_p \}$. Soit R la partie de $S(u)$ telle que $S(u) - R$ soit V_1-adaptée dans V, minimale ; alors on a la caractérisation suivante :

t_k est dans R si et seulement si la k^e ligne de $({}^t\psi)^{-1}$ commence par I zéros, c'est-à-dire la k^e coordonnée de v_1 (resp. $v_2, \ldots, v_I$) exprimé dans la base $(P_V\delta_{t_1}, \ldots, P_V\delta_{t_p})$ est nulle.

IV. EXEMPLE : MODÈLE ADDITIF A DEUX FACTEURS

IV.1. Liste des plans minimaux. $V = E_1 + E_2$

On a figuré les représentants des 28 classes d'équivalence des plans minimaux V-adaptés, dans un modèle additif (5×4). On a choisi les représentants en classant les plans d'expérience de la façon suivante :

la suite des couples (i, j) représentant une expérience $i = 1 \ldots 5$, $j = 1 \ldots 4$ est rangée dans l'ordre lexicographique décroissant :

$$s(u) = (s(1), s(2) \ldots s(8))$$
$$s(1) > s(2) > \ldots > s(8).$$

Les différents plans d'expérience sont aussi ordonnés avec l'ordre lexicographique :

$$\begin{array}{rl} s(u) > t(u) & \text{si il existe un } i \text{ tel que} \\ s(j) = t(j) & j = 1 \ldots i \\ s(j+1) > t(j+1) & \end{array}$$

on représente chaque classe de plans par le plus grand de ses éléments. On numérote enfin ces représentants en les rangeant dans l'ordre lexicographique décroissant.

On remarquera que la transformation orthogonale de V qui correspond à des permutations de niveaux de chaque facteur laisse invariants les sous-espaces Φ_φ, Ω_1 et Ω_2.

La précision globale est invariante mais aussi les précisions partielles sur Ω_φ, Ω_1, Ω_2, c'est-à-dire

$$\operatorname{var} \hat{\mu}, \quad \sum_1^I \operatorname{var} \hat{\alpha}_i, \quad \sum_1^J \operatorname{var} \hat{\beta}_j.$$

Sous chacun des plans on a porté les trois nombres

* précision globale
* $J \sum_1^I \operatorname{var} \hat{\alpha}_i$
* $I \sum_1^J \operatorname{var} \hat{\beta}_j$

calculé dans le cas où Σ est l'identité.

IV.2. Calcul direct de la précision globale pour $\Sigma = \mathrm{I}d$

Un plan est adapté si par « saturation » on obtient T tout entier (voir [*6*]).

Pour saturer un plan d'expérience on ajoute tous les points (i, j) qui constituent le quatrième sommet d'un rectangle dont les trois autres sont points du plan ou d'une saturation précédente jusqu'à obtenir un rectangle de points.

En effet si, Y_{11}, Y_{12}, Y_{21} sont des variables d'expérience réalisées, l'estimateur de variance minimum de μ_{22} est :

$$\hat{\mu}_{22} = Y_{12} + Y_{21} - Y_{11}$$

PLANS MINIMAUX ADAPTÉS A L'ESTIMATION DE LA MOYENNE DANS LE CAS D'UN MODÈLE ADDITIF 5×4

```
n° 1           n° 2           n° 3

o o o o o      o o o o o      o o o o o
o              o              o
o              o                o
o                o                o
44  16   15    44  16  20     44  16  22.5

n° 4           n° 5           n° 6           n° 7           n° 8           n° 9           n° 10

o o o o        o o o o        o o o o        o o o o        o o o o        o o o o        o o o o
o       o      o       o      o       o      o       o      o       o      o       o      o       o
o              o              o                o              o              o                     o
o                o                    o        o                o                   o              o
44 20.8  15    46 20.8 20     50 20.8  20    48 20.8  20    48 20.8 22.5   52 20.8 20.56     20.8 20

n° 11          n° 12          n° 13          n° 14          n° 15

o o o          o o o          o o o          o o o          o o o
o     o o      o     o o      o     o o      o     o o      o     o o
o              o o              o              o              o
o                o              o                o                  o
44 22.4  15    48 22.4 20     52 22.4  20    52 22.4 22.5   52 22.4  25

n° 16          n° 17          n° 18

o o o          o o o          o o o
o     o        o     o        o     o
o       o      o       o      o       o
o                o                  o
44  24   15    48  24  20     50  24   20
```

n° 19

```
o o o
o     o
  o     o
    o
52 25.6 22.5
```

n° 20

```
o o o
o     o
  o     o
      o
56 25.6 25
```

n° 23

```
o o o
o     o
o
  o     o
50 25.6 20
```

n° 21

```
o o o
o     o
      o o
      o
54 27.2 20
```

n° 22

```
o o o
o     o
      o o
        o
60 27.2 25
```

n° 24

```
o o o
o     o
o
      o o
52 27.2 20
```

n° 25

```
o o o
o     o
  o
      o o
56 27.2 25
```

n° 26

```
o o
o   o
o     o
o       o
44 25.6 15
```

5

n° 27

```
o o
o   o
o     o
  o     o
52 28.8 20
```

n° 28

```
o o
o   o
  o   o
    o   o
60 32 25
```

si
$$\Sigma = \mathrm{I}d$$
$$\operatorname{var} \hat{\mu}_{22} = 3$$

d'où le résultat suivant :

« la précision globale est égale au nombre de fois que l'on utilise les points du plan minimal pour obtenir une saturation du plan ».

Exemple : $I = 6$, $J = 4$ et le plan est donné par le schéma ci-contre :

.	points du plan
3	saturation au 1er tour
5	saturation au 2e tour
7	saturation au 3e tour

5	5	3	3	.	.
3	3	.	.	.	3
.	.	.	3	3	5
.	3	3	5	5	7

Précision globale $= (9 + 3 \times 9 + 5 \times 5 \times 5 \times 1 \times 7) = 68$.

Ainsi les plans qui donnent la meilleure précision globale sont ceux qui se saturent complètement au 1er tour.

IV.3. Sous-plan Ω_1-adapté minimaux extraits

On sait cf. [4] qu'un plan est Ω_1 adapté si c'est un « escalier » dont la projection horizontale est complète.

Dans la présentation des plans 5×4 on a rangé sur une même ligne ceux qui donnent le même $s^1(u)$, Ω-adapté minimal (ou des $s^1(u)$ équivalents). Il est donc normal que sur une ligne la « précision sur Ω_1 »

$$J \sum_{1}^{I} \operatorname{var} \alpha_i$$

soit constante.

RÉFÉRENCES

[1] PHAM DINH, Contributions à l'analyse de la variance et aux plans d'expérience (thèse présentée à l'Université de Grenoble).

[2] D. VAGUELSY, Plans d'expérience.

[3] COURRÈGE, FILLOCHE, PRIOURET, Régression linéaire et estimation par la méthode des moindres carrés. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, vol. VII, n° 4, 1971, p. 253-270.

[4] X. GUYON, E. LESQUOY et F. SCHAEFFER, Recherche de plans d'expériences adaptés à des hypothèses *a priori* dans certains cas particuliers.

[5] BARRA, *Notions fondamentales de statistique Mathématiques*, Dunod.

[6] D. BIRKES, Y. DODGE, N. HARTMANN et J. J. SEELY, Estimability and analysis for additive two-way classification models with missing observations Department of Statistics. Oregon State, Univ.

(Manuscrit reçu le 5 juin 1973)