ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

M. YOR

# Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 10, nº 1 (1974), p. 31-36
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1974__10_1_31_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,* Section B :
Vol. X, n° 1, 1974, p. 31-36. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Sur les intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach

par

M. YOR

RÉSUMÉ. — On montre sur des contre-exemples la difficulté qu'il y a à sortir des espaces de Hilbert pour la définition de l'intégrale stochastique d'un processus à valeurs opérateurs par rapport à une martingale (même un mouvement brownien réel).

SUMMARY. — With the help of counter examples, we show the difficulty of extending the definition of the stochastic integral of an operator valued process by a martingale (even a scalar brownian motion) beyond the class of Hilbert spaces.

## 1. PRÉLIMINAIRES

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ espace de probabilité muni d'une famille croissante de sous-tribus $(\mathscr{F}_{t, t \in \mathbb{R}_+})$ continue à droite, et telle que $\mathscr{F}_t$ contienne les ensembles négligeables de $\mathscr{F}_\infty = \sigma(\mathscr{F}_{s, s \in \mathbb{R}_+})$ ; soit $(m_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une $\mathscr{F}_t$ martingale réelle continue telle que $E[m_t^2] < \infty, \forall t$, et $a_t$ le processus croissant continu associé.

On note B un espace de Banach réel, séparable, B′ son dual fort, et $(y', x) = y'(x) (y' \in B' ; x \in B)$ exprime la dualité entre B et B′. $T > 0 ; C > 0$ ; $\mathscr{M}_{T,C}(B)$ est l'ensemble des processus $\varphi : [0, T] \times \Omega \to B$ $\mathscr{F}_t$ bien mesurables, et tels que $\forall s \leqslant T, \forall \omega, \| \varphi(s, \omega) \|_B \leqslant C$. Une définition naturelle de

$\left(\int_0^t \varphi(s)dm_s,\ t \leqslant T\right)$ serait un processus $\Phi(t, \omega)$ — s'il existe — bien mesurable, à valeurs dans B, tel que :

$$\forall y' \in B',\ (y', \Phi(t)) = \int_0^t (y', \varphi(s))dm_s \qquad \text{P. p. s.}$$

On montre dans la suite pour les espaces $B = l^p(N)(1 \leqslant p < 2)$ qu'une telle construction est impossible. En effet, si $\varphi(s) = (\varphi_n(s))_{n\in\mathbb{N}}$, alors :

$$\text{(1)} \qquad \Phi(t) = \left(\int_0^t \varphi_n(s)dm_s\right)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{P. p. s.}$$

et on exhibera plusieurs exemples de processus $\varphi \in \mathcal{M}_{T,C}(l^p(N))(1 \leqslant p < 2)$ tels que :

soit *a*) $\quad E[\|\Phi(T)\|_p^p] = \infty \quad$ ou même $\quad P[\|\Phi(T)\|_p < \infty] = 0$

soit *b*) pour des processus $\varphi$ pour lesquels *a*) n'est pas vérifié (en particulier $\varphi$ tel que, pour $n \geqslant N$, $\varphi_n(s) = 0$), il n'existe pas de constante $K < \infty$ telle que :

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{M}_{T,C}(l^p(\mathbb{N}))} E[\|\Phi(T)\|_p^p] \leqslant K < \infty$$

où $\Phi$ désigne l'intégrale stochastique de $\varphi$ par rapport à un mouvement brownien réel.

Une telle constante K existe lorsque l'on remplace $l^p(\mathbb{N})$ par H espace de Hilbert et que l'on considère $E[\|\Phi(T)\|_H^k](k \geqslant 1)$ (il suffit de considérer pour $m \in \mathbb{N}$ ; $f(x) = \|x\|_H^{2m}$, *et on applique une formule de Ito*) (*cf.* [2] *ou chapitre III.A de* [3]).

Remarquons que l'existence d'un processus $\varphi$ vérifiant *a*) entraîne *b*) : il suffit de considérer les processus $\varphi^{(n)}$ formés avec les $n$ premières coordonnées de $\varphi$.

## 2. LE CAS $l^1(\mathbb{N})$

2.*a* Pour montrer a), on prend pour $(m_t)$ un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien $(B_t)$

$$\varphi(s) = \left(1_{\left[\frac{T}{n+1}, \frac{T}{n}\right[}(s)\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \in \mathcal{M}_{T,1}(l^1(\mathbb{N}^*)).$$

$$\Phi(T) = \left(B_{\frac{T}{n}} - B_{\frac{T}{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

On remarque immédiatement que :

$$E[\|\Phi(T)\|_1] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} E[\,|B_{\frac{T}{n}} - B_{\frac{T}{n+1}}|\,] = \sqrt{\frac{2T}{\pi}} \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \sqrt{\frac{1}{n(n+1)}} = \infty.$$

De plus, on a : $P[\|\Phi(T)\|_1 = \infty] = 1$. En effet, les variables $X_n = B_{\frac{T}{n}} - B_{\frac{T}{n+1}}$

sont indépendantes et la convergence de la série $\sum_n |X_n|$ p. s. est équivalente à la convergence du produit $\prod_{p=1}^n E[e^{it|X_p|}]$ sur un ensemble de mesure de Lebesgue non nulle. Or pour X variable gaussienne réduite,

$$\begin{cases} E[e^{it|X|}] = e^{-\frac{1}{2}t^2}(1 + iF(t)) \\ F(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t e^{\frac{1}{2}\mu^2} d\mu \end{cases}$$

On pose $\sigma_n = (E[X_n^2])^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{T}{n(n+1)}}$

On a alors

$$\prod_{p=1}^n E[e^{it|X_p|}] = \prod_{p=1}^n e^{\frac{1}{2}t^2\sigma_p^2}(1 + F(\sigma_p t)) \tag{2}$$

Le produit $\prod_{p=1}^n e^{\frac{1}{2}t^2\sigma_p^2}$ converge. D'autre part,

$$1 + iF(\sigma_n t) = \rho_n e^{i\theta_n} \left(0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\prod_{p=1}^n \rho_p$ converge, car $\rho_p = (1 + F(\sigma_p t)^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\quad \text{Log}\, \rho_p \sim \frac{1}{2}(F(\sigma_p t))^2$

Enfin, pour $n \to \infty$, $\theta_n \simeq \sin \theta_n \simeq F(\sigma_n t)$

$$\begin{aligned} F(\sigma_n t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma_n t} e^{\frac{1}{2}\mu^2} d\mu &\geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\sigma_n t} \left(\frac{\mu}{\sigma_n t}\right) e^{\frac{1}{2}\mu^2} d\mu \\ &= K \frac{1}{\sigma_n}(e^{\frac{1}{2}\sigma_n^2 t^2} - 1) \sim K'\sigma_n \end{aligned}$$

Or, $\sum_n \sigma_n = \infty$ ; d'où $\sum_n \theta_n = \infty$ et $\theta_n \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0$; le produit (2) n'est donc pas convergent. Comme $\{ \omega \mid \| \Phi(T) \| (\omega) = \infty \}$ est indépendant de lui-même, on a le résultat.

L'existence, sans calcul, d'un autre exemple, m'a été signalée par M. Métivier. Considérons sur $[0, T[$ les intervalles $I_n = \left[\frac{T}{n+1}, \frac{T}{n}\right[$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

Sur $I_n$, d'après un théorème de Lévy, pour des subdivisions $(\tau_p^n)_{p\in\mathbb{N}}$, de plus en plus fines, et dont le pas tend vers 0, on a :

$$\lim_{p\to\infty} \uparrow \sum_{t_i\in\tau_p^n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}| = \infty \quad \text{P. p. s.}$$

D'où
$$P\left[\lim_{p\to\infty} \uparrow \left\{ \omega \left| \sum_{t_i\in\tau_p^n} \left| B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \right| \geqslant 1 \right.\right\}\right] = 1$$

Il existe donc $p_n$ tel que $P[\Omega_n] \geqslant \frac{1}{2}$, avec :

$$\Omega_n = \left\{ \omega \left| \sum_{t_i\in\tau_{p_n}^n} \left| B_{t_{i+1}}(\omega) - B_{t_i}(\omega) \right| \geqslant 1 \right.\right\} ; \sum P(\Omega_n) = \infty$$

Les ensembles $\Omega_n$ sont indépendants, le mouvement brownien $(B_t)$ étant à accroissements indépendants, d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \Omega_n = \Omega. \qquad \text{P. p. s.}$$

Si l'on considère la partition de $]0, T[$ réalisée avec l'union des $\tau_p^{n_n}$, et en ordonnant en décroissant les points de cette partition, on :

$$\varphi(s) = (1_{[t_{n+1}, t_n[}(s))_{n\in\mathbb{N}}$$

D'où

$$\|\Phi(T)\|_1 = \sum_n \sum_{t_i\in\tau_{p_n}^n} |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|$$

Comme P. p. s., $\omega$ appartient à une infinité de $\Omega_n$, $\|\Phi(T)\|_1 = \infty$ P. p. s.

*2.b* On considère toujours $m_t = B_t$ mouvement brownien réel.

Soit $\quad T > 0 ; \varphi^n(s) = (\varphi_k^n(s))_{k\in\mathbb{N}}$

avec
$$\varphi_k^n(s) = 1_{\left[\frac{k}{2^n}T, \frac{k+1}{2^n}T\right[}(s) \qquad \text{si } 0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$$
$$= 0 \qquad \text{si } k > 2^n$$

On a : $\|\Phi^n(s)\|_1$ est une fonction croissante de $n$, pour presque tout $\omega$ et $\lim_{n\to\infty} \|\Phi^n(T)\|_1 = \infty$ P. p. s., d'après le théorème de Lévy [*1*].

Donc, d'après le théorème de Beppo-Lévi :

$$\lim_{n\to\infty} E[\|\Phi^n(T)\|_1] = E[\lim_{n\to\infty} \|\Phi^n(T)\|_1] = \infty$$

Il n'existe donc pas de constante K telle qu'en 1.*b*.

## 3. LE CAS $l^p(\mathbb{N})$ $(1 < p < 2)$

*3.a* Le second exemple de 2.*a* s'étend au cas $1 < p < 2$ : avec les notations de 2.*a*, il existe des subdivisions $(\tau_q^n)_{q\in\mathbb{N}}$ de $\mathrm{I}_n$, de plus en plus fines, et dont le pas tend vers 0 telles que :

$$\lim_{q\to\infty} \sum_{t_i\in\tau_q^n} |\, \mathrm{B}_{t_{i+1}} - \mathrm{B}_{t_i} |^p = \infty$$

(mais la limite n'est pas forcément une limite croissante). Avec les ensembles

$$\Omega_n = \left\{ \omega \,\middle|\, \sum_{t_i\in\tau_{q_n}^n} |\, \mathrm{B}_{t_{i+1}}(\omega) - \mathrm{B}_{t_i}(\omega) |^p \geqslant 1 \right\} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}[\Omega_n] \geqslant \frac{1}{2}$$

le raisonnement de 2.*a* s'applique.

L'exemple suivant donne de façon explicite un processus $\varphi$ de $\mathscr{M}_{\mathrm{T},1}(l^p(\mathbb{N}^*))$ tel que $\mathrm{E}[\| \Phi(\mathrm{T}) \|_p^p] = \infty$.

On considère une fonction $\alpha : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}_+^*$, croissante, telle que $\lim_{n\to\infty} \alpha(n) = \infty$, et que l'on déterminera par la suite.

$$\varphi(s) = \left(1_{\left[\frac{\mathrm{T}}{\alpha(n+1)}, \frac{\mathrm{T}}{\alpha(n)}\right[}(s)\right) \in \mathscr{M}_{\mathrm{T},1}(l^p(\mathbb{N}^*))$$

$$\mathrm{E}[\| \Phi(\mathrm{T}) \|_p^p] = \mathrm{E}\left[ \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \left| \frac{\mathrm{B_T}}{\alpha(n)} - \frac{\mathrm{B_T}}{\alpha(n+1)} \right|^p \right]$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathrm{K}_p \mathrm{T}^{p/2} \left( \frac{1}{\alpha(n)} - \frac{1}{\alpha(n+1)} \right)^{p/2}$$

Soit
$$r(n) = \frac{1}{\alpha(n)};$$
on prend alors

$$r(1) = \mathrm{S}^{\frac{2}{p}} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{2/p}}$$

$$r(n) = \sum_{q \geqslant n} \frac{1}{q^{2/p}}$$

Alors, $(r(n) \downarrow 0)$, d'où : $\alpha(n) \uparrow \infty$

et
$$\sum_n (r(n) - r(n+1))^{p/2} = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n} = \infty$$

*3.b* On emploie les notations de 2.*b* ; soit $T > 0$ et $(\tau_n)$ suite de subdivisions de $[0, T[$, de plus en plus fines, et dont le pas tend vers 0. Alors :

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ \text{p.s.}}} \sum_{t_i \in \tau_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 = T \quad \text{(Théorème de Lévy)}$$

Pour $1 < p < 2$ :

$$\sum_{t_i \in \tau_n} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \leqslant \left( \sum_{t_i \in \tau_n} | B_{t_{i+1}} - B_{t_i} |^p \right) \sup_{t_i} | B_{t_{i+1}} - B_{t_i} |^{2-p}$$

D'où, d'après la continuité de $B_t$, $\varliminf_{k \to \infty} \sum_{t_i \in \tau_k} | B_{t_{i+1}} - B_{t_i} |^p = \infty$. Il suffit ensuite d'appliquer le lemme de Fatou pour obtenir :

$$\varliminf_{k \to \infty} E\left[ \sum_{t_i \in \tau_k} | B_{t_{i+1}} - B_{t_i} |^p \right] = \infty$$

En utilisant les mêmes processus que dans 2.*b*, on a donc *b*) pour $1 < p < 2$.

*Remarque.* — L'intérêt et le problème de la construction des intégrales stochastiques à valeurs dans un espace de Banach est apparu dans [*3*] (ch. IV-C-D).

## RÉFÉRENCES

[*1*] J. Neveu, *Notes sur l'intégrale stochastique*, 1972.

[*2*] Y. Daletski, Infinite dimensional elliptic operators and parabolic equations connected with them Uspekhi. *Math. Nank*, t. **22**, 1967.

[*3*] M. Yor, Thèse de 3e cycle *(à paraître)*.

*(Manuscrit reçu le 9 juillet 1973).*