ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

PHAM-PHU-HIEN

Mesure asymptotique définie par une fonction à valeurs dans Rn ou dans un espace vectoriel topologique

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 1 (1975), p. 23-107
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_1_23_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 1, 1975, p. 23-107. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Mesure asymptotique définie par une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ou dans un espace vectoriel topologique (*)

par

PHAM-PHU-HIEN

RÉSUMÉ. — On étudie les applications sur $\mathbb{R}$ qui définissent une mesure asymptotique (mes. as.) sur l'espace où elles prennent leurs valeurs ($\mathbb{R}^n$, ou e. v. t. *lc* E, qui peut être un espace de fonctions ou de distributions). La mes. as. est la limite pour T tendant vers l'infini (si elle existe) de la mesure μ_T, image, par l'application, de la mesure normalisée de Lebesgue de $[-T, T]$.

Problèmes étudiés : conditions d'existence de la mes. as. et propriétés de celle-ci en relation avec celles de la fonction (comportement « à l'infini » ; fonction presque périodique ou faiblement presque périodique ; fonction pseudo-aléatoire, ...) ; construction de fonctions ayant une mes. as. donnée ; théorèmes de convergence pour les mes. as. de certaines classes de fonctions dépendant d'un paramètre, etc. Lorsqu'il n'existe pas de mes. as., on étudie les propriétés de compacité de la famille des mesures μ_T associée à l'application. On étudie sur l'espace des fonctions réelles sur $\mathbb{R}$ vérifiant une condition $\mathscr{M}_0$, une topologie bien adaptée à l'étude des mes. as.

Les méthodes sont différentes, suivant que l'application est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, ou dans un e. v. t. *lc* E ; dans le second cas, on étudie la notion de mes. as. cylindrique.

Lorsque l'application étudiée est celle qui, à $\tau \in \mathbb{R}$, associe le translaté $f\tau$ d'un élément f d'un espace de fonctions E, on arrive à une caractérisation des éléments f tels que l'application précédente définisse une mes. as. sur E. On en déduit en particulier la structure algébrique de l'ensemble de ces éléments.

(*) Cet article constitue l'essentiel d'une thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris en juin 1972.

INTRODUCTION

Le point de départ de ce travail est le désir de comprendre et de clarifier la notion de mesure limite, quand $T \to \infty$, de la mesure définie sur $\mathbb{R}$ par la répartition des valeurs prises par une fonction réelle $f(t)$ lorsque t varie dans l'intervalle $X_T = [-T, T]$; autrement dit, si μ_T désigne la mesure image de la restriction normalisée de la mesure de Lebesgue à X_T, par (la restriction à X_T de) l'application mesurable f, l'on s'intéresse à la mesure limite (en un sens à préciser) μ, des μ_T, lorsque $T \to \infty$, si jamais elle existe ; c'est cette limite qu'on appelle la mesure asymptotique de la fonction f.

A vrai dire, la notion de mesure asymptotique a depuis longtemps été utilisée dans bon nombre de travaux entrepris par des ingénieurs et des physiciens, où son emploi semble avoir été intéressant, sinon indispensable dans certaines études, mais sans que la question de son existence ait été considérée, ni les propriétés qu'on lui suppose mises en question.

La mesure asymptotique a d'autre part attiré la curiosité des mathématiciens dès les années 1937 ; en une série d'articles au *Studia Mathematica*, M. Kac et H. Steinhaus [*1*] ont posé la définition et étudié les mesures asymptotiques définies par des fonctions bornées. La notion d'indépendance (asymptotique) est introduite dès cette époque ; elle permet de transcrire aux mesures asymptotiques les théorèmes du type central limite, ou de la loi des grands nombres.

Ces études, interrompues en 1939, ont été reprises dans le même esprit après la guerre, principalement par H. Steinhaus [*2*] [*3*], S. Hartman [*1*]. Il faut citer aussi les travaux de Ph. Hartman, E. R. van Kampen et A. Wintner [*1*] [*2*] concernant les mesures asymptotiques des fonctions presque-périodiques de Bohr.

Notre travail a peu de points communs avec l'ensemble des œuvres précédentes ; il ne considère pas les mêmes problèmes et partant n'utilisent pas les mêmes méthodes. Il a pris naissance d'une part sur une question posée par M. J. Bass (à propos du comportement pour les grandes valeurs de λ d'une certaine fonction F_λ ; chap. III, § 3), et d'autre part sur une étude de M. A. Tortrat [*1*], où l'auteur pose la définition d'une mesure asymptotique, et étudie, en se plaçant dans le cadre de l'espace de Besicovitch-Marcinkiewicz $\mathcal{M}^p$, le comportement, du point de vue de leurs mesures asymptotiques, des fonctions presque-périodiques au sens de Besicovitch.

Dans sa thèse sur les opérateurs de moyenne, J. Dhombres [*1*] a été amené également à considérer les propriétés des fonctions presque-périodiques de Bohr en relation avec leurs mesures asymptotiques.

Le premier problème qui nous occupe est l'existence de la mesure asymptotique, dans le cas d'une fonction mesurable quelconque $f(t)$ définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Lorsque f vérifie une condition $(\mathscr{M}_0)$ qui limite sa croissance à l'infini, on ramène l'existence de la mesure asymptotique à celle des moyennes (par rapport à t) $\mathrm{M}(e^{isf(t)})$ (s parcourant les nombres réels) ; une autre condition suffisante pour que μ existe est l'existence de toutes les moyennes $\mathrm{M}(f^p)$ (p entier $\geqslant 1$), qui sont alors égales aux moments de la mesure μ, et la déterminent.

Dans le cas d'une application $\mathrm{F}(t) = [f_1(t), \ldots, f_n(t)]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, la mesure asymptotique (sur $\mathbb{R}^n$) de F existe si et seulement si la fonction réelle $\lambda_1 f_1(t) + \ldots + \lambda_n f_n(t)$ a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$ quels que soient les nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Tous les critères et conditions suffisantes précédents (chap. I) s'avèrent extrêmement utiles par la suite.

Pour l'étude des propriétés des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ liées à leurs mesures asymptotiques, le cadre naturel est l'espace fonctionnel $\mathscr{M}^0$ (chap. II) des fonctions satisfaisant à la condition $(\mathscr{M}_0)$; la topologie de $\mathscr{M}^0$ est définie par une semi-métrique ; l'espace séparé M^0 correspondant (qui est de plus quasi normé) est un espace métrique complet (non localement convexe). Si $\mathrm{F} \in \mathscr{M}^0$, la famille de mesures (μ_T) qui lui est associée est relativement compacte pour la topologie étroite des mesures sur $\mathbb{R}^n$. Si deux fonctions ont même classe d'équivalence dans M^0, les deux familles de mesures correspondantes coïncident ; ainsi, leurs mesures asymptotiques, si elles existent, coïncident. La convergence dans $\mathscr{M}^0$ des fonctions entraînent la convergence (étroite) de leurs mesures asymptotiques. Par ailleurs, les espaces $\mathscr{M}^p$ de Besicovitch-Marcinkiewicz étudiées dans Bertrandias [*1*], Vo-Khac-Khoan [*1*], s'injectent continûment dans M^0.

D'autre part, la convergence dans la semi-métrique de $\mathscr{M}^0$ est équivalente à une notion de convergence « en mesure asymptotique » (ou en λ-mesure) (chap. II). On étudie une notion de convergence λ-presque sûre qui a par rapport à la convergence en λ-mesure et à la convergence dans $\mathscr{M}^p$, les relations analogues à celles qui ont lieu dans la théorie de l'intégration.

Le chapitre III étudie des classes particulières de fonctions réelles ayant une mesure asymptotique. L'on ne considère pas le cas des fonctions presque-périodiques, qui est déjà beaucoup étudié à ce point de vue. Par contre, pour toute mesure donnée sur $\mathbb{R}$, on arrive à construire, en utilisant la théorie des suites équiréparties, une fonction ayant pour mesure asymptotique la mesure donnée (fonction qui se trouve être en même temps pesudo-aléatoire au sens de J. Bass [1]). Si on utilise une suite complètement équirépartie, la fonction f précédente a la propriété que pour toute fonction K sommable sur $\mathbb{R}$, la convoluée $f * K$ a une mesure asymptotique ; en désignant par f^{λ} la « dilatée » $t \rightsquigarrow f(\lambda t)$, on montre que la mesure asymptotique de $F_{\lambda} = \sqrt{\lambda} f^{\lambda} * K$ converge vers la mesure de Gauss lorsque $\lambda \to \infty$.

A partir du chapitre IV, on considère les applications F définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe réel séparé E ; si les mesures μ_T définies par F sur E convergent étroitement (respectivement : cylindriquement) sur E vers une mesure limite μ (respectivement : une « mesure » cylindrique μ), on dit que μ est la mesure asymptotique (respectivement : mesure cylindrique asymptotique) de F. Les conditions portant sur l'application F et assurant la relative compacité séquentielle de la famille de mesures (μ_T) pour la convergence étroite, ou pour la convergence cylindrique, sont étudiées. Les propriétés de concentration scalaire, ou d'être tendues, des mesures adhérentes sont examinées. Finalement, la notion de limite de Banach est introduite pour l'étude de la famille (μ_T) (chap. IV).

Le chapitre V étudie le cas où E est un espace de (classes de) fonctions réelles ou de distributions définies sur $\mathbb{R}$, invariant par les translations τ_n $(h \in \mathbb{R})$; un élément $f \in E$ admet une mesure asymptotique sur E, si c'est l'application $F(h) = \tau_h f$ qui en admet une au sens général. Le cas des éléments faiblement ou fortement presque-périodiques est particulièrement intéressant : les premières ont une mesure cylindrique asymptotique, les secondes une mesure asymptotique de Radon sur E. Ainsi, les fonctions pseudo-aléatoires admettent en tant qu'éléments $\mathcal{M}^p$-faiblement presque-périodiques une mesure asymptotique cylindrique sur l'espace $\mathcal{M}^p$. Le cas des distributions presque-périodiques au sens de L. Schwartz [3] est étudié ; en particulier, on considère les relations entre l'indépendance (asymptotique) de deux distributions p. p. et les positions relatives de leurs spectres.

Dans le cas où l'espace de (classes de) fonctions E est un Banach dans lequel chaque translation $\tau_h f$ $(h \in \mathbb{R})$ est une isométrie (chap. VI), on arrive à caractériser, parmi les éléments f pour lesquels $\tau_h f \xrightarrow[h \to 0]{} f$, ceux qui ont une mesure asymptotique sur E : il faut et il suffit qu'il existe un compact K de E tel que

$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi_K(\tau_t f)\, dt > 0 \qquad \text{(condition } C_K\text{)}.$$

La démonstration utilise d'une part les résultats classiques sur les systèmes dynamiques dans les espaces polonais, dus à Krylov-Bogolyubov [*1*], Oxtoby et Ulam [*1*], et à Fomin [*1*], d'autre part de résultats récents sur les mesures dans les espaces topologiques généraux du type de ceux obtenus par Dudley [*1*], Topsøe [*1*].

Cette caractérisation a de nombreuses applications ; en particulier, elle permet de montrer que l'ensemble des éléments f de E ayant une mesure asymptotique sur E est un espace de Banach, qui est une algèbre de Banach dans le cas où E en est une. La condition (C_K) est équivalente à une condition plus forte : $\forall\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de E tel que :

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi_{K_\varepsilon}(\tau_t f)dt \geqslant 1 - \varepsilon$$

qui est une généralisation de la condition de définition d'un élément f presque-périodique de E, à savoir que la famille $(\tau_t f,\ t \in \mathbb{R})$ est relativement compacte dans E.

Finalement, le chapitre VII étudie une méthode générale permettant de démontrer, à partir de résultats connus sur le processus aléatoires stationnaires (par exemple : le théorème de convergence vers le mouvement brownien), des résultats parallèles sur les mesures asymptotiques.

*
* *

L'ensemble de ces travaux ont fait l'objet de plusieurs notes aux *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences* (Pham Phu Hien [*1*] [*5*]).

CHAPITRE I

FONCTIONS ADMETTANT UNE MESURE ASYMPTOTIQUE. CAS DES FONCTIONS A VALEURS DANS $\mathbb{R}^n$

1. Fonctions définissant une mesure asymptotique.

Soit F une application du groupe additif G des nombres réels, dans un espace topologique séparé E, mesurable pour les tribus boréliennes respectives de G et de E.

DÉFINITION 1. — On dira que F admet une mesure asymptotique sur E si, pour tout élément H de l'espace $\mathscr{C}_b(E)$ des fonctions continues et bornées (réelles) sur E, la fonction $H \circ F$ est moyennable, c'est-à-dire que la limite

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H[F(t)]dt = M(H \circ F) \tag{1}$$

existe, et si cette limite s'écrit comme une intégrale

$$M(H \circ F) = \int_E H(x)\mu^F(dx) \tag{2}$$

où μ^F est une mesure de probabilité sur E. μ^F sera appelée mesure asymptotique (mes. as.) de F.

En fait, lorsque la limite (1) existe pour tout $H \in \mathscr{C}_b(E)$, elle s'écrit automatiquement sous la forme d'une intégrale (2). Ce résultat est démontré dans A. Tortrat [*1*] ; nous le reprenons ici sous la forme du théorème suivant.

NOTATION. — Dans toute la suite, sauf mention expresse du contraire, G désignera le groupe additif des nombres réels ; μ_T^F désignera la mesure image de la mesure normalisée de Lebesgue sur $X_T = [-T, T]$, par la restriction à X_T) de l'application F ; μ_T^F est la mesure définie sur E par la formule

$$\int_E H(x)\mu_T^F(dx) = \frac{1}{2T} \int_{X_T} H[F(t)]dt, \qquad H \in \mathscr{C}_b(E).$$

THÉORÈME 1. — Soit F une application Borel-mesurable de G dans l'espace topologique E. Si la limite (1) existe pour tout $H \in \mathscr{C}_b(E)$, alors cette limite est représentable par l'intégrale (2) de H par rapport à une mesure de probabilité μ^F sur E.

Démonstration. — Supposons que pour une suite $T_n \to \infty$, la limite

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2T_n} \int_{-T_n}^{T_n} H[F(t)]dt \tag{3}$$

existe pour tout $H \in \mathscr{C}_b(E)$; nous allons démontrer qu'alors la limite (3) est représentable par une intégrale

$$\int_E H(x)\mu(dx)$$

où μ est une mesure de probabilité sur E. Il est clair que le théorème en découlera. Or, la limite (3) est aussi égale à

$$\lim_{n \to \infty} \int_E H(x)d\mu_{T_n}(x) ;$$

d'après le théorème d'Alexandrov-Lecam (voir A. Tortrat [2], cette limite est égale à l'intégrale de H par rapport à une mesure positive unique μ sur E. Pour voir que c'est une mesure de probabilité il suffit de faire $H(x) \equiv 1$ dans (3).

Nous allons, dans le reste de ce chapitre, nous limiter d'abord au cas où E est le groupe additif $\mathbb{R}^k$. (k entier $\geqslant 1$). $\langle \cdot,\cdot \rangle$ désignera le produit de dualité entre le groupe $\mathbb{R}^k$ et son groupe dual.

DÉFINITION 2. — On dira que l'application F appartient à $\mathcal{M}^0(G; \mathbb{R}^k)$, si la condition suivante est vérifiée :

$$\lim_{A\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes} [X_T \cap \{ \| F(t) \| > A \}] = 0$$

où « mes » désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, $\| \ \|$ désigne une norme de $\mathbb{R}^k$, et où $\{ \| F(t) \| > A \}$ désigne le sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$\{ t \in \mathbb{R} : \| F(t) \| > A \} .$$

THÉORÈME 2. — Soit $F \in \mathcal{M}^0(G ; \mathbb{R}^k)$. Alors F admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^k$ si et seulement si pour tout $s \in \hat{\mathbb{R}}^k$, la fonction $t \rightsquigarrow e^{i\langle s,F(t)\rangle}$ est moyennable.

Démonstration. — La condition est nécessaire par définition. Démontrons qu'elle est suffisante.

Prenons pour $H(x)$ la fonction

$$x = (x_1, \ldots, x_k) \to e^{i(s_1x_1 + \ldots + s_kx_k)} = e^{i\langle s,x\rangle}$$

où

$$s = (s_1, \ldots, s_k) \in \hat{\mathbb{R}}^k.$$

L'hypothèse entraîne que la fonction caractéristique de la mesure μ_T^F converge, en tous points de $\hat{\mathbb{R}}^k$, quand $T \to \infty$, vers une limite $\varphi^F(s)$. Si la fonction φ^F est continue à l'origine, alors la proposition est démontrée, puisqu'en appliquant le « théorème de continuité » de Paul Lévy, on aura alors le résultat suivant : φ^F est la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité μ^F sur $\mathbb{R}^k$, telle que μ_T^F converge étroitement vers μ^F, c'est-à-dire que pour tout $H \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^k)$, on a :

$$\lim_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} H d\mu_T^F = \int_{\mathbb{R}^k} H d\mu^F$$

Le premier membre n'étant autre que $\dfrac{1}{2T} \displaystyle\int_{X_T} H \circ F dt$, on voit que le second membre est égal à $M(H \circ F)$.

Nous allons déduire la continuité de φ^{F} de la condition $F \in \mathcal{M}^0(G ; \mathbb{R}^k)$.

$$| \varphi^{F}(s) - 1 | = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{X_T} (e^{i\langle s, F(t)\rangle} - 1)dt \right| \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left| \int_{X_T} e^{i\langle s, F(t)\rangle} - 1 \right| dt$$

$$\leqslant 2 \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \text{mes } [X_T \cap \{ \| F(t) \| > A \}] + \| s \| .A,$$

pour tout $A > 0$. (On a utilisé les inégalités : $| e^{iu} - 1 | \leqslant | u |$, $| \langle s, x \rangle | \leqslant \| s \| \ \| x \|$, et une décomposition de l'ensemble X_T en deux morceaux). Pour tout $\varepsilon > 0$, le premier terme du deuxième membre est $\langle \varepsilon/2$ pour $A \rangle A(\varepsilon)$. Prenant par exemple $A = A(\varepsilon)$, le deuxième terme est majoré par $\varepsilon/2$ pour $\| s \| \leqslant \frac{1}{2A(\varepsilon)}$, et pour ces s on a :

$$| \varphi^{F}(s) - 1 | < \varepsilon.$$

Donc, la fonction φ^{F} est continue à l'origine de $\hat{\mathbb{R}}^k$. Le théorème est démontré.

COROLLAIRE 1. — Soit $F(t) = [f_1(t), \ldots, f_k(t)]$ une application mesurable de G dans $\mathbb{R}^k$. Si $F \in \mathcal{M}^0(G ; \mathbb{R}^k)$, alors une condition nécessaire et suffisante pour que F admette une mes. as. sur $\mathbb{R}^k$, est que pour tout $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}^k$, la fonction réelle $t \rightsquigarrow s_1 f_1(t) + \ldots + s_k f_k(t)$ admette une mes. as. sur $\mathbb{R}^1$.

Démonstration. — Tout d'abord, il est clair que pour tout $s = (s_1, \ldots, s_k)$ fixé dans $\mathbb{R}^k$, la fonction $t \rightsquigarrow s_1 f_1(t) + \ldots + s_k f_k(t)$ est dans $\mathcal{M}^0(G ; \mathbb{R}^1)$ dès que $F \in \mathcal{M}^0(G ; \mathbb{R}^k)$; en effet, on a l'inclusion suivante pour tout $A > 0$:

$$\{ | s_1 f_1(t) + \ldots + s_k f_k(t) | > A \} \supset \{ (\max_{1 \leqslant i \leqslant k} | s_i |) \| F(t) \| > A \}$$

puisque $| s_1 f_1(t) + \ldots + s_k f_k(t) | \leqslant (\max_i | s_i |)(| f_1(t) | + \ldots + | f_k(t) |)$.

Donc, par le théorème 2, la fonction $t \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{k} s_i f_i(t)$ admet une mes. as. sur $\mathbb{R}^1$ si et seulement si pour tout réel u, la fonction $t \rightsquigarrow e^{iu.\sum_{i=1}^{k} s_i f_i(t)}$ est moyennable ; or, la dernière fonction est égale à

$$e^{i\langle u\vec{s}, F(t)\rangle} \qquad (\vec{s} = (s_1, \ldots, s_k)).$$

Une deuxième application du théorème 2 à la fonction F donne l'équivalence entre la condition : $e^{i\langle u\vec{s}, F(t)\rangle}$ moyennable $\forall u \in \mathbb{R}^1$, $\forall \vec{s} \in \mathbb{R}^k$, et la condition : F admet une mes. as. sur $\mathbb{R}^k$.

COROLLAIRE 2. — Soit $F(t) = [f_1(t), \ldots, f_k(t)]$ une fonction bornée de G dans $\mathbb{R}^k$. Si les moyennes $M\{ f_{k_1}^{p_1}(t) \ldots f_{k_i}^{p_i}(t) \}$ existent, $\forall 1 \leqslant i \leqslant k$, $\forall k_i \in \{1, \ldots, k\}$, $\forall p_i$ entier $\geqslant 1$, alors F admet une mes. as. μ^F qui est déterminée par ces moyennes.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 2.

2. Étude des moments des mesures asymptotiques.

Considérons maintenant le cas où $k = 1$, et une application f de G dans $\mathbb{R}$, ayant une mes. as. μ^f sur $\mathbb{R}$. On se propose d'étudier les moments de la mesure μ^f.

Rappelons que l'espace $\mathscr{M}^p(G;\mathbb{R})$ des (classes de) fonctions définies sur G à valeurs dans $\mathbb{R}$, est défini par les conditions : f est de p-ième puissance $|f(t)|^p$ localement intégrable, et

$$\| f \|_{\mathscr{M}^p}^p \equiv \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T} |f(t)|^p dt < \infty$$

(Bertrandias [*1*]).

Il est facile de voir que $\mathscr{M}^p \subset \mathscr{M}^0$ pour tout $p > 0$.

Remarquons enfin que si $f \in \mathscr{M}^p(G;\mathbb{R})$, alors il existe une constante finie $K(f)$ telle que la majoration suivante ait lieu pour tout $T \geqslant 1$ (par exemple) :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^p dt \leqslant K(f).$$

THÉORÈME 3. — Si $f \in \mathscr{M}^p(G;\mathbb{R})$ (pour un $p > 0$), alors la famille de mesures $(\mu_T^f, T > 0)$ est séquentiellement relativement compacte pour la convergence étroite ; de plus, pour chacune des mesures μ adhérentes à cette famille, de la forme $\mu =$ limite étroite de μ_{T_n} ($T_n \to \infty$), le moment d'ordre p existe, et l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} x^r d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{X_{T_n}} [f(t)]^r dt \qquad 0 \leqslant r < p$$
$$\int_{\mathbb{R}} |x|^r d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2T_n} \int_{X_{T_n}} |f(t)|^r dt \qquad 0 \leqslant r < p.$$

Démonstration. — Soit (L_j) une suite $\to \infty$, et soit $\mu_j = \mu_{L_j}^f$. D'après (Loeve [*1*]), on peut en extraire une sous-suite (μ_{T_n}) convergeant étroitement vers une mesure limite μ dès que la condition suivante est réalisée : le moment absolu d'ordre p des mesures μ_j reste borné quand j varie. Or, l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^p d\mu_j(x) = \frac{1}{2L_j} \int_{XL_j} |f(t)|^p dt \leqslant K(f)$$

pour tous les $L_j \geqslant 1$. D'après la même référence, on a alors les relations suivantes pour tout $r_0 < p$:

$$\int_{\mathbb{R}} x^r d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} x^r d\mu_{T_n}(x), \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0 < p$$

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^r d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |x|^r d\mu_{T_n}(x), \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0 < p.$$

Nous allons démontrer un résultat analogue concernant les moments des mesures asymptotiques sur $\mathbb{R}^k$. Pour fixer les idées, nous allons énoncer le résultat dans un cas particulier.

THÉORÈME 4. — Soit $f \in \mathcal{M}^2(G ; \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{M}^4(G ; \mathbb{R})$. Si la fonction $F(t) = [f(t), g(t)]$ admet une mes. as. μ sur $\mathbb{R}^2$, alors le moment « croisé » d'ordre 2 de μ existe, et l'on a :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy d\mu(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T} f(t)g(t)dt.$$

La démonstration est donnée dans l'appendice I.

L'existence des moyennes temporelles de tous ordres pour $f(t)$, dans certains cas plus généraux que celui où $f(t)$ est bornée (cas du corollaire 2), est encore suffisante pour que f admette une mes. as.

THÉORÈME 5. — Supposons que la fonction $f(t)$ ait toutes ses puissances entières positives $p \geqslant p_0$ moyennables : $m_p = M\{(f(t))^p\}$ existe $\forall p$ entier, $p \geqslant p_0 > 1$ (où p_0 est un nombre quelconque $\geqslant 1$). Alors $f(t)$ admet une mes. as. si la suite (m_p) vérifie un critère d'unicité pour la mesure dont elle est la suite des moments.

La démonstration est donnée dans l'appendice I.

Dans certains autres cas, sous l'hypothèse d'existence de moyennes temporelles de tous ordres pour f, il est possible de décider, sur la croissance de la fonction f elle-même, si l'on est dans un cas d'unicité.

THÉORÈME 6. — Soit $f(t)$ une fonction réelle borélienne ayant les propriétés suivantes :

a) il existe un $r > 0$ tel que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T} e^{r|f(t)|} dt < \infty$$

b) les moyennes temporelles $M(f^p) = m^p$ existent $\forall p$ entier $\geqslant 0$. Alors f admet une mes. as. μ^f, qui est déterminée par la suite (m_p).

La démonstration se trouve dans l'appendice I.

Remarque. — La plupart des notions et résultats de ce chapitre et de la suite s'étendent au cas où G est un groupe topologique abélien localement compact, et σ-compact (Hewitt et Ross [*1*]); la famille des intervalles X_T est alors remplacée par une famille (Ω_j) $(j \in J)$ de compacts recouvrant le groupe G, et ayant, relativement à la mesure de Haar de G, des propriétés analogues à celles des intervalles X_T (la σ-compacité de G assure l'existence d'une telle famille (Ω_j)). Un exemple en est donné par $G = \mathbb{R}^m (J = \mathbb{R}^+)$, avec Ω_j = le cube centré à l'origine, de côté $2j$, ou la sphère de même centre et de rayon j.

Certaines notions et résultats s'étendent aussi au cas où G est un semi-groupe du type $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{N}$.

CHAPITRE II

L'ESPACE QUASI-NORME $\mathscr{M}^0$ ET LA CONVERGENCE EN MESURE ASYMPTOTIQUE

1. La quasi-norme q et l'espace $\mathscr{M}^0$.

Nous allons construire sur l'ensemble des fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, une métrique bien adaptée à l'étude des fonctions du point de vue de leurs mesures asymptotiques. Pour toute fonction mesurable f, posons d'abord

$$q_T(f) = \frac{1}{2T} \int_{X_T} \frac{|f(t)|}{1 + |f(t)|} dt \qquad (X_T = [-T, T])$$

et

$$q(f) = \limsup_{T\to\infty} q_T(f).$$

La quantité $q(f)$ a la propriété suivante :

(*i*) $q(f + g) \leqslant q(f) + q(g)$.

Cette inégalité provient de l'inégalité classique $q_T(f + g) \leqslant q_T(f) + q_T(g)$

(*ii*) $q(-f) = q(f)$,

(*iii*) si $q(f_j) \to 0$, on a $q(\alpha f_j) \to 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Pour démontrer la propriété (*iii*), nous allons introduire une notion de convergence en mesure asymptotique, et montrer que la convergence pour la métrique $d(f, g) = q(f - g)$ est équivalente à cette convergence en mesure.

Pour tout ensemble mesurable I de $\mathbb{R}$, posons

$$\lambda(\mathrm{I}) = \limsup_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \operatorname{mes} [\mathrm{X}_\mathrm{T} \cap \mathrm{I}]$$

$\lambda(\cdot)$ est une fonction d'ensembles à valeurs comprises entre 0 et 1, et croissante.

DÉFINITION. — On dira que $f_j \to f$ en λ-mesure (ou en mesure asymptotique) si :

$$\lambda(\{\, | f_j - f | > \delta \,\}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad \forall\delta > 0$$

où $\{\, | f_j - f | > \delta \,\}$ désigne l'ensemble $\{\, t \in \mathbb{R} : | f_j(t) - f(t) | > \delta \,\}$.

THÉORÈME 1. — $q(f_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement si, $\forall\delta > 0$, $\lambda(\{\, | f_j | > \delta \,\}) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Démonstration. — Posons pour simplifier $\lambda_\mathrm{T}(\mathrm{I}) = \dfrac{1}{2\mathrm{T}} \operatorname{mes} \{\, \mathrm{X}_\mathrm{T} \cap \mathrm{I} \,\}$, pour toute partie mesurable I de $\mathbb{R}$. On se sert des inégalités suivantes : pour tout δ

$$\frac{1}{1+\delta} \lambda_\mathrm{T}(\{\, | f | > \delta \,\}) \leqslant q_\mathrm{T}(f) \leqslant \lambda_\mathrm{T}(\{\, | f | > \delta \,\}) + \frac{\delta}{1+\delta} \lambda_\mathrm{T}(\{\, | f | > \delta \,\})$$

qui sont classiques pour la quasi-norme q_T définie sur l'espace mesuré $(\mathrm{X}_\mathrm{T}, \lambda_\mathrm{T})$ (Yosida [*1*]). En prenant les $\limsup_{\mathrm{T}\to\infty}$ des trois membres, on obtient :

$$\frac{\delta}{1+\delta} \lambda(\{\, | f | > \delta \,\}) \leqslant q(f) \leqslant \lambda(\{\, | f | > \delta \,\}) + \frac{\delta}{1+\delta} \lambda(\{\, | f | \leqslant \delta \,\})$$

a) La première inégalité donne : $q(f_j) \to 0$ entraîne $\lambda(\{\, | f_j | > \delta \,\}) \to 0$ pour tout $\delta > 0$.

b) La deuxième inégalité donne :

$$q(f_j) \leqslant \lambda(\{\, | f_j | > \delta \,\}) + \frac{\delta}{1+\delta},$$

ce qui montre que si $\lim_j \lambda(\{\, | f_j | > \delta \,\}) = 0$, $\forall\delta > 0$, alors $\lim_{j\to\infty} q(f_j) = 0$.

COROLLAIRE. — On a la propriété (*iii*) énoncée précédemment. En effet

$$\begin{aligned} q(f_j) \to 0 &\Leftrightarrow \lambda(\{\, | f_j | > \delta \,\}) \to 0, && \forall\delta > 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda(\{\, | \alpha | \; | f_j | > \varepsilon \,\}) \to 0, && \forall\varepsilon > 0 \\ &\Leftrightarrow q(\alpha f_j) \to 0 \end{aligned}$$

ces équivalences étant valables si $\alpha \neq 0$. Pour le cas $\alpha = 0$, la démonstration est évidente.

(*iv*) Considérons une fonction $f \in \mathcal{M}^0(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$, c'est-à-dire mesurable et vérifiant la condition

$$\lim_{A \to \infty} \lambda(\{\,|\,f\,|>A\,\}) = 0.$$

Alors $q(\alpha_n f) \to 0$ dès que $\alpha_n \to 0$. En effet

$$q_T(\alpha_n f) \leqslant |\,\alpha_n\,| \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{|f| \leqslant A\}} |\,f\,|\,dt + \lambda_T[\{\,|\,f\,|>A\,\}],$$

d'où

$$q(\alpha_n f) \leqslant |\,\alpha_n\,|\,A + \lambda(\{\,|\,f\,|>A\,\}).$$

On choisit d'abord A pour que $\lambda(\{\,|\,f\,|>A\,\}) < \frac{\varepsilon}{2}$; puis, A étant ainsi choisi, on prend n assez grand pour que $|\,\alpha_n\,|\,A < \frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $q(\alpha_n f) \to 0$ quand $n \to \infty$.

On peut résumer les quatre propriétés de la fonction $q(f)$ dans le théorème suivant.

Considérons l'espace vectoriel quotient $M^0 = \mathcal{M}^0/\mathcal{N}$, où

$$\mathcal{N} = \{\, f \in \mathcal{M}^0 : q(f) = 0 \,\}\,;$$

pour tout élément $\tilde{f} \in M^0$, dont f est un représentant, on peut définir $q(\tilde{f})$ sans ambiguïté comme étant la quantité $q(f)$; les propriétés précédentes de q montrent alors que sur M^0, q est une quasi-norme (Yosida [*1*]).

THÉORÈME 2. — Sur l'espace vectoriel quotient $M^0 = \mathcal{M}^0/\mathcal{N}$, où $\mathcal{N} = \{\, f \in \mathcal{M}^0 : q(f) = 0 \,\}$, q définit une quasi-norme, qui fait de M^0 un espace vectoriel topologique (non localement convexe).

THÉORÈME 3. — L'espace (M^0, d) est un espace métrique complet.

Démonstration. — On s'inspire de la démonstration de J. Marcinkiewicz [*1*] de la complétude de l'espace $\mathcal{M}^p$. Soit (f_n) une suite de Cauchy d'éléments de (M^0, d). On peut en extraire une sous-suite $(f_{n_i} \equiv g_i)$ telle que :

$$q(g_{i+1} - g_i) \equiv q(f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) < \frac{1}{2^{i+1}}$$

On peut choisir une suite de nombres positifs (T_i) telle que

et que :
$$\begin{cases} T_{i+1} > 2T_i \\ \sup\limits_{R > T_i} q_R(g_{i+1} - g_i) < \dfrac{1}{2^i} \end{cases}$$

Considérons la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in X_{T_1} \equiv [-T_1, T_1] \\ g_i & \text{si} \quad t \in X_{T_{i+1}} \cap X^c_{T_i} \end{cases}$$

(en désignant encore par g_i n'importe quel représentant de l'élément g_i de M^0).

On démontre alors comme dans J. Marcinkiewicz [1] que :

$$q(f - g_i) < \frac{1}{2^{i-3}}$$

Par suite, on a :

$$q(f - f_j) < \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i-3}} \qquad (n_i \leqslant j < n_{i+1})$$

ce qui montre que la suite (f_n) converge vers la classe d'équivalence de f dans l'espace (M^0, d).

2. La famille de mesures $\mathscr{V}(f)$ associée à une fonction $f \in \mathscr{M}^0$.

Soit f une fonction appartenant à $\mathscr{M}^0 = \mathscr{M}^0(\mathbb{R} ; \mathbb{R})$. On lui associe la famille (μ^f_T) des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$, image par f de la mesure λ_T sur X_T. De toute suite $L_n \to \infty$, on peut extraire, par le procédé diagonal, une sous-suite $T_\nu \to \infty$ telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{X_{T_\nu}} e^{isf(t)} dt$$

existe, la limite étant une fonction continue de s grâce au fait que $f \in \mathscr{M}^0$; la démonstration de la continuité de cette limite a été donnée dans celle du théorème 2.

Par le théorème de P. Lévy, les mesures $(\mu^f_{T_\nu})$ convergent étroitement vers une mesure de probabilité limite $\mu_{\{T_\nu\}}$.

On désignera par $\mathscr{V}(f)$ l'ensemble de toutes les mesures ainsi « extraites » de la famille (μ^f_T). On se propose de démontrer la propriété suivante de la quasi-norme q relativement à la famille $\mathscr{V}$.

THÉORÈME 4. — Soient f et g deux éléments de $\mathscr{M}^0$, vérifiant la condition $q(f - g) = 0$. Alors $\mathscr{V}(f)$ coïncide avec $\mathscr{V}(g)$.

Démonstration. — Soient T_n une suite qui tend vers l'∞, $\mu^f_{T_n}$ et $\mu^g_{T_n}$ les mesures $f \circ \lambda_{T_n}$ et $g \circ \lambda_{T_n}$, $\varphi^f_{T_n}$ et $\varphi^g_{T_n}$ leurs fonctions caractéristiques. Il s'agit de montrer que ces deux suites ont exactement les mêmes lois limites (si elles existent), ou, dans la terminologie de Loeve [1], que $\mu^f_{T_n} \simeq \mu^g_{T_n}$.

Une condition suffisante est que : $\varphi^f_{T_n} - \varphi^g_{T_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (simplement). Or, pour tout $\delta > 0$, décomposons X_T en

$$X_T = (X_T \cap \{ |f - g| > \delta \}) + (X_T \cap \{ |f - g| \leqslant \delta \}).$$

Soit $h \in \mathscr{C}(\mathbb{R})$ (h fonction continue et bornée) ; on a :

$$\begin{aligned}\int hd\mu^f_T - \int hd\mu^g_T &= \int_{X_T} (h\circ f - h\circ g) d\lambda_T \\ &= \int_{X_T \cap \{|f-g|\leqslant\delta\}} (h\circ f - h\circ g) d\lambda_T + \int_{X_T\cap\{|f-g|\leqslant\delta\}} (h\circ f - h\circ g) \\ &= I_1(T, \delta) + I_2(T, \delta).\end{aligned}$$

En prenant $h(x) = e^{isx}$, on obtient :

$$|h\circ f - h\circ g| \leqslant |s|\,|f - g| \qquad \text{et} \qquad |h\circ f - h\circ g| \leqslant 2.$$

D'où

$$\begin{aligned}|I_2(T, \delta)| &\leqslant |s|\delta, \qquad \forall T \\ |I_1(T, \delta)| &\leqslant 2\lambda_T(\{ |f - g| > \delta \}).\end{aligned}$$

On voit donc que si $q(f - g) = 0$, alors, quand $T_n \to \infty$, $\varphi^f_{T_n}(s) - \varphi^g_{T_n}(s)$ tend vers 0 en tout point s, d'où, si de $(\mu^f_{T_n})$ on peut extraire une sous-suite $(\mu^f_{T_\nu})$ convergeant vers une loi limite $\mathscr{L}$, pour la même sous-suite, $(\mu^g_{T_\nu})$ converge vers $\mathscr{L}$, et réciproquement, ce qui montre que $\mathscr{V}(f) = \mathscr{V}(g)$.

Remarque. — En fait, on a montré que :

α) $q(f - g) = 0 \Rightarrow \limsup_{T\to\infty} |\varphi^f_T(s) - \varphi^g_T(s)| = 0, \qquad \forall s \in \mathbb{R}$

β) pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{T\to\infty} |\varphi^f_T(s) - \varphi^g_T(s)| \leqslant |s|\delta + 2\lambda(\{ |f - g| > \delta \}).$$

COROLLAIRE. — (i) Si $f, g \in \mathscr{M}^0$, si f a une mes. as. μ^f sur $\mathbb{R}$, et si $q(f-g)=0$, alors g admet une mes. as. μ^g et $\mu^g = \mu^f$.

(ii) Si pour tout n, $f_n \in \mathscr{M}^0$ a une mes. as. μ^{f_n}, et si $q(f - f_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors f admet une mes. as. $\mu^f = \lim_{n\to\infty} \mu^{f_n}$.

Démonstration. — Démontrons (ii). L'inégalité (β), réécrite avec f_n et f

$$\limsup_{T\to\infty} |\varphi^{f_n}_T(s) - \varphi^f_T(s)| \leqslant |s|\delta + 2\lambda(\{ |f_n - f| > \delta \})$$

montre que si la suite $\varphi^{f_n}(s) \equiv \lim_{T\to\infty} \varphi^{f_n}_T(s)$, (limite qui existe car f_n admet une mes. as.) est convergente pour $n \to \infty$, alors la lim $\varphi^f_T(s)$ existe aussi (puisque le dernier terme du second membre tend vers 0 quand $n \to \infty$ et que $\delta > 0$ est arbitraire).

Il suffit donc de montrer que $(\varphi^{f_n}(s))$ est une suite de Cauchy pour tout s fixé.

On a $q(f_n - f_p) \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $\lambda(\{ | f_n - f_p | > \delta \}) \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (d'après le théorème 1), donc en utilisant l'inégalité (β), écrite pour f_n et f_p, on a :

$$\lim_{n,p\to\infty} [\limsup_{T\to\infty} | \varphi_T^{f_n}(s) - \varphi_T^{f_p}(s) |] = 0$$

d'où

$$\varphi^{f_n}(s) - \varphi^{f_p}(s) = \lim_{T\to\infty} (\varphi_T^{f_n}(s) - \varphi_T^{f_p}(s)) \underset{n,p\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

3. Relations entre différentes notions de convergence.

Revenons maintenant à la fonction d'ensemble λ, et à la convergence en λ-mesure.

a) PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION D'ENSEMBLE λ

(*i*) *Sous σ-additivité.*

Pour toute suite de parties mesurables (A_n) de $\mathbb{R}$, on a

$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour toute suite $R_j \subset \mathbb{R}$ décroissant vers l'ensemble vide, on a $\lambda(R_j) \downarrow 0$.

En effet, si m est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$, on a alors $m(R_j) \downarrow 0$, donc

$$\frac{1}{2T} m(X_T \cap R_j) \downarrow 0,$$

uniformément en $T > 0$ donc

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} m(X_T \cap R_j) \downarrow 0 \qquad (j \to \infty).$$

Soit alors $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; si $R_j = B - \bigcup_{n=1}^{j} A_n$, on a donc $\lambda(R_j) \downarrow 0$; d'autre part, par sous-additivité de λ,

$$\lambda(B) \leqslant \lambda(R_j) + \sum_{n=1}^{j} \lambda(A_n)$$

En faisant tendre j vers l'∞, on a donc

$$\lambda(B) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

(*ii*) Si (A_j) est une suite de parties mesurables de $\mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j) < \infty,$$

alors λ (lim sup A_j) = 0.

Démonstration. — Si B_n désigne l'ensemble $\bigcup_{j=n}^{\infty} A_j$, on a

$$\lambda(B_n) \leqslant \sum_{j=n}^{\infty} \lambda(A_j) \qquad \text{(d'après } (i))$$

donc $\lambda(B_n)$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. D'autre part, pour tout n, on a λ (lim sup $A_j) \leqslant \lambda(B_n)$, d'où la conclusion.

b) RELATION ENTRE LA CONVERGENCE EN λ-MESURE ET LA CONVERGENCE DANS LES ESPACES $\mathcal{M}^p$.

(*i*) Si lim $f_n = f$ dans un $\mathcal{M}^p$ $(p \geqslant 1)$, alors f_n tend vers f en λ-mesure.

C'est une conséquence immédiate de l'inégalité suivante, vérifiée pour tout $\alpha > 0$:

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{|g_n| > \alpha\}} dt \leqslant \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T} \frac{|g_n(t)|^p}{\alpha^p} = \frac{\|g_n\|^p_{\mathcal{M}^p}}{\alpha^p}$$

(*ii*) Soit (f_n) une suite « équi-bornée (à l'infini) en moyenne d'ordre p », c'est-à-dire vérifiant la condition suivante :

$$\lim_{A\to\infty} \sup_n \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{|f_n| > A\}} |f_n|^p dt = 0$$

Alors, si f_n tend vers 0 en λ-mesure, f_n tend vers 0 dans $\mathcal{M}^p$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T} |f_n(t)|^p dt \leqslant & \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{|f_n| \leqslant \varepsilon\}} |f_n(t)|^p dt \\
& + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{\varepsilon < |f_n| \leqslant A\}} |f_n(t)|^p dt \\
& + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{|f_n| > A\}} |f_n(t)|^p dt
\end{aligned}$$

Choisissons $A = A_\varepsilon$ pour que le dernier terme du second membre soit majoré par ε, pour tout n. Le premier terme est majoré par ε^p, quel que soit n. Le deuxième terme est majoré par $A_\varepsilon^p \lambda \{ |f_n| > \varepsilon \}$, qui tend vers 0 quand

$n \to \infty$ par hypothèse, donc sera majoré par exemple par ε pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$.

(*iii*) COROLLAIRE. — Si $|f_n(t)| \leqslant g(t)$ pour tout t et tout n, avec $g \in \mathcal{M}^p$, et si f_n tend vers 0 en λ-mesure, alors f_n tend vers 0 dans $\mathcal{M}^p$.

D'après (*ii*), il suffit de vérifier que la suite (f_n) est équi-bornée en moyenne d'ordre p. Or, la première hypothèse sur (f_n) entraîne

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{|f_n| > A\}} |f_n(t)|^p dt \leqslant \frac{1}{A^p} \| g \|^p_{\mathcal{M}^p} .$$

c) LA CONVERGENCE λ-PRESQUE SÛRE.

Convenons d'abord de quelques notations. Si h et l sont deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, $h \vee l$ désignera leur enveloppe supérieure

$$(h \vee l)(t) = \sup (h(t), l(t)) ;$$

pour toute suite (g_n) de fonctions mesurables, on posera :

$$a_{(g_n)}(n, k) = a(n, k) = q(|g_n| \vee \dots \vee |g_{n+k}|) .$$

DÉFINITION. — Nous dirons que la suite (f_n) de fonctions mesurables converge λ-presque sûrement vers la fonction mesurable f, si la suite $g_n = f_n - f$ vérifie la condition suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} a(n, k) = 0.$$

Remarquons que f_n converge vers f λ-presque sûrement si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, on a la relation

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \lambda\left(\bigcup_{j=n}^{n+k} \{ |f_j - f| > \alpha \} \right) = 0.$$

En effet, il suffit de se rappeler le théorème 1, et de remarquer l'égalité des ensembles suivants :

$$\{ |g_n| \vee \dots \vee |g_{n+k}| > \alpha \} = \bigcup_{j=0}^{k} \{ |g_{n+j}| > \alpha \}$$

PROPRIÉTÉS. — (*i*) Si f_n converge λ-presque sûrement vers f, f_n converge vers f en λ-mesure.

Démonstration. — Il suffit de montrer, d'après le théorème 1, que pour $g_n = f_n - f$, $\lim_{n\to\infty} q(g_n) = 0$. Or, on a

$$q(g_n) \leqslant a_{n,k} \leqslant a_{n,k+1} \qquad \text{pour tout } k \text{ entier} > 0,$$

puisque q est une fonction croissante au sens que

$$q(h) \leqslant q(l) \quad \text{dès que} \quad 0 \leqslant h(t) \leqslant l(t) \qquad \text{pour tout } t,$$

et que d'autre part $| g_n | \leqslant | g_n | \vee \ldots \vee | g_{n+k} |$.

(*ii*) Si $\sum_{n=1}^{\infty} q(g_n) < \infty$, alors (g_n) converge λ-presque sûrement vers 0.

Démonstration. — De l'inégalité

$$| g_n | \vee \ldots \vee | g_{n+k} | \leqslant | g_n | + \ldots + | g_{n+k} |,$$

on tire en effet :

$$a(n, k) \leqslant q\left(\sum_{i=n}^{n+k} g_i\right) \leqslant \sum_{i=n}^{n+k} q(g_i).$$

(*iii*) Si (f_n) tend vers f en λ-mesure, alors il existe une sous-suite (f_{n_j}) convergeant λ-presque sûrement vers f.

D'après la propriété (*ii*) précédente, il suffit de montrer que l'on peut extraire de la suite tendant vers 0

$$q(g_n) \qquad (\text{où } g_n = f_n - f)$$

une sous-suite $q(g_{n_j})$ telle que la série $\sum_{j=1}^{\infty} q(g_{n_j})$ converge. Or, c'est une construction bien connue concernant les nombres réels.

4. Rappels sur les espaces $\mathcal{M}^p$ de Besicovitch-Marcinkiewicz.

Nous avons introduit et utilisé au début du chapitre I la notion d'espace $\mathcal{M}^p(G\,;\,\mathbb{R})$ étudié dans J. P. Bertrandias [*1*], et nous avons vu que les propriétés d'existence des moments de μ^f correspondent à l'appartenance de f à un espace $\mathcal{M}^p$. Les propriétés de cet espace, et différentes autres notions qui s'y rattachent, vont encore intervenir de façon naturelle dans la suite ; c'est pourquoi nous allons rassembler dans ce paragraphe des rappels sur ces sujets.

a) (*i*) De façon générale, si X est un espace de Banach, on appelle *$\mathcal{M}^p$-fonction* (à valeurs dans X), toute application F de G (le groupe des réels) dans X, telle que la fonction $||| F(t) |||_X$ appartienne à $\mathcal{M}^p(G\,;\,\mathbb{R})$. La quantité

$$|| F ||_{\mathcal{M}^p} = \left(\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} ||| F(t) |||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

est une semi-norme sur l'espace vectoriel des $\mathcal{M}^p$-fonctions. L'espace normé correspondant, soit $\mathcal{M}^p(G ; X)$, est un espace de Banach (J. Marcinkiewicz [*1*]; Vo-Khac-Khoan [*1*]).

(*ii*) Une $\mathcal{M}^p$-fonction est dite *$\mathcal{M}^p$-continue* si

$$\lim_{h\to 0} \| f_h - f \|_{\mathcal{M}^p} = 0$$

où f_h désigne la fonction $t \rightsquigarrow f(h + t)$.

L'espace $\mathcal{M}_c^p$ des (classes d'équivalence de) $\mathcal{M}^p$-fonctions $\mathcal{M}^p$-continues est un sous-espace complet de $\mathcal{M}^p$ (J. P. Bertrandias [*1*]).

(*iii*) α) Définition de la *convolution* d'un élément de $\mathcal{M}^p$ avec une mesure de Radon bornée ν.

Si $\tilde{f}$ est un élément de $\mathcal{M}^p$, et si f en est un représentant, on montre que l'élément de $\mathcal{M}^p$, ayant pour représentant la fonction

$$t \rightsquigarrow \int_{-A}^{B} f(t - s)\nu(ds)$$

converge, en norme $\mathcal{M}^p$, lorsque A et B $\to +\infty$, vers un élément unique (indépendant de $f \in \tilde{f}$), notée $\tilde{f} * \nu$. Dans le cas où $\tilde{f}$ est $\mathcal{M}^p$-continue, $\tilde{f} * \nu$ coïncide avec l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_{-s}\nu(ds)$$

(intégrale de la fonction $s \rightsquigarrow \tilde{f}_{-s}$ à valeur dans $\mathcal{M}_c^p$) (J. P. Bertrandias [*1*]; Vo-Khac-Khoan [*1*]).

β) Si f est une fonction bornée, alors (en désignant par $\tilde{f}$ sa $\mathcal{M}^p$-classe d'équivalence), la fonction $f * \nu$ (convoluée ordinaire), est un représentant de la classe $\tilde{f} * \nu$. En effet, d'après ce qui précède, il suffit de montrer que

$$g_A(t) = (f * \nu)(t) - \int_{-A}^{A} f(t - s)\nu(ds)$$

tend vers 0 en $\mathcal{M}^p$-norme quand $A \to \infty$; or, $g_A(t)$ tend vers 0 ($A \to \infty$) uniformément par rapport à $t \in G$, comme le montre la majoration

$$| g_A(t) | = \left| \int_{|s|>A} f(t - s)\nu(ds) \right| \leqslant \| f \|_\infty \int_{|s|>A} | \nu(ds) | .$$

b) Les notions de presque-périodicité et la décomposition de Jacobs.

(*i*) Définition. — Considérons le groupe des translations $\mathcal{U} = \{ U_h, h \in G \}$ défini sur un espace de Banach E (de classes) de fonctions définies sur G.

α) Un élément $z \in \mathrm{E}$ est dit faiblement presque-périodique (pour le groupe $\mathscr{U}$) si son orbite $\{ \mathrm{U}_h z, h \in \mathrm{G} \}$ est relativement faiblement compacte.

β) Un élément $z \in \mathrm{E}$ est dit presque-périodique si son orbite est relativement compacte.

γ) Un élément $z \in \mathrm{E}$ est dit fuyant (fluckvector) s'il est faiblement presque-périodique et si son orbite admet l'élément nul 0 de E comme point d'adhérence faible.

On désignera par $\mathscr{F}$, $\mathscr{P}$, Φ, respectivement, l'ensemble des éléments faiblement presque-périodiques, l'ensemble des éléments presque-périodiques, et celui des éléments fuyants de E.

(*ii*) Les ensembles $\mathscr{F}$, $\mathscr{P}$, Φ sont des sous-espaces vectoriels fermés, invariants par le groupe $\mathscr{U}$, de E (Eberlein [*1*] ; Jacobs [*1*]).

(*iii*) L'espace $\mathscr{F}$ est la somme directe des deux sous-espaces $\mathscr{P}$ et Φ :

$$\mathscr{F} = \mathscr{P} \oplus \Phi \qquad \text{et} \qquad \mathscr{P} \cap \Phi = \{ 0 \}.$$

(Jacobs [*1*]).

Dans le cas où le Banach E est l'espace $\mathscr{M}^p(\mathrm{G} ; \mathbb{R})$, les éléments des ensembles $\mathscr{F} = \mathscr{F}^p$, $\mathscr{P} = \mathscr{P}^p$ sont respectivement appelés fonctions $\mathscr{M}^p$-faiblement presque-périodiques et fonctions $\mathscr{M}^p$-presque périodiques.

(*iv*) Si $f \in \mathscr{M}^p(\mathrm{G} ; \mathbb{R})$, on appelle coefficient de Fourier $\mathrm{C}(\lambda)$ de f la moyenne, si elle existe, de la fonction $f(t)e^{i\lambda t}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.

Un élément f de $\mathscr{M}^p(\mathrm{G} ; \mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ est dit fonction *$\mathscr{M}^p$-pseudo-aléatoire* si $f \in \mathscr{F}^p$ et si tous ses coefficients de Fourier existent et sont nuls. f est $\mathscr{M}^p$-pseudo-aléatoire si et seulement si f est un élément fuyant de l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{M}^p(\mathrm{G} ; \mathbb{R})$, pour le groupe des translations $\mathscr{U}$ (J. P. Bertrandias [*1*] ; Vo-Khac-Khoan [*1*]).

(*v*) Une fonction complexe bornée $f(t)$ est dite *pseudo-aléatoire* (J. Bass [*1*] [*2*]) si sa fonction d'autocorrélation

$$\gamma_f(h) = \lim_{\mathrm{T} \to \infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{-\mathrm{T}}^{\mathrm{T}} f(t + h)\bar{f}(t)dt$$

existe, n'est pas nulle pour $h = 0$, et tend vers 0 à l'infini. Ces fonctions ont été généralisées par J. P. Bertrandias [*2*] : $f \in \mathscr{M}^2$, $\gamma_f(h)$ existe, est continue pour $h = 0$ et nulle en moyenne quadratique (de $\mathscr{M}^2$-norme nulle).

Toutes ces fonctions sont $\mathscr{M}^2$-continues, et appartiennent au sous-espace $\mathscr{F}^2$ des fonctions $\mathscr{M}^2$-faiblement presque-périodiques.

CHAPITRE III

CLASSES PARTICULIÈRES DE FONCTIONS AYANT UNE MESURE ASYMPTOTIQUE

1. Exemples de fonctions ayant une mesure asymptotique.

Les premiers exemples de fonctions ayant une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions réelles presque périodiques de Bohr : toute fonction de Bohr est moyennable, et si f est p. p., il en est encore de $h \circ f$, pour toute $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$. Il s'ensuit des propriétés des fonctions ayant des moyennes de tous ordres, étudiées dans le théorème 5 du chapitre I, que toute fonction faiblement presque périodique au sens d'Eberlein (Eberlein [*1*]) admet aussi une mesure asymptotique, puisqu'une fonction d'Eberlein est moyennable, et que ces fonctions (bornées), forment une algèbre. Admettent encore une mesure asymptotique, les fonctions (réelles), qui sont limite, au sens $\mathscr{M}^2$, de polynômes trigonométriques ; tel est le cas des fonctions presque périodiques au sens de Bésicovitch, de Stepanoff, de Weyl (Besicovitch [*1*]).

Nous allons voir que dans la classe, en un certain sens complémentaire à la classe des fonctions presque périodiques, des fonctions pseudo-aléatoires (II-4-*b*),on peut construire des exemples assez simples de fonctions ayant elles aussi une mesure asymptotique. Cette construction, qui repose sur la notion de suite équi-répartie, est assez générale en ce sens que pour toute mesure μ de probabilité sur $\mathbb{R}$, elle donne un exemple de fonction ayant pour mesure asymptotique la mesure μ donnée.

SUITES ÉQUI-RÉPARTIES (H. Weyl [*1*] ; J. W. S. Cassels [*1*])

a) *Définition.*

Une suite (x_n) de points du cube $[0, 1[^k = \mathrm{I}^k$ est dite équi-répartie (sur I^k) si, pour tout parallélépipède $\prod_{i=k}^{k} [a_i, b_i[= \mathrm{A} \subset \mathrm{I}^k$, en désignant par $\mathrm{N}_\mathrm{A}(n)$ le nombre de points de la suite finie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tombant dans A, on a la relation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{N}_\mathrm{A}(n)}{n} = \lambda(\mathrm{A})$$

où λ est la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^k$.

b) *Critère de H. Weyl.*

La suite (x_n) est équi-répartie sur I^k si et seulement si pour toute fonction $h(x)$ Riemann-intégrable sur I^k, on a la relation

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} h(x_n) = \int_{I^k} h(x)dx.$$

c) *Indépendance de suites équi-réparties.*

Soit $\Phi = \{ (x_n^i) \}$ un ensemble fini ou infini de suites réelles équi-réparties sur $I^1 = [0, 1[$, non nécessairement toutes distinctes. On dit que ces suites sont linéairement indépendantes si la suite numérique

$$u_n = \lambda_1 x_n^1 + \ldots + \lambda_p x_n^p$$

est équi-répartie sur $[0, 1[$, quels que soient les nombres entiers λ_i non tous nuls, et quelles que soient les p suites $(x_n^1), \ldots, (x_n^p)$ toutes distinctes extraites de l'ensemble Φ.

On démontre que les suites équi-réparties sur $[0, 1]$: (x_n^i) $(i = 1, \ldots, p)$ sont linéairement indépendantes si et seulement si la suite à valeurs dans $[0, 1[^p$:

$$\vec{x_n} = (x_n^1, \ldots, x_n^p)$$

est équi-répartie sur le cube I^p.

d) Une suite équi-répartie (x_n) sur $[0, 1[$ est dite doublement équi-répartie sur les suites (x_n) et $(y_n = x_{n+k})$ sont linéairement indépendantes, quel que soit l'entier positif k.

e) *Équi-répartition complète.*

Une suite (x_n) équi-répartie sur $[0, 1[$ est dite complètement équi-répartie si les suites $(u_n^i) = (x_{n+k_i})$ $(i = 1, 2, \ldots)$ sont linéairement indépendantes quels que soient les nombres entiers positifs k_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Pour l'étude et la construction de suites complètement équi-réparties, voir N. M. Korobov [*1*]; L. P. Starchenko [*1*] [*2*] [3].

Remarque. — Si $(x_n, n \geqslant 0)$ est une suite équi-répartie sur I^k, pour la suite bilatère paire $u_p = x_p$ si $p \geqslant 0$, $u_p = x_{-p}$ si $p < 0$, les définitions et les propriétés de (x_n) (faisant intervenir les limites de sommes de la forme $\left.\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \ldots\right)$ se transposent à (u_p) (pour les limites de sommes correspondantes $\left.\frac{1}{2N}\sum_{n=-N}^{N} \ldots\right)$. De même, pour une suite complètement équi-répartie (x_n) et la suite bilatère paire correspondante (u_p). Ces assertions sont faciles à vérifier.

THÉORÈME 1. — Soit μ une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$, de fonction de répartition $F(x)$. Désignons par g une fonction réciproque (continue d'un côté) de F. Si $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite équi-répartie sur $[0, 1[$, la fonction paire définie pour $t \geqslant 0$ par : $f(t) = g(x_{\hat{t}})$ ($\hat{t}$ = partie entière de t) a une mesure asymptotique égale à μ.

Démonstration. — Soit H une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$; considérons la fonction $h(u) = \mathrm{H}[g(u)]$, définie sur l'intervalle ouvert $(0, 1)$; h est une fonction bornée, continue sauf sur un ensemble de points de discontinuité (de première espèce) de mesures de Lebesgue nulle puisque dénombrable ; elle est donc Riemann-intégrable sur $[0, 1]$. On a donc

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-N}^{N} h(u_n) = \int_0^1 h(u)du.$$

D'autre part, comme

$$\frac{1}{2N} \int_{-N}^{N} \mathrm{H}[f(t)]dt = \frac{1}{N} \int_0^N \mathrm{H}[g(u_{\hat{t}})]dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N} h(u_n) \int_0^1 dt$$

on voit que $\frac{1}{N} \int_0^N \mathrm{H} \circ f\, dt$ a une limite, égale à $\int_0^1 h \circ g(u)du$ quand $N \to \infty$.

De plus, la différence

$$\frac{1}{T} \int_0^T \mathrm{H} \circ f\, dt - \frac{1}{\hat{T}} \int_0^{\hat{T}} \mathrm{H} \circ f\, dt$$

tend vers 0 quand $T \to \infty$.

Par ailleurs, on a :

$$\int_0^1 \mathrm{H} \circ g(u)du = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}(x)d\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}d\mu$$

La fonction $f(t) = g(x_t)$ a donc pour mesure asymptotique la mesure μ.

2. **Indépendance asymptotique.**

Considérons k fonctions réelles $f_1, \ldots, f_k$ définies sur $\mathbb{R}$, et déterminant donc une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^k$:

$$t \rightsquigarrow \mathrm{F}(t) = [f_1(t), \ldots, f_k(t)]\,.$$

DÉFINITION. — Nous dirons que ces fonctions sont asymptotiquement indépendantes si

a) F admet une mesure asymptotique μ^F sur $\mathbb{R}^k$

b) la mesure $\mu^F(dx_1, \ldots, dx_k)$ est le produit tensoriel des k mesures asymptotiques $\mu^{f_1}(dx_1), \ldots, \mu^{f_k}(dx_k)$.

Exemple. — Considérons k suites équi-réparties linéairement indépendantes $(u_n^i)_{n\geqslant 0}$ $(i = 1, \ldots, k)$, et k fonctions $g_1, \ldots, g_k$ définies sur $[0, 1]$, chacune des $g_i(u)$ étant telle que :

a) pour toute suite (u_n) de nombres compris entre 0 et 1, la fonction $t \rightsquigarrow g_i(u_{\hat{t}})$ appartienne à l'espace $\mathscr{M}^1(\mathbb{R}_+ ; \mathbb{R})$,

b) pour toute fonction continue et bornée $H(x)$, la fonction composée $H[g_i(u)]$ soit Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

(Exemple de fonction $g(u)$ satisfaisant à *a*) et *b*) : g Riemann intégrable).

Appliquons la construction du théorème précédent : nous obtenons k fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}_+$:

$$f_i(t) = g_i(u_{\hat{t}}^i) \qquad (t > 0)\ (i = 1, \ldots, k).$$

THÉORÈME 2. — Les k fonctions $f_i(t)$ sont asymptotiquement indépendantes.

La démonstration se trouve dans l'appendice II.

La notion d'indépendance introduite, permet de traduire les théorèmes du calcul des probabilités concernant les suites ou familles de variables aléatoires indépendantes, dans le cadre des mesures asymptotiques ; l'adaptation est tout à fait facile. Au lieu de nous occuper de cela, nous allons considérer un autre problème. (Nous verrons plus loin des théorèmes de convergence concernant les mes. as., sans hypothèses d'indépendance).

Considérons une fonction $f(t)$ du type construit dans le théorème 1. Elle est constante sur les intervalles d'extrémité entiers, et varie par sauts. L'on se propose d'en déduire, par construction explicite, des fonctions continues, ou dérivables autant de fois qu'on le voudra, et ayant elles aussi une mes. as. sur $\mathbb{R}$. Il s'avère que la construction est possible, par convolution avec une fonction sommable sur $\mathbb{R}$, si du moins on fait sur la suite (u_n) entrant dans la définition de $f(t)$, une hypothèse plus forte que l'équi-répartition : il faut supposer (u_n) complètement équi-répartie.

En fait, de façon plus générale, on a la propriété suivante.

THÉORÈME 3. — Si $f \in \mathscr{M}_c^p$, et si, pour tout n et tous $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \subset \mathbb{R}^n$, la fonction $t \rightsquigarrow [f_{\tau_1}(t), \ldots, f_{\tau_n}(t)]$ a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^n$, alors pour toute mesure de Radon réelle bornée ν, la convoluée $f * \nu$ (au sens de $\mathcal{M}^p$) a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Comme f est $\mathcal{M}^p$-continue, sa convoluée $F = f * \nu$ est la $\mathcal{M}^p$ limite de combinaisons linéaires finies de translatées de f, de la forme :

$$S_N(t) = \sum_{k=1}^{N} C_k . f_{\tau_k}(t).$$

Il suffit donc de montrer que toute expression de cette forme a une mes. as. Or, cette propriété provient de l'hypothèse faite sur f, et du corollaire 1 du théorème 2, chapitre I.

Il résulte du théorème 3 que si la fonction f (élément de $\mathcal{M}_c^p$) ayant les propriétés énoncées dans l'hypothèse, est de plus bornée, alors la fonction de t qui est la convoluée ordinaire $f * \nu$ (d'une fonction bornée et d'une mesure bornée) a une mes. as. sur $\mathbb{R}$. En effet, on sait d'après le chapitre II, que si f est bornée, la convoluée ordinaire $f * \nu$ appartient à la $\mathcal{M}^p$-classe d'équivalence de la convoluée au sens $\mathcal{M}^p$ de f avec ν.

Revenons maintenant à une fonction bornée paire de la forme $f(t) = g(u_{\hat{t}})$ $(t > 0)$. Si la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est supposée complètement équirépartie, la fonction f est du type considéré dans le théorème 3 précédent (elle est $\mathcal{M}^2$-continue parce qu'ayant une autocorrélation continue à l'origine). Donc, pour toute mesure ν de Radon bornée réelle, la fonction $f * \nu$ (convoluée ordinaire) a une mes. as. sur $\mathbb{R}$. Dans le cas particulier où nous nous plaçons, il est possible de calculer cette mes. as. en fonction de celle de f. Le résultat de ces calculs est énoncé dans le théorème suivant, dont la démonstration se trouve dans l'appendice II.

THÉORÈME 4. — Si $f(t)$ est une fonction réelle, bornée, paire, définie pour $t \geqslant 0$ par $f(t) = g(u_{\hat{t}})$, où $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite complètement équirépartie alors pour toute mesure de Radon ν réelle, bornée et diffuse, la convoluée $f * \nu$ a pour mesure asymptotique celle dont la fonction caractéristique est donnée par la formule (en désignant par Φ la fonction caractéristique de la mesure de f) :

$$\varphi(s) = \lim_{N \to \infty} \int_0^1 \prod_{n=-N}^{N} \Phi[s l_n(v)] dv,$$

où l'on a posé (pour $0 < v < 1$), $l_n(v) = \check{\nu}([n - v, n + 1 - v])$.

Nous allons avoir besoin par la suite d'étudier le problème analogue au problème précédent, mais pour une fonction constante sur les intervalles d'extrémités $n\delta$ ($n \in \mathbb{Z}$, $\delta > 0$ fixé). Plus précisément, on désigne par dilatée (notée f^λ) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \rightsquigarrow f(\lambda t)$, où λ est un nombre > 0 fixé. Il s'ensuit que si f est constante sur les intervalles $I_n = [n, n+1[$, ($n \in \mathbb{Z}$), f^λ est constante (et de même valeur que f sur I_n) sur l'intervalle $I_{n,\lambda} = [n\delta, n\delta + \delta]\left(\delta = \frac{1}{\lambda}\right)$.

En reprenant le raisonnement fait pour démontrer le théorème précédent, en se basant cette fois-ci sur les intervalles $I_{n,\lambda}$ (λ fixé) et en se rappelant qu'ils sont de longueur δ, on arrive au résultat suivant :

THÉORÈME 5. — Dans les hypothèses faites sur la fonction $f(t)$ et la mesure ν et si λ est un nombre > 0, la mesure asymptotique de $f^\lambda * \nu$ a pour fonction caractéristique

$$\varphi_\lambda(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \prod_{n=-N}^{N} \Phi[s l_{n,\delta}(v)] dv$$

où (pour $0 < v < \delta$), $l_{n,\delta}(v) = \check{\nu}([n\delta - v, n\delta + \delta - v])$.

On a utilisé également le fait que la mesure asymptotique de f est invariante par dilatation (tout comme par translation de la variable t) :

$$\mu_{f^\lambda} = \mu_f .$$

En effet

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h \circ f(\lambda t) dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\lambda T} \int_{-\lambda T}^{\lambda T} h \circ f(u) du.$$

3. Un théorème de convergence.

Nous nous proposons maintenant d'étudier le comportement, quand $\lambda \to \infty$ de la mes. as. de la fonction :

$$F_\lambda(t) = \sqrt{\lambda} f^\lambda * \nu.$$

Nous allons voir que ces mes. as. convergent étroitement vers une mesure gaussienne, quand $\lambda \to \infty$, sous l'hypothèse que ν est à support compact, est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et de densité continue.

L'étude de la fonction $F_\lambda(t)$ pour $\lambda \to \infty$ a trait en particulier à un problème étudié dans J. Bass [3]. La démonstration du résultat qui suit se trouve dans l'appendice II.

THÉORÈME 6. — Soit f une fonction bornée, réelle, paire, de moyenne nulle, de la forme $f(t) = g(u_{\hat{t}})$ $(t \geqslant 0)$, où $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est une suite complètement équi-répartie. Soit $K(x)$ une fonction réelle continue à support compact. Alors, la mes. as. de la fonction $F_\lambda(t) = \sqrt{\lambda} f^\lambda * K$ tend vers la mesure gaussienne sur $\mathbb{R}$, centrée et de moment d'ordre 2 : $m_2 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)dx$, où m_2 est la moyenne temporelle de $f^2(t)$.

Remarques. — 1) Il est possible de démontrer ce théorème pour une fonction K de support quelconque, mais supposée bornée et uniformément continue (et sommable). La démonstration un peu longue ne présente pas de difficultés nouvelles.

2) Nous avons supposé f bornée, pour pouvoir considérer la convoluée $f^\lambda * K$ comme une fonction ordinaire (définie en tout point de façon univoque). Si l'on suppose que f (au lieu d'être bornée) appartient seulement à $\mathcal{M}^{2+\rho}$ $(\rho > 0)$, il est possible d'adapter la démonstration, le résultat du théorème étant valable pour la convoluée $\sqrt{\lambda} f^\lambda * K$, élément de $\mathcal{M}^{2+\rho}$.

3) Il ne semble pas possible de ramener la démonstration du théorème précédent à l'application d'un résultat du type théorème central limite.

4. Problèmes de comparabilité.

Si l'on considère l'ensemble $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G ; \mathbb{R})$ de toutes les fonctions ayant une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$, on ne sait pas si $\mathcal{T}$ forme un espace vectoriel. On connaît par contre des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{T}$, par exemple celui des fonctions faiblement presque-périodiques d'Eberlein, ou celui des fonctions uniformément presque-périodiques de Bohr (qui sont tous les deux des algèbres) (Eberlein [*1*] ; Bohr [*1*]).

Un autre exemple d'algèbre contenue dans $\mathcal{T}$ est constitué par l'ensemble $\mathcal{B}_{(x_n)}$ de toutes les fonctions réelles, paires, définies pour $t > 0$ par $f(t) = g(x_{\hat{t}})$, où (x_n) est une suite équi-répartie fixée sur $[0, 1[$, et où g est une fonction bornée Riemann-intégrable sur $[0, 1[$.

Le problème de la recherche d'espaces vectoriels (ou d'algèbres) contenus dans $\mathcal{T}$ amène à considérer la notion de comparabilité suivante.

DÉFINITION. — Deux ensembles A et B de fonctions réelles (définies sur G), contenus dans $\mathcal{T}$, sont dits $\mathcal{T}$-comparable additivement (respectivement : multiplicativement) si, pour tout $f \in A$, tout $g \in B$, la somme $f + g$ (respectivement : le produit fg) est un élément de $\mathcal{T}$.

THÉORÈME 7. — *a*) Soient A et B deux sous-ensembles de $\mathcal{T} \cap \bigcap_{p \geqslant 1} \mathcal{M}^p$, stables pour la multiplication des fonctions. Alors, A et B sont multiplicativement $\mathscr{T}$-comparables si et seulement si A et B sont additivement $\mathscr{T}$-comparables.

Démonstration. — α) Supposons A et B multiplicativement $\mathscr{T}$-comparables et considérons $h = f + g$, $(f \in A, g \in B)$; h est moyennable ainsi que chacune de ses puissances entières positives h^p $(p \geqslant 2)$ puisque h^p est une somme de termes de la forme $C_{kl} f^k g^l$, qui sont tous moyennables d'après le théorème 3 du chapitre I. D'après le théorème 5 du même chapitre, $h = f + g$ admet alors une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

β) Supposons A et B additivement comparables, et soient $f \in A$, $g \in B$. Il s'agit de montrer que fg admet une mes. as., et pour cela, il suffira que pour tout entier $p \geqslant 1$, $(fg)^p$ soit moyennable. Mais

$$2(fg)^p = (f^p + g^p)^2 - (f^{2p} + g^{2p})$$

et chacune des trois fonctions figurant au 2^e^ membre est moyennable ; en particulier, $(f^p + g^p)^2$ l'est parce que $f^p + g^p$ admet une mesure asymptotique.

Remarques. — *i*) Si $f \in \mathscr{T} \cap \bigcap_{p \geqslant 1} \mathscr{M}^p$, alors l'ensemble $A(f)$ constitué de toutes les puissances entières $\geqslant 0$ de f est stable pour la multiplication (ponctuelle) des fonctions ; de plus, on a $A(f) \subset \mathscr{T} \cap \bigcap_{p \geqslant 1} \mathscr{M}^p$. Il suffit pour le voir de se rappeler les théorèmes 3 et 5 du chapitre I.

ii) Vu la proposition précédente, pour deux ensembles A et B du type considéré dans cette proposition, on parlera de la $\mathscr{T}$-comparabilité sans avoir à préciser davantage. On dira que f est $\mathscr{T}$-comparable à l'ensemble B si $A(f)$ est $\mathscr{T}$-comparable à B.

b) Il est intéressant de savoir s'il existe des fonctions f (non presque-périodiques) qui soient $\mathscr{T}$-comparables aux fonctions uniformément presque-périodiques. Pour les fonctions appartenant à une algèbre $\mathscr{B}_{(x_n)}$ qui est formée avec une suite (x_n) doublement équi-répartie (fonctions toutes pseudo-aléatoires), on a le résultat suivant.

THÉORÈME 8. — Si la suite (x_n) est doublement équi-répartie sur $[0, 1[$, l'algèbre de fonctions $\mathscr{B}_{(x_n)}$ est $\mathscr{T}$-comparable à l'algèbre $\mathscr{A}$ de toutes les fonctions uniformément presque-périodiques.

Démonstration. — α) Montrons que pour toute fonction $f \in \mathscr{B}_{(x_n)}$ et pour tout réel λ, le produit

$$h(t) = f(t)e^{i\lambda t}$$

a une mes. as. sur $\mathbb{R}$. Pour cela, h étant bornée, il suffit que toutes les puissances entières $\geqslant 1$ de h soient moyennables. Or, d'une part

$$h^p(t) = f^p(t)e^{i\lambda pt} ;$$

d'autre part, $f^p(t) = [g(x_t)]^p$ est une fonction pseudo-aléatoire décentrée (Vo-Khac-Khoan [*1*]), c'est-à-dire la somme d'une constante K_p et d'une fonction pseudo-aléatoire $\varphi_p(t)$, donc

$$h^p(t) = K_p e^{ip\lambda t} + \varphi_p(t) e^{ip\lambda t}.$$

Par conséquent, la moyenne de h^p existe, puisque pour la fonction pseudo-aléatoire $\varphi_p(t)$, le coefficient de Fourier $C(\lambda p)$ existe et est nul.

β) D'après le théorème 7, il suffit de montrer que pour toute $f \in \mathscr{B}_{(x_n)}$ et pour toute fonction uniformément presque-périodique h, le produit fh a une mesure asymptotique.

Pour tout polynôme trigonométrique P_n, le produit fP_n a une mes. as.; pour le voir, il suffit de décomposer fP_n en somme de termes de la forme $f(t)e^{i\lambda t}$, d'utiliser le résultat démontré en a) et d'appliquer le théorème 7 précédent aux différents ensembles A_λ constitués chacun des puissances entières positives de $f(t)e^{i\lambda t}$.

γ) Chaque fonction presque-périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques P_n, donc (f étant bornée) fh est limite uniforme de fP_n ; fh admet donc une mes. as. sur $\mathbb{R}$. La proposition est démontrée.

Remarques. — α) Le théorème 8 reste valable si la suite (x_n) est supposée seulement asymptotiquement doublement équi-répartie ; par exemple, si x_n = partie fractionnaire de $P(n)$, où P est un polynôme de Weyl de classe 2 (Vo-Khac-Khoan [*1*]).

β) Cette proposition reste valable aussi dans le cas où $\mathscr{B}$ est un ensemble stable par multiplication $A(f)$ où f est une fonction pseudo-aléatoire dont toutes les puissances $f^p(t)$ ($p \geqslant 1$) sont des fonctions pseudo-aléatoires décentrées.

Dans les deux cas, la démonstration précédente reste valable.

CHAPITRE IV

FAMILLE DE MESURES CYLINDRIQUES OU DE RADON ASSOCIÉE A UNE FONCTION A VALEURS DANS UN ESPACE (VECTORIEL) TOPOLOGIQUE

1. Rappels sur les mesures cylindriques.

(L. Schwartz [*1*] [*2*] ; Badrikian [*1*] ; Tortrat [*3*]).

a) Soit E un espace vectoriel topologique réel localement convexe séparé, de dual E'. On appelle mesure cylindrique sur E, un système de mesures de probabilité définies de la façon suivante : à toute suite finie $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ d'éléments du dual E', est associée une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$, soit $\mu_w = \mu_{y_1,\ldots,y_n}$; cet ensemble de mesures devant vérifier la condition de cohérence qui suit :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "w'=(y'_1,\ldots,y'_m)"] \arrow[dr, "w=(y_1,\ldots,y_n)"'] & \mathbb{R}^m \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Considérons deux suites $(y_1, \ldots, y_n)$ et $(y'_1, \ldots, y'_m)$ d'éléments de E' telles que $(y_1, \ldots, y_n)$ engendre un sous-espace de l'espace engendré par $(y'_1, \ldots, y'_m)$. Elles définissent deux applications linéaires et continues w, w' de E dans $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ respectivement. Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que le diagramme précédent soit commutatif, c'est-à-dire que $w = g_0 w'$. Alors, la condition de cohérence s'énonce ainsi : l'on doit avoir l'égalité entre mesures :

$$\mu_{y_1, \ \ , y_n} = g \circ \mu_{y'_1, \ \ , y'_n}$$

(ou $\mu_w = g \circ \mu_{w'}$), où $g \circ \mu_{w'}$ désigne la mesure définie sur $\mathbb{R}^n$, qui est l'image de la mesure $\mu_{w'}$ sur $\mathbb{R}^m$ par l'application $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$; autrement dit, on doit avoir :

$$\int_{\mathbb{R}^m} h[g(u)]d\mu_{w'}(u) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} h(x)d[g \circ \mu_{w'}(x)] = \int_{\mathbb{R}^n} h(x)d\mu_w(x) \quad \forall h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R}^n).$$

Exemple de mesure cylindrique : si, par exemple, μ est une vraie mesure de probabilité sur E, alors le système

$$\mu_w = w_0 \mu$$

où w varie parmi tous les systèmes finis $w = (y_1, \ldots, y_n) \in (E')^n$, constitue une mesure cylindrique sur E.

b) CONVERGENCE CYLINDRIQUE

Sur l'ensemble Q(E) de toutes les mesures cylindriques, on appelle topologie de la convergence cylindrique la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications W_n définies sur Q(E), à valeurs dans $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$, et déterminées de la façon suivante.

Soit $w_n = (y_1, \ldots, y_n)$ une suite d'éléments de E', soit μ un élément de Q(E), alors $W_n(\mu)$ désigne la mesure μ_{w}, élément de $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ (espace des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^n$) muni de la topologie de la convergence étroite.

Ainsi, $\mu_j \to \mu$ cylindriquement si et seulement si, pour tout $w \in \mathscr{L}(\mathrm{E}\,;\mathbb{R}^n)$ espace des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}^n$, on a $w \circ \mu_j \to w \circ \mu$ étroitement sur $\mathbb{R}^n$; et il suffit que cela soit vrai pour les w correspondant à $n = 1$.

c) Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une mesure cylindrique μ sur E est la fonction $\varphi = \mathscr{F}\mu$ définie sur le dual E′ de E, par la formule :

$$\xi \in \mathrm{E}', \qquad \varphi(\xi) = \mathscr{F}\mu_\xi(1),$$

où $\mu_\xi = \xi \circ \mu$ est la mesure sur $\mathbb{R}$ associée à l'élément $\xi \in \mathrm{E}'$, et où $\mathscr{F}\mu_\xi(1)$ désigne la valeur au point $u = 1$ de la transformée de Fourier de la mesure μ_ξ.

d) Concentration

Soit A une partie de E, soit μ une mesure cylindrique sur E. On dit que μ est scalairement concentrée à η près (η nombre $\geqslant 0$) sur A si, pour tout $\xi \in \mathrm{E}'$, $\xi \circ \mu(\xi(\mathrm{A})) \geqslant 1 - \eta$.

Si $\eta = 0$, on dit simplement que μ est scalairement concentrée sur A. Il est clair que si μ est scalairement concentrée à $\eta + \varepsilon$ près sur A, quel que soit $\varepsilon > 0$, alors μ est scalairement concentrée sur A, à η près.

Si S est une famille de parties de E, une mesure cylindrique μ sur E est dite scalairement S-concentrée si, pour tout $\eta > 0$, il existe un ensemble $\mathrm{A} \in \mathrm{S}$ tel que μ soit scalairement concentrée à η près sur A.

Un ensemble S est dit « saturé » s'il est invariant par homothéties, filtrant croissant ($\mathrm{A} \in \mathrm{S}$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{S}$ entraînent $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathrm{S}$) et formé de parties bornées et équilibrées.

On dispose en particulier du résultat suivant.

Proposition (L. Schwartz [*1*]). — Soit μ une mesure cylindrique sur un espace vectoriel topologique localement convexe E, et soit S un ensemble « saturé » de parties de E. Alors, les trois conditions suivantes sont équivalentes :

(*i*) μ est scalairement S-concentrée,

(*ii*) $\varphi = \mathrm{F}\mu$ est continue sur E′ pour la S-topologie,

(*iii*) $\varphi = \mathscr{F}\mu$ est continue à l'origine de E′ pour la S-topologie

(où la S-topologie de E′ est celle de la convergence uniforme sur les parties appartenant à S de E).

Rappelons pour terminer qu'une mesure positive finie μ sur un espace topologique X séparé est appelée mesure tendue (ou de Radon), si la condition (de Prokhorov) suivante est vérifiée : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un ensemble compact K_ε de X tel que $\mu(K_\varepsilon^c) < \varepsilon$.

Sur un espace polonais (métrique complet séparable), toute mesure positive finie est tendue. Plus généralement, il en sera de même sur un espace radonien (N. Bourbaki [*1*]).

2. **La condition** (C_S).

Soit E un espace vectoriel topologique réel séparé et localement convexe (e. v. t. *lc*), soit F une application de $\mathbb{R}$ dans E, mesurable pour les tribus boréliennes respectives de $\mathbb{R}$ et E. Par $\mu_T = \mu_T^F$, on désignera, comme au chapitre I, l'image, sur E, de la restriction normalisée de la mesure de Lebesgue à X_T, définie par la restriction de F à X_T, soit :

$$\int_E \varphi(x) d\mu_T(x) = \frac{1}{2T} \int_{X_T} \varphi[F(t)]dt \qquad \varphi \in \mathscr{C}_b(E).$$

Quant T parcourt les nombres positifs, on obtient ainsi une famille $\{ \mu_T \} = \{ \mu_T^F \}$ de mesures de probabilité sur E. On se propose d'étudier certaines propriétés de compacité de la famille $\{ \mu_T \}$ suivant les propriétés de la fonction $F(t)$.

Pour cela, introduisons la notion suivante.

LA CONDITION (C_S). — Soit $F(t)$ une application mesurable borélienne de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel topologique localement convexe E, et soit S une famille de parties de E. On dira que F vérifie la condition (C_S) si $\forall \eta > 0$, $\exists A_\eta \in S$, tel que

$$\lambda(\{ F(t) \notin A_\eta \}) \equiv \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \text{ mes } (X_T \cap \{ F(t) \notin A_\eta \}) \leqslant \eta.$$

LEMME 1. — Si F vérifie une condition (C_S) où S est une famille de parties bornées de E, alors, pour tout élément ξ du dual E' de E, la fonction réelle $t \rightsquigarrow \langle \xi, F(t) \rangle_{E',E}$ appartient à l'espace $\mathscr{M}^0(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$.

Démonstration. — Pour tout $\eta > 0$, soit A_η un ensemble borné de E (appartenant à S), tel que $\lambda(\{ t : F(t) \notin A_\eta \}) \leqslant \eta$. Pour tout $\xi \in E'$, l'ensemble des nombres réels $\{ \langle \xi, F(t) \rangle\,;\, t \in \mathbb{R}$ tels que $F(t) \in A_\eta \}$ est un ensemble borné de $\mathbb{R}$, donc contenu dans un intervalle borné $[-R_\eta, R_\eta]$. Donc, on a :

$$\{ t : |\langle \xi, F(t) \rangle| > R_\eta \} \subset \{ T : F(t) \notin A_\eta \}\,;$$

par conséquent

$$\lambda \{ t : |\langle \xi, F(t) \rangle| > R_\eta \} < \eta.$$

Comme d'autre part, pour tout $R > R_\eta$, on a

$$\{ | \langle \xi, F(t) \rangle | > R \} \subset \{ | \langle \xi, F(t) \rangle | > R_\eta \}$$

on a bien

$$\lim_{R \to \infty} \lambda \{ | \langle \xi, F(t) \rangle | > R \} = 0$$

ce qui veut dire que la fonction de t : $\langle \xi, F(t) \rangle$ appartient à $\mathscr{M}^0(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$.

3. Concentration des « mesures extraites ».

Revenons à la famille de mesures sur $E : \{ \mu_T \} = \{ \mu_T^F \}$. Une mesure cylindrique adhérente à la famille $\{ \mu_T \}$ (pour la convergence cylindrique), est dite une mesure cylindrique « extraite » de la famille $\{ \mu_T \}$.

L'on s'intéresse naturellement à la question de savoir quand ces mesures cylindriques extraites sont de vraies mesures, et l'on sait (L. Schwartz [*1*] [*2*]) qu'un certain nombre de conditions suffisantes pour qu'une mesure cylindrique soit une vraie mesure portent sur des propriétés de concentration scalaire de ces mesures cylindriques. L'on va voir que pour la famille $\{ \mu_T^F \}$, ces propriétés sont liées à la propriété (C_S) de la fonction F.

Soit S une famille de parties de E, ayant les propriétés suivantes : elle est invariante par homothéties, filtrant croissant ($A \in S$ et $B \in S$ entraînent $A \cup B \in S$), et tout ensemble $A \in S$ est équilibré et borné. On appellera un tel ensemble « saturé », comme dans (L. Schwartz [*1*]). Dans ce cas, les polaires A^0 des $A \in S$ forment un système fondamental de voisinages de E'_S, où E'_S désigne l'espace E' muni de la topologie (localement convexe) de la convergence uniforme sur toute partie de E appartenant à S.

THÉORÈME 1. — Soit E un e. v. t. *lc*, et soit S un ensemble « saturé » de parties de E. On suppose l'espace E'_S séparable. Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans E vérifiant la condition (C_S). Alors, de toute suite $t_n \to \infty$, on peut extraire une sous-suite (T_ν) telle que les mesures (μ_{T_ν}) convergent cylindriquement $(\nu \to \infty)$ vers une mesure cylindrique limite. De plus, chacune de ces mesures cylindriques limites est scalairement S-concentrée.

Démonstration. — α) Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots)$ une suite dense dans E'_S. D'après le lemme 1, pour tout $\xi \in E'$, la fonction

$$\varphi(\xi)(t) = \langle \xi, F(t) \rangle$$

appartient à $\mathscr{M}_0(G\,;\,\mathbb{R})$. Considérons une suite quelconque $t_n \to \infty$, et faisons $\xi = \xi_1$. Alors, de (t_n), on peut extraire une sous-suite $\{ t_n^1 \}$ telle que la suite de mesures

$$(\mu_{t_n^1}^{\varphi(\xi_1)}) = (\mu_{t_n^1}^{\xi_1})$$

converge étroitement (dans P($\mathbb{R}$)), vers une mesure de probabilité limite μ^{ξ_1}. Considérons alors la fonction $\varphi(\xi_2)(t) = \langle \xi_2, F(t) \rangle$, et les mesures $(\mu^{\xi_1}_{t_n'})$. On peut en extraire une sous-suite $(\mu^{\xi_2}_{t_n''})$ qui converge, soit vers μ^{ξ_2}.

Par le procédé diagonal, on peut extraire de la suite initiale (t_n) une sous-suite (diagonale) (T_ν) telle que, pour tout $i \geqslant 1$, la suite de mesures $(\mu^{\xi_i}_{T_\nu})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ converge étroitement sur $\mathbb{R}$, vers une limite μ^i.

β) On a défini de cette façon une application de l'ensemble dense (ξ_i) de E'_S dans P($\mathbb{R}$), $\xi_i \rightsquigarrow \mu^i$. On va utiliser la continuité de cette application (quand P($\mathbb{R}$) est muni de la convergence étroite), pour la prolonger à tout E'_S. Pour tout $\xi \in E'$, soit (ξ^n) une suite (sous-suite de (ξ_i)) convergeant dans E'_S vers ξ. Alors $\lim_{n,p\to\infty} (\xi^n - \xi^p) = 0$ dans E'_S.

Considérons les mesures μ^n et μ^p correspondant à ξ^n et ξ^p (relativement à la suite diagonale (T_ν) de (α)). Leurs transformées de Fourier s'écrivent :

$$\mathcal{F}\mu^n(s) = \lim_{T_\nu\to\infty} \mathcal{F}\mu^n_{T_\nu}(s) = \lim_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{X_{T_\nu}} e^{is\langle \xi^n, F(t)\rangle} dt.$$

Donc, on a :

$$\mathcal{F}\mu^n(s) - \mathcal{F}\mu^p(s) = \lim_{\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{X_{T_\nu}} (e^{is\langle \xi^n, F(t)\rangle} - e^{is\langle \xi^p, F(t)\rangle}) dt$$

$$| \mathcal{F}\mu^n(s) - \mathcal{F}\mu^p(s) | \leqslant \limsup_{T_\nu\to\infty} \frac{1}{2T_\nu} \int_{X_{T_\nu}} | e^{is\langle \xi^n - \xi^p, F(t)\rangle} - 1 | dt.$$

Or, $(\xi^n - \xi^p) \xrightarrow[n,p\to\infty]{} 0$ dans E'_S, c'est-à-dire uniformément sur les ensembles $A \in S$. Etant donné $\varepsilon > 0$, soit A_ε l'ensemble appartenant à S et correspondant à ε dans la condition (C_S).

On a alors :

$$| \mathcal{F}\mu^n(s) - \mathcal{F}\mu^p(s) | \leqslant 2 \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes} [X_T \cap \{ F(t) \notin A_\varepsilon \}]$$
$$+ \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{F(t)\in A_\varepsilon\}} | s | \; | \langle \xi^n - \xi^p, F(t) \rangle | dt$$

Comme $\langle \xi^n - \xi^p F(t) \rangle$ tend vers 0 ($n, p \to \infty$) uniformément par rapport à t dans l'ensemble $\{ F(t) \in A_\varepsilon \}$, on a :

$$| \mathcal{F}\mu^n(s) - \mathcal{F}\mu^p(s) | \leqslant 2\varepsilon + 0, \qquad \text{pour tous } n, p > N(s\,;\,\varepsilon)$$

d'où

$$\lim_{n,p\to\infty} | \mathcal{F}\mu^n(s) - \mathcal{F}\mu^p(s) | = 0,$$

et cela uniformément sur tout ensemble compact de s dans $\hat{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire que la suite $(\mathcal{F}\mu^n)$ converge uniformément sur tout compact vers une limite, qui est donc, par le théorème de P. Lévy, la fonction caractéristique d'une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$. D'après le même théorème, la suite des mesures (μ^n) tend étroitement vers une mesure μ^ξ. Cette dernière mesure a pour fonction caractéristique :

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2T_\nu}\int_{X_{T_\nu}} e^{is\langle\xi^n,F(t)\rangle}dt\right\}$$

En majorant la quantité

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T_\nu\to\infty}\left(\frac{1}{2T_\nu}\int_{X_{T_\nu}}[e^{is\langle\xi^n,F(t)\rangle}-e^{is\langle\xi,F(t)\rangle}]dt\right)$$

de la même façon que plus haut, c'est-à-dire en décomposant l'ensemble X_{T_ν} en $X_{T_\nu}\cap\{F(t)\in A_\varepsilon\}$ et $X_{T_\nu}\cap\{F(t)\notin A_\varepsilon\}$, on voit que la fonction caractéristique de la mesure μ^ξ est égale à

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2T_\nu}\int_{X_{T_\nu}} e^{is\langle\xi,F(t)\rangle}dt.$$

γ) On a ainsi montré qu'il existe une sous-suite (T_ν) de la suite initiale (t_n) telle que pour tout $\xi\in E'$, la suite de mesures $(\mu^\xi_{T_\nu})$ converge vers une mesure que nous noterons $\mu^\xi_{(T_\nu)}$.

La première partie du théorème est ainsi démontrée, à savoir : de toute suite (t_n), on peut extraire une sous-suite (T_ν) telle que les mesures de probabilité $(\mu^\xi_{T_\nu})$ sur E convergent cylindriquement vers une mesure cylindrique limite $\mu^F_{\{T_\nu\}}$.

δ) Démontrons que chacune des mesures $\mu_{(T_\nu)}=\mu^F_{(T_\nu)}$ est scalairement S-concentrée, sous l'hypothèse que l'application F vérifie la condition (C_S). Il suffit pour cela d'appliquer le théorème rappelé sur la concentration scalaire, et montrer que si $\xi\to 0$ dans E'_S, alors $\mathscr{F}\mu_{(T_\nu)}(\xi)\to 1$. Or,

$$\mathscr{F}\mu_{(T_\nu)}(\xi)=\mathscr{F}(\xi\circ\mu_{(T_\nu)})(1)=\mathscr{F}(\mu^\xi_{(T_\nu)})(1)=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2T_\nu}\int_{X_{T_\nu}} e^{i\langle\xi,F(t)\rangle}dt.$$

En appliquant les mêmes majorations que dans les parties précédentes de la démonstration, et en utilisant la condition (C_S), on voit que $\{\mathscr{F}\mu_{(T_\nu)}(\xi)-1\}\to 0$ sous l'hypothèse $\xi\to 0$ dans E' dans la S-topologie. Le théorème 1 est ainsi démontré.

4. Nous étudions maintenant les **propriétés d'ordre et de type** (L. Schwartz [2]) **des mesures « extraites »** étudiées dans le théorème 1.

THÉORÈME 2. — Soient E un espace de Banach, F une application borélienne de $\mathbb{R}$ dans E. Si μ est limite cylindrique d'une suite de mesures $\mu^F_{T_n}$

$(T_n \to \infty)$ et si $F \in \mathcal{M}^{p+\rho}(\mathbb{R}\,;\,E)\,(\rho > 0, p > 0)$, alors μ est de type p.

Démonstration. — La mesure cylindrique μ sur E est de type p (L. Schwartz [*2*]) s'il existe une constante M telle que, pour tout $\xi \in E'$,

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^p d(\xi \circ \mu)(t) \leqslant M \|\xi\|_{E'}^p .$$

Or, pour tout $\xi \in E'$, la fonction $\varphi(t) = \langle \xi, F(t) \rangle_{E',E}$ appartient à $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$. En effet

$$|\varphi(t)| \leqslant \|\xi\|_{E'} . \|F(t)\|_E$$

Donc, d'après la proposition, on peut extraire de la suite (T_n) une sous-suite (T_{n_j}) telle que $\mu^\varphi_{T_{n_j}}$ converge vers une mesure σ sur $\mathbb{R}$, ayant un moment d'ordre p, et de plus

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |t|^p d\mu^\varphi_{T_{n_j}} = \int_{\mathbb{R}} |t|^p d\sigma$$

Par hypothèse, $\mu^\varphi_{T_n} = \xi \circ \mu^F_{T_n}$ converge $(n \to \infty)$ vers $\xi \circ \mu$, donc, on a $\sigma = \xi \circ \mu$, et, par conséquent :

$$\int_{\mathbb{R}} |t|^p d(\xi \circ \mu)(t) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{2T_{n_j}} \int_{-T_{n_j}}^{T_{n_j}} |\varphi(t)|^p dt \leqslant \|\xi\|_{E'}^p . \|(\|F(t)\|_E)\|_{\mathcal{M}^p}^p .$$

CAS OU LES MESURES μ^F_T SONT DE RADON. — On s'intéresse aux cas où les mesures de probabilité μ^F_T sur l'espace topologique (complètement régulier) E sont toutes de Radon.

D'après par exemple (A. Badrikian [*1*], Proposition 3), ce sera le cas si F est m-Lusin mesurable (où m désigne la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}$), c'est-à-dire si F possède la propriété suivante : il existe une suite d'ensembles compacts A_n de $\mathbb{R}$, deux à deux disjoints, telle que la restriction de F à chaque A_n est continue et que $m\left(\mathbb{R} - \bigcup_n A_n\right) = 0$.

Tel sera le cas si F est par exemple continue.

Si E est un espace polonais (ou plus généralement radonien), il suffit évidemment de supposer F Borel-mesurable, puisque sur E, toute mesure de probabilité est de Radon.

THÉORÈME 3. — Soient E un espace de Banach, F une application de $\mathbb{R}$ dans E, telle que les mesures μ^F_T soient de Radon. Dans ce cas, si μ est une mesure cylindrique adhérente à la famille $(\mu^F_T, T > 0)$, et si $F \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R}\,;\,E)$, alors μ a une image dans $\sigma(E'', E')$ (par l'injection canonique de E dans E'') qui est de Radon, et

$$\int_{\sigma(E'',E')} \| x'' \|^p d\mu(x'') < \infty.$$

Démonstration. — (La notation $\sigma(E'', E')$ désigne le bidual E'' de E, muni de la topologie $\sigma(E'', E')$). On remarque que si $F \in \mathcal{M}^p(\mathbb{R}\,;\, E)$, alors il existe une constante K_p telle que

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \| F(t) \|_E^p dt \leqslant K_p \qquad (\forall T \geqslant 1, \text{ par exemple}).$$

Comme les mesures (μ_T^F) sont de Radon, il suffit d'appliquer le corollaire 2 de la proposition 6.1, exposé n° 4 de L. Schwartz [*2*], puisque l'on a :

$$\int_E \| x \|^p d\mu_T^F(x) \leqslant K_p \qquad (\forall T \geqslant 1).$$

5. Condition de relative compacité séquentielle étroite de la famille (μ_T^F).

Nous avons vu au théorème 1 que si F vérifie une condition (C_S) avec une famille S formée de parties bornées de E, alors (si E'_S est séparable), on peut « extraire » de toute suite $(\mu_{T_n}^F)$ $(T_n \to \infty)$ une sous-suite convergeant cylindriquement. Nous allons, en utilisant un résultat de F. Topsøe [*1*], voir que si la famille S est formée de parties compactes de E, l'on peut extraire une sous-suite convergeant étroitement, et la limite est une mesure de Radon.

THÉORÈME 2. — Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans un espace topologique séparé X, telle que les mesures (μ_T^F) soient de Radon sur X. On suppose de plus que F satisfait à une condition (C_S), pour une famille S de parties compactes de l'espace X. Alors, de toute suite $T_n \to \infty$, on peut extraire une sous-suite $T_{n_j} \to \infty$ telle que les mesures $\mu_j = \mu_{T_{n_j}}^F$ convergent étroitement vers une mesure de probabilité (de Radon) sur X.

Démonstration. — La condition (C_S) avec une famille de compacts de X s'écrit : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K_\varepsilon$ compact tel que :

$$\limsup_{T\to\infty} \mu_T(K_\varepsilon^c) < \varepsilon, \qquad \text{où } \mu_T = \mu_T^F.$$

La famille de mesures $(\mu_T, T \to \infty)$ est alors un « filtre tendu » de mesures dans la terminologie de F. Topsøe [*1*] (« tight net ») ; d'après le théorème 9.1 (*ii*) de cette référence, de suite (μ_{T_n}) $(T_n \to \infty)$, on peut extraire une sous-suite $(\mu_{T_{n_j}})$ convergeant étroitement lorsque $j \to \infty$, vers une mesure tendue sur X.

6. Utilisation des limites de Banach.

Nous avons jusqu'ici étudié les mesures μ limites des suites (μ_{T_n}) $(T_n \to \infty)$ contenues dans la famille (μ_T^F). Nous allons voir que la notion de limite de Banach permet une étude analogue de la famille (μ_T^F).

a) Une limite de Banach (S. Banach [*1*]) est une forme linéaire L définie sur l'espace $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ des fonctions bornées sur $\mathbb{R}^+$ et réelles, ayant en plus les propriétés suivantes : L est positive, c'est-à-dire $L(\varphi) \geqslant 0$ si $\varphi(s) \geqslant 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, L est invariante par translation : $\underset{(s)}{L}[\varphi(s_0 + s)] = \underset{(s)}{L}[\varphi(s)]$, $\forall s_0 \in \mathbb{R}_+$ et L conserve les constantes : $L(1) = 1$.

Il s'ensuit que L est continue sur $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ muni de la norme uniforme, et que $\| L \| = 1$. On a aussi, pour tout $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$

$$\liminf_{s \to +\infty} \varphi(s) \leqslant L(\varphi) \leqslant \limsup_{s \to +\infty} \varphi(s)$$

Pour toute fonction mesurable bornée $g(t)$ définie sur $\mathbb{R}$, on posera

$$m(s\,;g) = \frac{1}{2s} \int_{-s}^{s} g(t)dt \qquad (s > 0).$$

b) THÉORÈME 5. — Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans un espace topologique X, mesurable pour les tribus boréliennes de $\mathbb{R}$ et de X, et vérifiant la condition C(S) pour une famille S de parties compactes de X. Dans ces conditions, pour toute limite de Banach L, il existe une mesure de probabilité $\mu_{(L)}$ sur X telle que

$$\underset{(s)}{L}[m(s\,;h \circ F)] = \int_X h(x)\mu_{(L)}(dx)$$

pour toute $h \in \mathscr{C}_b(X)$.

Démonstration. — α) La condition C(S) avec une famille S de compacts s'écrit : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de X tel que l'ensemble

$$A_\varepsilon = \{ t \in \mathbb{R} : F(t) \notin K_\varepsilon \}$$

vérifie $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Pour tout $h \in \mathscr{C}_b(X)$, considérons les fonctions suivantes :

$$G_1(t) = h[F(t)]1_{A_\varepsilon}(t) \qquad (1_A = \text{fonction indicatrice de A})$$
$$G_2(t) = h[F(t)]1_{A_\varepsilon^c}(t) \qquad (A^c = \text{complémentaire de A dans } \mathbb{R}).$$

On a :

$$h \circ F = G_1 + G_2$$

d'où

$$m(s\,;\, h \circ F) = m(s\,;\, G_1) + m(s\,;\, G_2)$$

donc

$$\underset{(s)}{L}[m(s\,;\, h \circ F)] = \underset{(s)}{L}[m(s\,;\, G_1)] + \underset{(s)}{L}[m(s\,;\, G_2)].$$

β) Montrons que la forme linéaire $h \rightsquigarrow \underset{(s)}{L}[m(s\,;\, h \circ F)] = \Lambda(h)$ est, sous la condition C(S) précédente, σ-continue (Tortrat [*2*]), c'est-à-dire que pour toute suite de fonctions positives ou nulles $h_n \in \mathscr{C}_b(X)$ décroissant vers 0, on a $\Lambda(h_n) \downarrow 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, considérons la décomposition de *a*) :

$$\Lambda(h_n) = \underset{(s)}{L}[m(s\,;\, G_1^n)] + \underset{(s)}{L}[m(s\,;\, G_2^n)],$$

où

$$G_1^n = (h_n \circ F)1_{A_\varepsilon}, \qquad G_n^2 = (h_n \circ F)1_{A_\varepsilon^c}.$$

Le premier terme du second membre est majoré par

$$\|h_1\|_\infty \underset{(s)}{L}\left[\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} 1_A(t)dt\right]$$
$$\leqslant \|h_1\|_\infty \limsup_{s\to\infty} \frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} 1_{A_\varepsilon}(t)dt = \|h_1\|_\infty \lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon \|h_1\|_\infty.$$

Considérons le deuxième terme ; il est majoré par

$$\left|\underset{(s)}{L}\left[\frac{1}{2s}\int_{-s}^{s} G_1^n(t)dt\right]\right|$$
$$\leqslant \left|\underset{(s)}{L}\left[\frac{1}{2s}\int_{(-s,s)\cap\{F\in K_\varepsilon\}} h_n[F(t)]dt\right]\right| \leqslant \|L\|.\|h_n\|_{K_\varepsilon} = \|h_n\|_{K_\varepsilon}$$

où $\|h_n\|_{K_\varepsilon}$ désigne la norme uniforme de la restriction de h_n à l'ensemble compact K_ε. Par le lemme de Dini, $\|h_n\|_{K_\varepsilon}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. Comme ε était arbitraire, on a bien $\lim_{n\to\infty} \Lambda(h_n) = 0$, donc la σ-continuité de la forme linéaire $\Lambda(h)$.

γ) Par le théorème l'Alexandrov (Tortrat [*2*]) la forme linéaire, positive $\Lambda(h)$, étant σ-continue (et vérifiant $\Lambda(1) = 1$), est représentée par une intégrale

$$\int_X h(x)\mu_{(L)}(dx)$$

où $\mu_{(L)}$ est une mesure de probabilité sur X.

Le théorème 5 est démontré.

On se pose alors la question suivante : dans quel cas les mesures $\mu_{(L)}$ de la proposition précédente coïncident-elles pour des L variables ? Une réponse est apportée dans le théorème suivant, où l'on fait varier L dans un sous-ensemble $\mathscr{L}$ de l'espace de toutes les limites de Banach.

c) DÉFINITION DE L'ENSEMBLE $\mathscr{L}$. — Désignons d'abord par V le sous-espace (fermé) de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, formé de fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ qui sont uniformément moyennables, au sens :

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(s)ds \equiv m(f)$$

existe, uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}_+$.

Convenons d'appeler « limite forte de Banach », tout élément L du dual de $L^\infty(\mathbb{R}_+)$, qui est prolongement isométrique à $L^\infty(\mathbb{R}_+)$ de la forme linéaire continue m définie sur V. Autrement dit, si $\mathscr{L}$ désigne l'ensemble des limites fortes de Banach, $L \in \mathscr{L}$ si et seulement si :

a) $L \in (L^\infty(\mathbb{R}_+))'$

b) $\| L \| = 1$,

c) $f \in V \Rightarrow L(f) = m(f)$.

Un tel L est nécessairement une limite de Banach (Raimi [*1*], [*2*]).

La notion de limite forte de Banach a été étudiée par Raimi [*1*] [*2*] (sous le nom de « fonctionnelle de moyenne »). La principale propriété de l'ensemble $\mathscr{L}$ que nous allons utiliser, est la suivante : pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$ et tout nombre réel λ, il existe un $L \in \mathscr{L}$ avec $L(f) = \lambda$ si et seulement si λ vérifie les inégalités

$$\lim_{\alpha\to\infty} \inf_{x>0} \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(s)ds \equiv \tau(f) \leqslant \lambda \leqslant \omega(f) \equiv \lim_{\alpha\to\infty} \sup_{x>0} \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} f(s)ds\,;$$

(les limites figurant dans la définition de $\tau(f)$ et $\omega(f)$ existent pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$. (Raimi [*1*].)

THÉORÈME 6. — Soit F une application de $\mathbb{R}$ dans un espace topologique X, satisfaisant à l'hypothèse du théorème 5. Alors, les mesures $\mu_{(L)}$ coïncident en une seule mesure μ lorsque L parcourt l'ensemble $\mathscr{L}$ de toutes les limites fortes de Banach, si et seulement si pour tout $h \in \mathscr{C}_b(X)$,

$$\lim_{\alpha\to\infty} \frac{1}{\alpha} \int_x^{x+\alpha} \frac{1}{2s} \int_{-s}^{s} h[F(t)]dtds$$

existe, uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}_+$. La limite précédente est alors égale à

$$\int_X h(x)d\mu(x).$$

Démonstration. — α) Supposons que toutes les mesures $(\mu_L, L \in \mathscr{L})$ coïncident avec une mesure μ sur X. Alors, en posant pour tout h fixé dans $\mathscr{C}_b(X)$, $m(s\,; h \circ F) = f(s) \in L^\infty(\mathbb{R}_+)$, tous les nombres $(L(f), L \in \mathscr{L})$ coïncident $\left(\text{avec } \int_X hd\mu\right)$. Il s'ensuit de ce qui précède l'énoncé que l'on a alors nécessairement :

$$\tau(f) = \int_X hd\mu = \omega(f),$$

ce qui montre que la limite figurant dans l'énoncé de la proposition est atteinte uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}_+$, et qu'elle est égale à $\int_X hd\mu$.

β) Réciproquement, si cette limite existe uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}_+$, alors, pour tout $h \in \mathscr{C}_b(X)$, on a $\tau(f) = \omega(f)$ (toujours en posant $m(s\,; h \circ F) = f(s)$) ; donc, d'après la même propriété utilisée en a), pour tout $L \in \mathscr{L}$, on a $L(f) \equiv \mu_L(h) = \tau(f) = \omega(f)$; autrement dit, toutes les mesures $(\mu_L, L \in \mathscr{L})$ coïncident.

CHAPITRE V

ÉLÉMENTS D'UN ESPACE DE FONCTIONS OU DE DISTRIBUTIONS DÉFINISSANT SUR CET ESPACE UNE MESURE ASYMPTOTIQUE CYLINDRIQUE OU DE RADON

1. Éléments d'un espace de fonctions ou de distributions définissant une mesure asymptotique sur cet espace.

Soient E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé réel, F une application de G ($= \mathbb{R}$) dans E, mesurable pour les tribus boréliennes respectives de G et de E.

DÉFINITION 1. — On dit que F définit une mesure asymptotique cylindrique sur E, si les mesures μ_T^F convergent, quand $T \to \infty$, cylindriquement vers une mesure cylindrique limite, notée μ^F.

DÉFINITION 2. — Supposons maintenant que E soit un espace de (classes de) fonctions réelles définies sur G (ou un espace de distributions) ; pour tout $f \in E$, $\tau_h f$ désigne la translatée de f par h. Pour tout $T > 0$, on désignera par μ_T^f la mesure μ_T^F, où F est l'application de G dans E définie par $F(h) = \tau_h f$, et on dira qu'un élément f de E admet une mesure asymptotique cylindrique (mes. as. cyl.) si c'est l'application F qui en admet une au sens de la définition précédente.

DÉFINITION 3. — De même, on dira qu'un élément $f \in E$ admet une mesure asymptotique sur E, si c'est l'application $F(h) = \tau_h f$ qui en définit une sur E, au sens de la définition générale du chapitre I.

THÉORÈME 1. — Une condition nécessaire et suffisante pour que F admette une mesure asymptotique cylindrique sur E, est que pour tout élément ξ du dual E' de E, la fonction $t \rightsquigarrow \langle \xi, F(t) \rangle_{E',E}$ admette une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Considérons les mesures (de probabilité) $(\mu_T^F\,;\, T > 0)$; elles convergent cylindriquement quand $T \to \infty$ si et seulement si, pour tout $\xi \in E'$, les mesures $\xi \circ \mu_T^F$ convergent étroitement dans $P(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout $h \in \mathscr{C}_b(\mathbb{R})$ (fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$), on ait

$$\int_{\mathbb{R}} hd(\xi \circ \mu_T^F) = \frac{1}{2T} \int_{X_T} h[\langle \xi, F(t) \rangle]dt$$

tende vers $\int_{\mathbb{R}} hd\nu_\xi$, où ν_ξ est une mesure de Radon sur $\mathbb{R}$. Or, ceci veut dire que la fonction réelle $t \rightsquigarrow \langle \xi, F(t) \rangle$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

Nous allons maintenant chercher des conditions suffisantes, assez larges, pour qu'une application F ait une mes. as. cyl., et pour que cette mesure soit une vraie mesure de probabilité sur E.

THÉORÈME 2. — Soit E un espace de Banach de (classes de) fonctions réelles définies sur G, invariant par translation, et tel que la représentation $h \rightsquigarrow \tau_h$ soit fortement continue et uniformément bornée de G dans E. Si f est un élément faiblement presque périodique (pour le groupe des translations) de E, f définit une mesure asymptotique cylindrique μ^f sur E. De plus, μ^f est une mesure de Radon sur E munie de sa topologie faible $\sigma(E, E')$ (et même sur E fort) et les mesures μ_T^f convergent étroitement vers μ^f sur (E, σ).

Démonstration. — Rappelons qu'un élément f de E est dit faiblement presque-périodique (pour le groupe des translations) si l'ensemble $\{ \tau_h f, h \in G \}$ est relativement faiblement compact dans E. D'après un théorème d'Eberlein (Eberlein [*1*]), pour tout élément $\xi \in E'$, $h \rightsquigarrow \langle \xi, \tau_h f \rangle$ est une fonction numérique faiblement presque-périodique continue (fonction d'Eberlein). Or, une fonction réelle faiblement presque-périodique continue admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème 1, f admet une mesure asymptotique cylindrique.

Considérons l'enveloppe convexe équilibrée faiblement fermée A de l'ensemble $\{ \tau_h(f), h \in G \}$. A est une partie convexe faiblement compacte de E (Dunford et Schwartz [*1*]). Donc, l'application $F(h) = \tau_h f$ vérifie la condition C(S), avec S constitué par l'ensemble A et ses homothétiques ; la mesure cylindrique μ^F est donc scalairement concentrée sur A. D'après la propriété (IV, 1, *d*), μ^F est une mesure de Radon sur E muni de sa topologie faible $\sigma(E, E')$. D'après un théorème de Phillips et de Grothendieck (Badrikian [*1*], théorème 9.1), elle est aussi de Radon sur E fort. Les mesures de Radon μ_T^F convergent aussi étroitement sur (E, σ) vers μ^F, puisque sur $P(E_\sigma)$, la topologie étroite coïncide avec la topologie cylindrique (Schwartz [*2*], exposé n° 3). Le théorème 1 est démontré.

Considérons le cas de l'espace de Banach $\mathcal{M}_c^p = \mathcal{M}_c^p(G ; \mathbb{R})$ de (classes de) fonctions $\mathcal{M}^p$-continues (II.4.*a*) : pour tout $f \in \mathcal{M}_c^p$, l'application $h \rightsquigarrow \tau_h(f)$ est continue de G dans $\mathcal{M}_c^p$, et $\| \tau_n(f) \| = \| f \|$ pour tout $h \in G$. L'espace $\mathcal{M}_c^p$ répond donc à toutes les hypothèses sur E énoncées dans le théorème 1.

COROLLAIRE. — Toute fonction $\mathcal{M}_c^p$-pseudo-aléatoire définit une mes. as. cyl. sur $\mathcal{M}_c^p$, qui est une mesure de Radon sur $\mathcal{M}_c^p$.

THÉORÈME 3. — Soit E un espace de Banach (fonctionnel) satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème 1. Alors, pour tout élément fortement presque-périodique f de E, les mesures μ_T^f convergent étroitement vers une mesure de Radon μ^f sur E (muni de sa topologie de la norme).

Démonstration. — Presque tout le théorème 3 est corollaire du théorème 2. Donnons une démonstration directe. Posons $F(h) = \tau_h(f)(h \in G)$. D'après le théorème 1, quand $T \to \infty$, μ_T^F converge cylindriquement vers une mesure cylindrique μ^f.

D'autre part, la famille $(\mu_T^F, T > 0)$ vérifie la condition de Prokhorov. En effet, si A désigne la fermeture (compacte) dans E de l'ensemble $\{ \tau_h f, h \in G \}$, on a $F(h) \in A$ quel que soit h, donc :

$$\mu_T^F(A) = \frac{1}{2T} \int_{X_T} 1_A[F(h)]dh = 1, \qquad \forall T > 0.$$

Par conséquent, μ^f est une mesure de Radon, et les mesures μ_T^F convergent étroitement sur E (muni de sa topologie forte) vers la mesure μ^f ; de plus, $\mu^f(A) = 1$ (μ^f est concentrée sur A), car A étant fermé, on a

$$\mu^f(A) \geqslant \limsup_{T \to \infty} \mu_T^F(A).$$

THÉORÈME 4. — Soit E un espace de Banach (fonctionnel) satisfaisant aux conditions énoncées dans le théorème 1, et qui soit de plus réflexif. Alors, tout élément f de E définit une mesure asymptotique cylindrique μ^f sur E qui est de Radon. Les mesures μ_T^f convergent vers μ^f étroitement sur (E, σ).

Démonstration. — A cause des hypothèses sur E, on a, en particulier, pour tout $f \in E$: l'ensemble $\{ \tau_h(f), h \in G \}$ est un ensemble borné dans E, donc relativement faiblement compact puisque E est réflexif. D'après un théorème d'Eberlein (Eberlein [*1*]), pour tout $\xi \in E'$, la fonction $h \rightsquigarrow \langle \xi, \tau_h(f) \rangle$ est faiblement presque périodique continue, donc admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. Le reste de la démonstration se fait comme dans le théorème 1.

THÉORÈME 5. — Soit E un espace de distributions sur $\mathbb{R}$, supposé de Montel. Si un élément borné de E admet une mesure asymptotique cylindrique μ^f sur E, μ^f est de Radon sur E, et les mesures μ_T^f convergent étroitement vers μ^f.

Démonstration. — L'élément $f \in E$ est dit borné, si l'ensemble $\{ \tau_h(f), h \in G \}$ est borné dans E (Schwartz [*3*]). Il est alors relativement compact, puisque E est de Montel. On utilise alors le critère de Prokhorov exactement comme dans la démonstration du théorème 2.

2. **Indépendance asymptotique.**

Considérons deux e. v. t. *lc* réels E_1, E_2, et deux applications F_1, F_2 de G dans E_1, E_2 respectivement. Supposons que F_i définisse une mes. as. cyl. sur E_i ($i = 1, 2$), et que l'application $t \rightsquigarrow F(t) = (F_1(t), F_2(t))$ de G dans $E = E_1 \times E_2$ en définisse une sur $E_1 \times E_2$.

DÉFINITION. — Nous dirons alors que les applications F_1 et F_2 sont (asymptotiquement) indépendantes, si la mes. as. cyl. μ^F est le produit tensoriel (Schwartz [*1*] [*2*]) des mes. as. cyl. μ^{F_1} et μ^{F_2}.

LEMME 1. — Avec les notations utilisées dans la définition, les applications F_1 et F_2 sont indépendantes si et seulement si, pour tout $\xi_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$

$$\mathscr{F}\mu^{(\langle \xi_1, F_1(h) \rangle + \langle \xi_2, F_2(h) \rangle)}(1) = \mathscr{F}\mu^{\langle \xi_1, F_1(h) \rangle}(1)\mathscr{F}\mu^{\langle \xi_2, F_2(h) \rangle}(1)$$

Démonstration. — Pour que μ^F (mesure cylindrique sur $E = E_1 \times E_2$) soit le produit tensoriel $\mu^{F_1} \otimes \mu^{F_2}$, il faut et il suffit que, pour tout $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in E'$, $(\xi_i \in E_i', i = 1, 2)$, on ait

$$\mathscr{F}\mu^F(\xi) = \mathscr{F}\mu^{F_1}(\xi_1)\mathscr{F}\mu^{F_2}(\xi_2) \qquad \text{(Schwartz [1] [2])}$$

ou encore

$$\mathscr{F}(\xi \circ \mu^F)(1) = \mathscr{F}(\xi_1 \circ \mu^{F_1})(1).\mathscr{F}(\xi_2 \circ \mu^{F_2})(1)$$

et puisque

$$\xi \circ \mu^F = \mu^{\langle \xi, F(h) \rangle} = \mu^{\langle \xi_1, F_1(h) \rangle + \langle \xi_2, F_2(h) \rangle},$$

il faut et il suffit que l'on ait l'égalité écrite dans l'énoncé du lemme.

Remarquons que si $F_i(h) = \tau_h(f_i)$, où f_i sont des éléments faiblement presque-périodiques de E_i $(i = 1, 2)$ (et que E_i satisfait aux conditions énoncées dans le théorème 1), alors $F(t) = (F_1(t), F_2(t))$ définit automatiquement une mes. as. cyl. sur $E_1 \times E_2 = E$. En effet, toute forme linéaire continue ξ sur E est de la forme :

$$\xi((x_1, x_2)) = \langle \xi_1, x_1 \rangle + \langle \xi_2, x_2 \rangle, \qquad (\xi_i \in E_i', i = 1, 2),$$

donc

$$\langle \xi, F(h) \rangle = \langle \xi_1, \tau_h(f_1) \rangle + \langle \xi_2, \tau_h(f_2) \rangle$$

et la fonction $h \to \langle \xi, F(h) \rangle$ est par conséquent faiblement presque-périodique continue (fonction d'Eberlein), c'est-à-dire définit une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

Le cas de n facteurs $E_1 \times \ldots \times E_n$, et de n applications $[F_1, \ldots, F_n]$ se définit et se traite de la même façon.

a) Soit E un espace de Banach de (classes de) fonctions réelles définies sur G, satisfaisant aux hypothèses du théorème 1, contenant les fonctions $\cos \lambda x$, $\sin \lambda x$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et tel que $\|\cos \lambda x\|_E \leqslant 1$, $\|\sin \lambda x\|_E \leqslant 1$, $(\lambda \in \mathbb{R})$. On s'intéresse aux éléments fortement presque-périodiques f de E qui sont développables en série de Fourier $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k x + b_k \sin \lambda_k x$, celle-ci convergeant normalement vers f. L'ensemble (dénombrable) $\{\lambda_k\}$ s'appelle alors le spectre de f; il engendre un sous-groupe de $\hat{G}$ qui sera désigné par $\Lambda(f)$.

THÉORÈME 6. — Soient E_1, E_2 deux espaces de Banach (de fonctions) du type considéré au début de ce paragraphe, et $f_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$ deux éléments fortement presque-périodiques, sommes de leurs séries de Fourier normalement convergentes. Alors, les éléments f_1 et f_2 sont indépendants si $\Lambda(f_1) \cap \Lambda(f_2) = \{ 0 \}$.

Démonstration. — Désignons par F l'application $t \rightsquigarrow F(t)=[F_1(t), F_2(t)]$ où $F_i(h) = \tau_h(f_i)$ $(i = 1, 2)$. D'après le théorème 1, il suffit de montrer que sous la condition énoncée dans le théorème, les fonctions réelles $h \rightsquigarrow \langle \xi_1, \tau_h(f_1) \rangle$, $h \rightsquigarrow \langle \xi_2, \tau_h(f_2) \rangle$ sont asymptotiquement indépendantes (au sens des mesures asymptotiques sur $\mathbb{R}$). Or, par hypothèse, on a :

$$\tau_h f_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^i \cos \lambda_k^i(t + h) + b_k^i \sin \lambda_k^i(t + h) \qquad (i = 1, 2)$$

la série convergeant dans E. En appliquant ξ_i aux deux membres de l'égalité, on obtient pour $\langle \xi_i, \tau_h f_i \rangle$ une série trigonométrique qui converge uniformément par rapport à h $(h \in G)$, grâce à l'hypothèse de convergence normale de la série de Fourier de f_i ; d'où $h \rightsquigarrow \langle \xi_i, \tau_h(f_i) \rangle$ est une fonction presque-périodique de Bohr, ayant son spectre égal à celui de f_i. Il suffit alors d'appliquer la condition suffisante d'indépendance (asymptotique) de deux fonctions réelles presque-périodiques de Bohr (J. Dhombres [*1*]), qui s'écrit :

$$\Lambda(f_1(\cap \Lambda(f_2) = \{ 0 \}.$$

c) Si T est une distribution presque-périodique (p.-p.) au sens de (Schwartz [*3*]), alors T définit une mes. as. cyl. sur $\mathscr{D}'$, puisque, pour tout $\varphi \in \mathscr{D}$, la régularisée $h \rightsquigarrow \langle \varphi, \tau_h T \rangle$ est une fonction presque-périodique continue (fonction de Bohr). Cette mes. as. cyl. est en fait une mesure de Radon sur $\mathscr{D}'$, car une distribution p.-p. est une distribution bornée. Une distribution p.-p. a un spectre dénombrable, engendrant un sous-groupe de $\mathbb{R}$ qu'on désigne par $\Lambda(T)$. On a alors le résultat suivant.

THÉORÈME 7. — Deux distributions presque-périodiques T_1 et T_2 sont asymptotiquement indépendantes si $\Lambda(T_1) \cap \Lambda(T_2) = \{ 0 \}$.

Démonstration. — D'après le lemme 1, il suffit de montrer que, pour tout couple $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D}$, les fonctions de Bohr

$$h \rightsquigarrow \langle \varphi_1, \tau_h T_1 \rangle \qquad \text{et} \qquad h \rightsquigarrow \langle \varphi_2, \tau_h T_2 \rangle$$

sont asymptotiquement indépendantes. Or, elles ont leurs spectres contenus dans ceux de T_1, T_2 respectivement (Schwartz [*3*]). La condition

$$\Lambda(T_1) \cap \Lambda(T_2) = \{ 0 \}$$

est donc suffisante pour qu'elles soient indépendantes.

3. **Convergence vers le bruit blanc.**

Dans l'optique des mes. as. cyl., nous allons examiner, comme application, le comportement de certaines fonctions (complètement) pseudo-aléatoires. Soit (x_n) une suite complètement équi-répartie ; soit g une fonction réelle périodique de période 1, continue et d'intégrale $\int_0^1 g(x)dx$ nulle, $\int_0^1 g^2(x)dx = 1$, et telle que la fonction paire, définie, pour $t > 0$, par $f(t) = g(x_{\hat{t}})$ appartienne à l'espace $\mathcal{M}^p(\mathrm{G}\,;\,\mathbb{R})$, pour un $p > 2$.

On se propose d'étudier le comportement, pour $\lambda \to \infty$, des distributions (éléments de $\mathscr{D}'(\mathbb{R})$) définies par les fonctions $\mathrm{F}_\lambda(t) = \sqrt{\lambda}\, f(\lambda t)$ $(\lambda > 0)$. En ce qui concerne la mes. as. cyl. définie sur $\mathscr{D}'$, par F_λ, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 8. — Dans les conditions énoncées précédemment sur f, la fonction F_λ définit une mes. as. cyl. μ^{F_λ} sur $\mathscr{D}'$, qui converge cylindriquement, quand $\lambda \to \infty$, vers la mesure cylindrique de la distribution aléatoire gaussienne du bruit blanc.

Démonstration. — Il a été démontré, dans le théorème 6, chapitre III, que, pour toute fonction φ d'une classe englobant $\mathscr{D}$, la fonction

$$h \rightsquigarrow \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x).(\tau_h \mathrm{F}_\lambda)(x)dx = \langle \varphi, \tau_h \mathrm{F}_\lambda \rangle_{\mathscr{D},\mathscr{D}'}$$

admet une mesure asymptotique σ_λ sur $\mathbb{R}$, et que σ_λ converge, quand $\lambda \to \infty$, vers la mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$, de variance égale à $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)dx$. Cela montre que la distribution représentée par la fonction localement intégrable F_λ admet une mes. as. cyl. sur $\mathscr{D}'$, et que celle-ci converge cylindriquement, quand $\lambda \to \infty$, vers une mesure cylindrique gaussienne ν, dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\mathscr{F}\nu(\varphi) = \mathscr{F}(\varphi \circ \nu)(1) = e^{-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x)dx}, \quad \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}).$$

4. **Action d'un opérateur commutant avec les translations.**

Considérons deux espaces vectoriels topologiques localement convexes E et X de (classes de) fonctions réelles (ou de distributions) définies sur $\mathbb{R}$. On s'intéresse à l'action, sur les fonctions de E ayant une mesure asymptotique sur E, d'une application A de E dans X, continue et commutant avec les translations de E et de X, c'est-à-dire telle que

$$S_t(Af) = A(S_t f) \qquad (t \in \mathbb{R})\ (f \in E)$$

en désignant par (S_t) à la fois le groupe des translations dans l'espace E et celui de l'espace X.

THÉORÈME 9. — Si l'élément f de E admet une mesure asymptotique sur E, alors, pour toute application continue A de E dans X, commutant avec les translations de E et de X, l'élément $A(f)$ de X admet une mesure asymptotique sur X.

Démonstration. — Il faut montrer que, pour tout $H \in \mathscr{C}_b(X)$, la limite suivant existe :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H[S_t(Af)]dt$$

Or, A commute avec les translations, donc

$$H[S_t(Af)] = H[A(S_t f)],$$

et comme $H \circ A \in \mathscr{C}_b(E)$, le théorème est démontré.

THÉORÈME 10. — Si $f \in E$ admet une mesure asymptotique cylindrique sur E, alors, pour toute application linéaire continue de E dans X et commutant avec les translations de E et de X, l'élément Af de X admet une mesure asymptotique cylindrique sur X.

Démonstration. — D'après le théorème 1, il suffit de montrer que, pour tout élément du dual X′ de X, la fonction

$$t \rightsquigarrow \langle \xi, S_t(Af) \rangle_{X',X} = \varphi(t)$$

admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. Comme A commute avec les translations dans E et dans X, on a

$$\varphi(t) = \langle \xi, A(S_t f) \rangle_{X',X} = \langle A^*\xi, S_t f \rangle_{E',E}$$

où A^* désigne l'opérateur transposé de A ; par l'hypothèse faite sur f, la fonction $\varphi(t)$ admet donc une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$, à cause du théorème 1. Comme ceci est vrai pour tout $\xi \in X'$, le théorème 10 est démontré.

5. Construction d'applications ayant pour mesure asymptotique la mesure de Wiener sur un espace de Banach.

Un problème qui se pose est celui de savoir si, étant donné une mesure de probabilité sur un espace vectoriel topologique E, il existe une application F de G dans E, qui ait pour mesure asymptotique la mesure donnée ; et éventuellement donner de F une construction simple et maniable. Nous allons résoudre ce problème dans le cas suivant : E est un espace de Banach séparable, et μ est une mesure gaussienne sur E. Nous allons d'abord rappeler quelques faits sur les « espaces de Wiener abstraits » de L. Gross (L. Gross [*1*] [*2*]) ; Kuelbs [*1*]).

a) Soit H un espace hilbertien séparable (réel), sous-espace dense d'un espace de Banach séparable B, dans lequel H s'injecte continûment. On appelle mesure cylindrique gaussienne canonique μ_H sur H, la mesure cylindrique dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\mathscr{F}\mu_H(y) = \exp\left(-\frac{1}{2}\|y\|_H^2\right) \qquad (y \in H).$$

L. Gross démontre que si la norme de B est une fonction « mesurable » (au sens de (Gross [*1*])) sur H, alors la mesure $j(\mu_H)$, image de μ_H par l'injection j de H dans B, est une vraie mesure de probabilité. En particulier, pour tout opérateur de Hilbert-Schmidt A défini sur H, la fonction $h \to \|Ah\|_H$ est une norme mesurable au sens de L. Gross.

On désignera toujours dans la suite par $\langle, \rangle$ le produit de dualité entre B et son dual B′, et par (,) le produit scalaire de l'espace hilbertien H.

Dans l'espace de Banach B, considérons une base de Schauder (b_i) (Day [*1*]) ; tout élément x de B s'écrit de façon unique

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x) b_i, \quad \beta_i \in E' \qquad \text{et} \qquad \langle \beta_i, b_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad \forall i, j.$$

(on peut toujours prendre $\|b_i\| = 1$, $\forall i$, (Day [*1*]).

Soit d'autre part (λ_i) une suite dans l^1 de nombres > 0. On se propose de montrer qu'il existe un sous-espace hilbertien de B, dense dans B et à injection continue dans B, tel que :

(*i*) H ait pour base orthonormale la suite (e_i), où $e_i = \lambda_i b_i$, et
(*ii*) la norme de B soit mesurable au sens de Gross sur H.

Pour montrer (*i*), nous utilisons une proposition de (L. Schwartz [*4*]). Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un sous-espace hilbertien H à injection continue dans B, et ayant pour base orthonormée le système (e_i), est que :

$$\alpha)\ \forall f \in B', \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 < \infty,$$

β) le système (e_i) est Hilbert-libre dans B, à savoir : si $(c_i) \in l^2$ et $\sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = 0$ (série sommable dans B), alors, pour tout i, $c_i = 0$.

Or, ces deux conditions sont vérifiées par le système $e_i = \lambda_i b_i$. En effet, pour (α), on a

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \| f \|_{B'}^2 < \infty.$$

Pour (β), si $x = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \lambda_i b_i$, on a $\beta_i(x) = c_i \lambda_i$ pour tout i, par l'hypothèse que (b_i) est une base de Schauder de B ; donc, si $x = 0$, on a $c_i = 0$ pour tout i, puisque $\lambda_i \neq 0$, $\forall i$.

Par conséquent, il existe un sous-espace hilbertien H de B ayant toutes les propriétés énoncées, sauf (ii) qu'il s'agit maintenant de vérifier. Or, pour tout $x \in H$, on a :

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j, \qquad (\alpha_j) \in l^2,$$

et cette série converge aussi au sens de la norme de B

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j b_j .$$

On a :

$$\| x \|_B = \left\| \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j b_j \right\|_B \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j^{1/2} \lambda_j^{1/2} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 \lambda_j \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_i \right)^{1/2} .$$

En prenant pour A l'opérateur de Hilbert-Schmidt défini sur H par

$$Ax = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{1/2} (x \mid e_j) e_j$$

on trouve donc

$$\| x \|_B \leqslant M \| Ax \|_H \qquad \left(\text{en posant } M = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \right)^{1/2} \right),$$

ce qui montre que $\| x \|_B$, qui est majorée par la norme mesurable $x \to M \| Ax \|_H$, est une norme mesurable sur H.

b) Cherchons ensuite l'image μ de la mesure cylindrique gaussienne canonique μ_H par l'injection j de H dans B. Elle a pour transformée de Fourier

$$\mathscr{F}\mu(f) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \| j^*(f) \|_H^2 \right\}$$

où j^* désigne la transposée de j. Or, il est montré dans (L. Schwartz [4]) que j n'est autre que le noyau du sous-espace H de B, et que celui-ci est donné dans notre cas par $\sum_{i=1}^{\infty} e_i \otimes e_i$, c'est-à-dire que

$$j^*(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \otimes e_i \rangle \qquad (f \in B')$$

La mesure μ est, d'après les résultats de Gross et le fait que la norme de B est mesurable sur H, une mesure de Radon sur B. Passons maintenant à la construction de l'application F de G dans B, ayant pour mesure asymptique cylindrique μ^F sur B, la mesure gaussienne (ce qui montrera en même temps que μ^F est une mesure de Radon).

c) Rappelons quelques faits sur les suites complètement équi-réparties. On appelle ainsi une suite (x_n) de nombres réels à valeur dans $[0, 1[$ telle que, pour tout entier $m > 0$, et tout système d'entiers $k_1, \ldots, k_m$ distincts, la suite $n \to (x_{k_1+n}, \ldots, x_{k_m+n})$ est équi-répartie dans l'hypercube $[0, 1[^m$.

Désignons ensuite par h la fonction réciproque de la fonction de répartition de la loi de Gauss centrée réduite sur $\mathbb{R}$; h est définie sur $(0, 1)$. Définissons la fonction réelle g par la relation $g(t) = h(x_{\hat{t}})$, où $\hat{t}$ désigne la partie entière de t. Alors, on montre (théorème 1, chap. III) que g admet une mesure asymptotique μ^g sur $\mathbb{R}$, qui est égale à la mesure de la loi de Gauss centrée réduite, et qu'avec les notations précédentes,

$$[g(k_1 + t), \ldots, g(k_m + t)]$$

qui applique G dans $\mathbb{R}^m$, a pour mesure asymptotique la mesure de Gauss centrée réduite de l'espace euclidien $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire celle dont la fonction caractéristique est égale à $\exp\left\{ -\frac{1}{2}(u_1^2 + \ldots + u_m^2) \right\}$, $((u_1, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}_m)$.

d) Remarquons que la mesure μ^g (= mesure de Gauss sur $\mathbb{R}$), a des moments de tous ordres, donc, d'après un résultat du chapitre I (théorème 3), toutes les puissances $g^p(t)$ sont moyennables, donc on a en particulier, $g \in \mathscr{M}^p(G ; \mathbb{R})$, $\forall p \geqslant 1$. Donc, pour tout entier k, la suite $n \to g(k + n)$

appartient à l'espace $m_p = \mathcal{M}^p(\mathbb{N}\,;\,\mathbb{R})$, et ceci pour tout $p \geqslant 1$. On a donc, pour tout entier k :

$$\{g(k+n)\}_{n=1}^{\infty} \in \bigcap_{p \geqslant 1} m_p.$$

On dira, pour simplifier, qu'une suite (λ_n) $(\in l^1)$ envoie $\bigcap_{p\geqslant 1} m_p$ dans l^1 si, pour toute suite $(c_n) \in \bigcap_{p\geqslant 1} m_p$, on a $(\lambda_n c_n) \in l^1$.

On peut remarquer que cette condition sur la suite (λ_n) est assez peu restrictive, puisque les suites appartenant à $\bigcap_{p\geqslant 1} m_p$ sont « très proches » des suites bornées.

e) Reconsidérons alors l'espace de Banach séparable B ayant la base de Schauder (b_i), et posons, pour tout t :

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n+t)\lambda_n b_n \qquad (*)$$

où (λ_n) est une suite de nombres > 0, $(\lambda_n) \in l^1$ et envoie $\bigcap_{p\geqslant 1} m_p$ dans l^1.

Cette condition sur (λ_n) assure que la série définissant $F(t)$ converge dans B, pour tout t. En effet :

$$F(t) = F(\hat{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} g(n+\hat{t})\lambda_n b_n,$$

et la suite $n \to g(\hat{t}+n)\lambda_n$ appartient à l^1.

Pour tout $f \in B'$, on a donc

$$\langle f, F(t) \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} g(n+t)\lambda_n \langle f, b_n \rangle.$$

Montrons que F admet une mesure asymptotique cylindrique sur B. Pour cela, montrons que, pour tout $f \in B'$, la fonction $\langle f, F(t) \rangle$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. On a vu que $[g(1+t), \ldots, g(m+t)]$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^m$, donc, d'après les propriétés générales (chap. I, corollaire 1 du théorème 2) des applications de G dans $\mathbb{R}^m$ et ayant une mesure asymptotique, la combinaison linéaire

$$\lambda_1 \langle f, b_1 \rangle g(1+t) + \ldots + \lambda_m \langle f, b_m \rangle g(m+t)$$

a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. En passant par les transformées de Fourier, on voit sans peine que cette dernière mesure asymptotique est une mesure de Gauss centrée et de variance $\lambda_1^2 \langle f, b_1 \rangle^2 + \ldots + \lambda_m^2 \langle f, b_m \rangle$.

Montrons ensuite que $\langle f, F(.) \rangle$ est limite, dans $\mathcal{M}^1(G ; \mathbb{R})$, de $S_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle f, b_i \rangle g(i+t)$. Or, (S_n) est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathcal{M}^1(G ; \mathbb{R})$ (qui est complet) :

$$\| S_n - S_m \|_{\mathcal{M}^1} \leqslant \sum_{m+1}^{n} \lambda_i \| f \|_{B'} \| g \|_{\mathcal{M}^1}, \qquad \text{et} \qquad (\lambda_i) \in l^1.$$

Comme d'autre part, S_n converge simplement vers $\langle f, F(.) \rangle$, cette dernière fonction est dans la $\mathcal{M}^1$-classe de la $\mathcal{M}^1$-limite des S_n, ce qui entraîne que $\langle f, F(t) \rangle$ a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$, limite (étroite) des mesures μ^{S_n}. Finalement, la mesure asymptotique de $\langle f, F(t) \rangle$ est la mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$, de variance

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \langle f, b_i \rangle^2 .$$

Nous avons donc montré que l'application F a une mesure asymptotique cylindrique sur B, dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\mathcal{F}\mu^F(f) = \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \langle f, b_i \rangle \right\}, \qquad f \in B'.$$

μ^F est donc égale à la mesure μ de la partie (*b*), si l'on y prend pour suite (λ_i), la même que dans la construction de $F(t)$.

Résumons :

THÉORÈME 8. — Soit B un espace de Banach séparable à base de Schauder (b_i), soit (λ_i) une suite dans l^1, envoyant $\bigcap_{p \geqslant 1} m_p$ dans l^1. Alors, l'application F définie par la série $(*)$, de G dans B, a pour mesure cylindrique asymptotique, une vraie mesure de probabilité, gaussienne sur B.

Plus précisément, cette mesure gaussienne correspond à « l'espace de Wiener abstrait » $(B' \subset H \subset B)$ (Gross [*2*]), où H est le sous-espace hilbertien de B ayant pour base orthonormée le système $(e_i = \lambda_i b_i)$.

Remarques. — 1) Si μ est une mesure cylindrique sur B dont toutes les « projections » $f \circ \mu$ $(f \in B')$ sont sur $\mathbb{R}$ des mesures d'un des deux types suivants :

(*i*) celle d'une loi stable d'exposant $0 < \alpha \leqslant 1$,

(*ii*) celle d'une loi de Poisson,

alors avec $F(t)$ définie par la formule $(*)$, et h désignant la fonction réciproque de la fonction de répartition de l'un des deux types de lois ci-dessus, le résultat du théorème reste valable, sauf qu'on ne sait pas en général si μ^F est une vraie mesure de probabilité sur B.

2) Dans la construction de $F(t)$, au lieu de considérer les translatées d'une suite complètement équi-répartie par des entiers distincts, on peut considérer une suite de suites équi-réparties linéairement indépendantes.

Chapitre VI

CARACTÉRISATION DES ÉLÉMENTS D'UN ESPACE FONCTIONNEL AYANT UNE MESURE ASYMPTOTIQUE SUR CET ESPACE

1. Caractérisation des fonctions ayant une mesure asymptotique.
(Sur l'espace fonctionnel auquel elle appartient).

Considérons un espace de Banach de (classes de) fonctions réelles, définies sur $\mathbb{R}$, invariant par translation, et qui jouit par rapport au groupe (S_t) des translations des propriétés suivantes : chaque $S_t (t \in \mathbb{R})$ est une isométrie de E, et la représentation $t \rightsquigarrow S_t$ est fortement continue :

$$\| S_t f - f \| \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ces conditions, l'application $(t, f) \rightsquigarrow S_t f$ de $R \times E$ dans E est continue :

$$\begin{aligned} \| S_t f - S_{t_0} f_0 \| &= \| S_t f - S_t f_0 + S_t f_0 - S_{t_0} f_0 \| \\ &\leqslant \| f - f_0 \| + \| S_{t - t_0} f_0 - f_0 \| \to 0 \qquad \text{quand } t \to t_0 \quad \text{et} \quad f \to f_0. \end{aligned}$$

Rappelons qu'un élément f de E définit une mesure (de probabilité) asymptotique sur E, si, pour toute fonction continue et bornée $H(x)$ définie sur E, la limite suivante existe :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H(S_t f) dt = L(H) \quad (1) ;$$

elle est alors égale à l'intégrale de $H(x)$ par rapport à une mesure μ^f de probabilité sur E : $L(H) = \int_E H(x) \mu^f(dx)$ (chap. I, théorème 1).

On se propose de caractériser les éléments f de E qui ont une mesure asymptotique au sens précédent. Pour cela, on va se servir, d'une part, de résultats assez récents sur la théorie de la mesure dans les espaces topologiques, du type de ceux obtenus par Dudley [*1*], et par Topsøe [*1*], et d'autre part, de la théorie des systèmes dynamiques dans les espaces métriques complets séparables de Krylov et Bogolyubov [*1*], Oxtoby et Ulam [*1*], et Fomin [*1*].

Soit Ω un espace métrique complet séparable (espace polonais), soit (S_t) un groupe d'automorphismes de Ω ($t \in \mathbb{R}$) ($S_tS_u = S_{t+u}$, et chaque S_t est une application bijective et bicontinue de Ω dans Ω). On appelle mesure invariante une mesure de probabilité μ sur Ω telle que, pour tout borélien A de Ω, $\mu(S_tA) = \mu(A)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Le résultat que nous allons utiliser est celui-ci : l'ensemble Q, des points f de Ω pour lesquels la limite (1) existe pour tout $H \in \mathscr{C}_b(\Omega)$, vérifie la relation $\mu(Q) = 1$, quelle que soit la mesure invariante μ (Fomin [*1*], théorème 8).

Remarque. — Dans l'étude de Fomin [*1*], le théorème 8 est énoncé pour l'ensemble des points quasi réguliers, c'est-à-dire des points vérifiant la relation (1), plus une condition supplémentaire (de « récurrence »). Un examen de la démonstration de ce théorème montre cependant qu'elle est valable sans cette hypothèse de récurrence, si l'on suppose l'existence d'une mesure invariante, ce que nous ferons lorsque nous utiliserons ce théorème.

THÉORÈME 1. — Soit E un espace de Banach de (classes de) fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, tel que les translations soient toutes des isométries dans E. Alors, un élément f de E vérifiant la condition $S_tf \to f$ quand $t \to 0$ définit une mesure asymptotique sur E si et seulement si il vérifie une condition (C_K) : il existe un ensemble compact K de l'espace E tel que

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \chi_K(S_tf)dt > 0$$

où χ_K désigne l'indicatrice de l'ensemble K.

Démonstration. — Désignons par Ω la fermeture dans E de l'orbite $O(f)$ de f sous le groupe des translations S_t : $O(f) = \{ S_tf, t \in \mathbb{R} \}$. Ω est un espace métrique (pour la métrique induite par la norme de E) complet et séparable, puisque l'ensemble dénombrable S_rf, r parcourant l'ensemble des rationnels est dense dans $O(f)$, donc dans Ω, car $t \rightsquigarrow S_tf$ est continu de $\mathbb{R}$ dans E. L'ensemble Ω est invariant par le groupe (S_t). En effet, soit $p = \lim_{n\to\infty} S_{t_n}f$ un point adhérent à $O(f)$. Alors, on a

$$S_tp = S_t(\lim_{n\to\infty} S_{t_n}f) = \lim_{n\to\infty} S_{t+t_n}f \in \Omega.$$

La condition est nécessaire.

Désignons par μ_T^f la mesure définie comme forme linéaire positive sur l'espace $\mathscr{C}_b(E)$ des fonctions continues et bornées $H(x)$ sur E par la formule :

$$\int_E H(x)d\mu_T^f(x) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} H(S_t f)dt, \qquad H \in \mathscr{C}(E).$$

Dire que f admet une mesure asymptotique sur E revient à dire que la famille des mesures $\{ \mu_T^f, T > 0 \}$ converge étroitement, quand $T \to \infty$, vers une mesure μ^f. D'autre part, les mesures μ_T^f et μ^f sont concentrées sur le fermé Ω (Ω étant fermé, on a $\mu^f(\Omega) \geqslant \limsup_{T\to\infty} \mu_T^f(\Omega) = 1$), les mesures μ_T^f et μ^f sont donc tendues sur Ω (Ω est polonais).

Comme l'application $T \rightsquigarrow \mu_T^f$ est continue de $[1, \infty)$ dans l'espace des mesures de probabilité sur Ω muni de la convergence étroite (vérification immédiate), la famille de mesures de Radon $(\mu_T^f, T \geqslant 1 ; \mu^f)$ sera compacte pour la convergence étroite sur Ω (qui est équivalente, pour elle, à la convergence étroite sur E) (L. Schwartz [*2*]).

Donc, par la réciproque du théorème de Prokhorov, valable dans tout espace métrique complet (F. Tøpsoe [*1*], théorème 9.1 (*iv*)), la famille $(\mu_T^f, T \geqslant 1 ; \mu^f)$ est uniformément tendue. Donc, on a, en particulier : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ un compact K_ε de Ω (ou de E) tel que :

$$\mu_T^f(K_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon \qquad \forall T \geqslant 1.$$

Comme

$$\mu_T^f(K_\varepsilon) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \chi_{K_\varepsilon}(S_t f)dt,$$

il est clair que l'inégalité précédente entraîne la condition (C_K) du théorème.

La condition est suffisante.

Considérons le groupe (S_t) des translations. Chaque S_t est un automorphisme de Ω : S_t et son inverse S_{-t} sont continues de Ω dans Ω. On applique alors un résultat de Oxtoby et Ulam [*1*] : la condition (C_K) est (nécessaire et) suffisante pour qu'il existe une mesure μ (de probabilité) sur Ω, invariante par (S_t). L'ensemble Q des points ayant une mes. as. sur Ω est de mesure $\mu(Q) = 1$, donc Q n'est pas vide. *Ou bien* Q *contient un point de* $O(f)$: dans ce cas, il existe une valeur t_0 telle que $S_{t_0} f \in Q$, et il en sera de même de f. *Ou bien* Q *contient un point* $p \in \Omega - O(f)$; alors on a :

$$p = \lim_{n\to\infty} S_{t_n} f, \qquad \text{pour une suite } (t_n) \subset \mathbb{R}.$$

Considérons la suite $p_n = S_{-t_n}p$. On a

$$\| p_n - f \| = \| S_{-t_n}p - f \| = \| S_{-t_n}f) \| = \| p - S_{t_n}f \| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc f est la limite d'une suite de points ayant une mes. as., p_n.

Le théorème 1 sera alors démontré si on utilise le résultat suivant.

THÉORÈME 2. — Dans les conditions de l'énoncé du théorème 1, l'ensemble des points ayant une mesure asymptotique sur E est fermé dans E.

Démonstration. — Supposons que $f \in E$ soit limite d'une suite de points p_n ayant chacun une mesure asymptotique sur E. On a $\lim\limits_{n \to \infty} S_t p_n = S_t f$, uniformément par rapport à $t \in \mathbb{R}$, puisque $\| S_t p_n - S_t f \| = \| p_n - f \|$.

Nous allons montrer que f admet une mesure asymptotique cylindrique sur E. Pour cela, montrons que pour toute fonction $H(x)$ bornée et uniformément continue sur E, la limite suivante existe :

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H(S_t f)dt.$$

Regardons pour cela le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H(S_t p_n)dt \arrow[r, "n \to \infty"'] \arrow[d, "T \to \infty"] & \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H(S_t f)dt \arrow[d, dash, dashed] \\
\int H d\mu^{p_n} & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

La convergence dans la première ligne, quand $n \to \infty$, est uniforme par rapport à T (puisque H est uniformément continue). Il est alors classique que, pour $T \to \infty$, $\frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} H(S_t f)dt$ converge aussi vers une limite $\left(\text{qui est égale à } \lim\limits_{n \to \infty} \int H d\mu^{P_n} \right)$.

En prenant pour H une fonction de la forme $H_{u,\xi}(x) = e^{iu\langle x,\xi \rangle}$ (ξ quelconque dans le dual E' de E, u quelconque dans $\hat{\mathbb{R}}$), on voit, en combinant le théorème 1 du chapitre V et le théorème 2 du chapitre I, que les mesures μ_T^f convergent cylindriquement ($T \to \infty$) vers une mesure cylindrique ν, sur E.

Nous allons maintenant montrer, en utilisant des résultats de Dudley (Dudley [*1*]), que toute suite $(\mu_{T_j}^f)$ ($T_j \to \infty$) converge étroitement sur E.

Supposons ceci démontré et désignons par μ_0 la mesure de probabilité limite. Si $\tilde{\mu}_0$ désigne la mesure cylindrique définie par μ_0, on a évidemment $\tilde{\mu}_0 = \nu$. Comme l'application qui, à une mesure, lui associe « sa » mesure cylindrique est injective (Schwartz [*1*]), la mesure μ_0 est indépendante de la suite (T_j). L'espace des mesures (positives finies) sur E (espace métrique), muni de la convergence étroite, étant métrisable (Parthasarathy [*1*]), ce dernier résultat montre que μ_T^f converge étroitement vers μ_0, quand $T \to \infty$. Le théorème sera donc démontré si l'on peut montrer que toute suite $(\mu_{T_j}^f)$ $(T_j \to \infty)$ est étroitement convergente. D'après l'étude de Dudley (Dudley [*1*], théorème 9), il suffira de montrer que, h désignant un élément de l'espace BL(E) des fonctions complexes bornées et lipchitziennes sur E, muni de la norme

$$\| h \|_{BL} = \| h \|_\infty + \sup_{x \neq y \in E} \frac{| h(x) - h(y) |}{\| x - y \|} \equiv \| h \|_\infty + \| h \|_L ,$$

la suite $\{ \mu_{T_j}^f(h) \}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ est une suite de Cauchy, uniformément par rapport à h variant dans la boule $\{ \| h \|_{BL} \leqslant 1 \}$.

Pour cela, remarquons que, puisque $h \in BL(E)$, l'on a

$$| h(S_t f) - h(S_t p_n) | \leqslant \| h \|_L \| S_t f - S_t p_n \|_E = \| h \|_L \| f - p_n \|_E$$

(chaque S_t est une isométrie). D'où

$$| m_T(h \circ f) - m_T(h \circ p_n) | \leqslant m_T(h \circ f - h \circ p_n) \leqslant \| h \|_L \| f - p_n \|_E , \qquad \forall T$$

(en posant (abusivement),

$$m_T(h \circ f) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(S_t f) dt) ;$$

d'où, en désignant par d_{jk} la différence $m_{T_j}(h \circ f) - m_{T_k}(h \circ f)$, qui se décompose en

$$d_{jk} = m_{T_j}(h \circ f) - m_{T_j}(h \circ p_n) + m_{T_j}(h \circ p_n) - m_{T_k}(h \circ p_n) + m_{T_k}(h \circ p_n) - m_{T_k}(h \circ f)$$

l'inégalité

$$| d_{jk} | \leqslant 2 \| h \|_L \| f - p_n \|_E + | m_{T_j}(h \circ p_n) - m_{T_k}(h \circ p_n) | .$$

Choisissons $n = n_0(\varepsilon)$ pour que le premier terme du second membre soit majoré par $\varepsilon/2$. Comme, pour chaque n fixé, par exemple pour $n = n_0 = n_0(\varepsilon)$ les mesures $(\mu_{T_j}^{P_{n_0}})$ $(j = 1, 2, \ldots)$ convergent étroitement vers la mesure $\mu^{P_{n_0}}$, l'on voit, en appliquant un résultat de Dudley (Dudley [*1*], théorème 6), que les nombres $\{ \mu_{T_j}^{P_{n_0}}(h) \}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ convergent vers

$\mu^{P_{n_0}}(h)$ uniformément par rapport à $h \in \{ \| h \|_{BL} \leqslant 1 \}$. Donc, pour tout j, $k \geqslant n_1(\varepsilon)$, on a
$$| m_{T_j}(h \circ p_{n_0}) - m_{T_k}(h \circ p_{n_0}) | < \varepsilon/2$$
pour tout $h \in \{ \| h \|_{BL} \leqslant 1 \}$.

En résumé, on a bien $d_{jk} = d_{jk}(h) \to 0$ quand j et $k \to \infty$, uniformément par rapport à $h \in \{ \| h \|_{BL} \leqslant 1 \}$.

On obtient comme corollaire le

THÉORÈME 3. — Soit E un espace de Banach de (classes de) fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, de norme invariante par le groupe (S_t) des translations, et tel que la représentation $t \rightsquigarrow S_t$ soit fortement continue. Alors, un élément f de E admet une mesure asymptotique sur E si et seulement si f vérifie une condition (C_K).

2. Exemples d'espaces auxquels s'applique le théorème 1.

a) L'espace $\mathcal{M}^p(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$. Le théorème 3 s'applique au sous-espace (de Banach) $\mathcal{M}_c^p$, constitué des éléments $\mathcal{M}^p$-continus.

b) L'espace S^p de Stepanoff. C'est l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$, telles que
$$\| f \|_{S^p} = \sup_{u \in \mathbb{R}} \left(\int_u^{u+1} | f(t) |^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

C'est un espace de Banach (deux fonctions égales presque partout étant identifiées). La norme est invariante par translation (Besicovitch [*1*]).

c) Le théorème 3 s'applique à l'espace $L^p(\mathbb{R}\,;\,\mathcal{M})$ $(1 \leqslant p < \infty)$, où m désigne la mesure de Lebesgue.

d) Un autre exemple de cas où s'applique le théorème 1 est celui de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, espace des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme, en prenant pour f une fonction (bornée et) uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Nous allons appliquer les théorèmes 1 et 3 dans un cas particulier pour trouver des conditions suffisantes pour qu'une fonction $f(t)$ bornée et uniformément continue admette une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION. — Si Λ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, on désigne par *densité supérieure* de Λ la quantité
$$\limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \Lambda} dt = \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \operatorname{mes}(X_T \cap \Lambda)$$
où « mes » désigne la mesure de Lebesgue.

La condition (C_K), qui s'écrit encore

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{X_T \cap \{t : S_t f \in K\}} dt > 0,$$

s'énonce alors sour la forme suivante : il existe un compact K et un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}$ de densité supérieure > 0, tels que, pour tout $t \in \Lambda$, on a $S_t f \in K$.

Considérons le cas d'une fonction $f(t)$ réelle bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout n, désignons par π_n un système constitué par une partition finie $\{ M_1, \ldots, M_n \}$ formée de parties mesurables de $\mathbb{R}$, et par n points quelconques $s_1 \in M_1, \ldots, s_n \in M_n$.

THÉORÈME 4. — Soit $f(t)$ une fonction réelle, bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Alors, f définit une mesure asymptotique sur $\mathscr{C}(R)$ si et seulement s'il existe un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}$, de densité supérieure > 0 tel que : $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \pi_n = \pi_n(\varepsilon)$, avec

$$\sup_{t\in\Lambda} \sup_{s\in M_i} | f(t + s_i) - f(t + s) | < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Si tel est le cas, pour toute mesure de Radon bornée ν sur $\mathbb{R}$, la convoluée $f * \nu$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$, et il s'ensuit, en particulier, que pour tout n, et tous $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \subset \mathbb{R}$, l'application $t \rightsquigarrow [f_{\tau_1}(t), \ldots, f_{\tau_n}(t)]$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. — Un sous-ensemble borné B de l'espace des fonctions continues et bornées $\mathscr{C}(R)$ muni de la norme uniforme est relativement compact (Dunford et Schwartz, t. 1, th. 5) si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une partition (mesurable) finie $(M_1, \ldots, M_n)$ de $\mathbb{R}$, et des points $s_i \in M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, tels que la condition suivante soit vérifiée :

$$\sup_{g\in B} \sup_{s\in M_i} | g(s_i) - g(s) | < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Prenons pour B l'ensemble $O_\Lambda(f) = \{ S_t f, t \in \Lambda \}$ (voir remarque sur la condition (C_K) précédant le théorème).

Si la condition énoncée dans le théorème est vérifiée, alors, en prenant pour K l'adhérence de B dans $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, on voit que la condition (C_K) est vérifiée, et on applique le théorème 2. Réciproquement, si f admet une mesure asymptotique sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, alors il existe un compact K (de Ω, donc de $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$), et un ensemble $\Lambda \subset \mathbb{R}$ de densité supérieure > 0, tel que pour tout $t \in \Lambda$, $S_t f \in K$ (c'est la condition C_K). Alors, $O_\Lambda(f)$ est un ensemble relativement compact de $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, et la condition de l'énoncé du théorème est vérifiée.

Si cette condition est remplie, f définit donc une mesure asymptotique sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$. f admet alors en particulier une mesure asymptotique cylindrique sur $\mathscr{C}(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que pour tout élément $\xi \in [\mathscr{C}(\mathbb{R})]'$, la fonction

$$t \rightsquigarrow \langle f(t + .), \xi \rangle_{\mathscr{C},\mathscr{C}'}$$

admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

Prenons pour ξ la mesure formée de masses ponctuelles aux n points $\tau_2, \ldots, \tau_n \subset \mathbb{R}$:

$$v = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta_{\tau_i} \qquad (u_i \in \mathbb{R}).$$

On voit que la fonction $t \rightsquigarrow \sum_{i=1}^{n} \langle f(t + s), \delta_{\tau_i}(s) \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i . f(\tau_i + t)$ a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. Comme cela est vrai pour toutes valeurs de $u_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$, on voit (corol. 1, th. 2, chap. I) que $t \rightsquigarrow [f_{\tau_1}(t), \ldots, f_{\tau_n}(t)]$ a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^n$.

3. Structure algébrique de l'ensemble des éléments ayant une mesure asymptotique sur E.

Considérons l'ensemble $\mathscr{T}(E)$ de tous les éléments de E, ayant une mesure asymptotique sur E. En ce qui concerne sa structure algébrique, on a le résultat suivant.

THÉORÈME 6. — Soit E un espace de Banach de (classes de) fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, de norme invariante par le groupe (S_t) des translations, et tel que la représentation $t \rightsquigarrow S_t$ soit fortement continue. L'ensemble $\mathscr{T}(E)$ des éléments de E qui ont une mes. as. sur E forment alors un sous-espace vectoriel fermé de E. Si E est une algèbre de fonctions, $\mathscr{T}(E)$ est une sous-algèbre de Banach de E.

Démonstration. — D'après le théorème 3, $f \in E$ a une mes. as. (sur E) si et seulement si f vérifie une condition (C_K), qui est équivalente à une condition plus forte, d'après la partie « condition nécessaire » de la démonstration du théorème 1. Soient donc f^1 et f^2 deux éléments de E appartenant à $\mathscr{T}(E)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ensembles compacts K_ε^1, K_ε^2 de E tels que :

$$\inf_{T \geqslant 1} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi_{K_\varepsilon^i}(S_t f^i) dt \geqslant 1 - \varepsilon \qquad (i = 1, 2)$$

donc, en posant

$$\Lambda_\varepsilon^i = \{ t \in \mathbb{R} : S_t f^i \in K_\varepsilon^i \} \qquad (i = 1, 2)$$

on aura

$$\lambda(\Lambda_\varepsilon^i) \equiv \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \chi_{\Lambda_\varepsilon^i}(t) dt \geqslant 1 - \varepsilon \qquad (i = 1, 2)$$

Considérons le sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$\Lambda_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon^1 \cap \Lambda_\varepsilon^2$$

Si $t \in \Lambda_\varepsilon$, on a à la fois $S_t f^1 \in K_\varepsilon^1$ et $S_t f^2 \in K_\varepsilon^2$, et alors

$$S_t(f^1 + f^2) \in K_\varepsilon^1 + K_\varepsilon^2$$

et, dans le cas où E est une algèbre de fonctions (avec le produit ponctuel)

$$S_t(f^1 . f^2) \in K_\varepsilon^1 . K_\varepsilon^2 \qquad \text{(notations évidentes).}$$

Nous allons voir qu'il est impossible que, pour tout $\varepsilon > 0$, on ait $\lambda(\Lambda_\varepsilon) = 0$. En effet, considérons la décomposition

$$\Lambda_\varepsilon^1 = \Lambda_\varepsilon^1 \cap \Lambda_\varepsilon^2 + \Lambda_\varepsilon^1 \cap (\Lambda_\varepsilon^2)^c ;$$

elle donne :

$$\lambda(\Lambda_\varepsilon^1) \leqslant \lambda(\Lambda_\varepsilon) + \lambda((\Lambda_\varepsilon^2)^c)$$

(λ est une fonction d'ensemble sous-additive et croissante). D'où il s'ensuit que, si $\lambda(\Lambda_\varepsilon) = 0$, alors

$$\lambda((\Lambda_\varepsilon^2)^c) \geqslant 1 - \varepsilon$$

ou encore :

$$\limsup_{T \to \infty} \mu_T^{f^2}((K_\varepsilon^2)^c) \geqslant 1 - \varepsilon \tag{1}$$

puisque $\Lambda_\varepsilon^2 = \{ t : S_t f^2 \in K_\varepsilon^2 \}$.

D'autre part, on a vu plus haut que :

$$\inf_{T \geqslant 1} \mu_T^{f^2}(K_\varepsilon^2) \geqslant 1 - \varepsilon$$

donc

$$\liminf_{T \to \infty} \mu_T^{f^2}(K) \geqslant 1 - \varepsilon \tag{2}$$

On aura donc en même temps les inégalités (1) et (2), ce qui est absurde avec un $\varepsilon < \frac{1}{2}$. En effet, comme, pour tout T, on a :

$$\mu_T^{f^2}(K) + \mu_T^{f^2}(K^c) = 1$$

on doit avoir

$$\liminf_{T \to \infty} \mu_T^{f^2}(K) = \liminf_{T \to \infty} [1 - \mu_T^{f^2}(K^c)] = 1 + \liminf_{T \to \infty} (- \mu_T^{f^2}(K^c))$$
$$= 1 - \limsup_{T \to \infty} \mu_T^{f^2}(K^c) \leqslant \varepsilon \qquad \text{(d'après (1)).}$$

Il existe donc un $\varepsilon > 0$ tel que $\lambda(\Lambda_\varepsilon) > 0$.

Comme il est vu plus haut que pour tout $t \in \Lambda_\varepsilon$, on a

$$S_t(f^1 + f^2) \in K_\varepsilon^1 + K_\varepsilon^2$$

(et $S_t(f^1.f^2) \in K_\varepsilon^1.K_\varepsilon^2$ dans le cas d'une algèbre E), on voit bien que les éléments $f^1 + f^2$ (et $f^1.f^2$) de E vérifient une condition (C_K) (avec, respectivement, les compacts $K_\varepsilon^1 + K_\varepsilon^2$, et $K_\varepsilon^1.K_\varepsilon^2$). Donc, ils admettent, d'après le théorème 3, une mesure asymptotique sur E.

Que λf appartienne à $\mathscr{T}(E)$ pour tout réel λ, si $f \in \mathscr{T}(E)$, est évident. L'espace vectoriel $\mathscr{T}(E)$ est fermé dans E, d'après le théorème 2. Le théorème 6 est démontré.

L'espace $\mathscr{T}(E)$ contient l'espace des éléments presque-périodiques de E, puisque ceux-ci ont une mesure asymptotique (de Radon) sur E.

Dans le cas de l'algèbre E des fonctions réelles bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}$ (E muni de la norme uniforme), on obtient le

COROLLAIRE. — Si E désigne l'espace des fonctions réelles bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme, l'espace $\mathscr{T}(E)$ est une sous-algèbre de Banach de E, contenant l'algèbre des fonctions réelles presque-périodiques de Bohr.

CHAPITRE VII

THÉORÈMES DE CONVERGENCE

1. Fonctions de la classe Φ_∞.

Nous nous proposons de démontrer certains résultats de convergence concernant des intégrales (au sens de la norme de l'espace $\mathscr{M}^2$) de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$, et ayant la propriété suivante : pour tout entier positif n, tout système de nombres réels $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ l'application

$$F(t) = [f_{\tau_1}(t), \ldots, f_{\tau_n}(t)]$$

de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^n$. Nous noterons Φ_∞ la classe de toutes les fonctions f ayant la propriété précédente.

Nous avons déjà rencontré des fonctions de cette classe, qui sont en plus bornées et uniformément continues sur $\mathbb{R}$, au chapitre VI (théorème 4). D'autres exemples d'éléments de Φ_∞ sont connus :

a) α) Les fonctions uniformément faiblement presque-périodiques d'Eberlein (Eberlein [*1*]). Ces fonctions forment une algèbre, et sont toutes bornées et moyennables ; en appliquant le corollaire 2 du théorème 2, chapitre I, on voit que cette algèbre de fonctions est contenue dans Φ_∞.

β) L'algèbre des fonctions uniformément presque-périodiques de Bohr est contenue dans Φ_∞ pour les mêmes raisons.

b) Les fonctions complètement pseudo-aléatoires (Vo-Khac-Khoan [*1*]). Elles sont en particulier pseudo-aléatoires (centrées ou décentrées), ainsi que chacune de leurs puissances entières positives. Elles appartiennent à la classe Φ_∞ pour les mêmes raisons qu'en *a*).

Des exemples de fonctions complètement pseudo-aléatoires sont données par

$$f(t) = g[\varphi(\hat{t})]$$

où g est une fonction périodique de période 1, Riemann-intégrable, et φ est un polynôme (dit « polynôme de Weyl »), dont les coefficients vérifient une condition d'indépendance de nature arithmétique.

Les théorèmes de convergence qui suivent concernent uniquement des fonctions pseudo-aléatoires (de classe Φ_∞) (et non pas les fonctions presque-périodiques), parce qu'il porte sur les fonctions (de classe Φ_∞), ayant (donc) une autocorrélation

$$\gamma(h) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)f(t+\tau)dt$$

dont la transformée de Fourier inverse (qui est toujours une mesure bornée sur $\mathbb{R}$) est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (on dit que γ admet une densité spectrale), tandis que l'autocorrélation d'une fonction presque-périodique étant elle-même une fonction presque-périodique de τ, a une transformée de Fourier inverse qui est étrangère à la mesure de Lebesgue.

Avant le théorème, nous allons introduire la notion suivante.

2. **Processus stationnaire associé à une fonction $f \in \Phi_\infty$.**

a) Soit f une fonction de la classe Φ_∞ ; alors, pour tout n, et tout système de nombres réels $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, la mesure asymptotique de la fonction $t \rightsquigarrow [f_{\tau_1}(t), \ldots, f_{\tau_n}(t)]$ existe, soit $\mu_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$, sur $\mathbb{R}^n$.

Ces mesures ont la propriété d'invariance suivante : pour tout $\tau \in \mathbb{R}$

$$\mu_{\tau_1,\ldots,\tau_n} = \mu_{\tau_1+\tau,\ldots,\tau_n+\tau}$$

En effet, pour toute fonction $h(x_1, \dots, x_n)$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h d\mu_{\tau_1,\dots,\tau_n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h[f(\tau_1 + t), \dots, f(\tau_n + t)]dt$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} h d\mu_{\tau+\tau_1,\dots,\tau+\tau_n} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h[f_{\tau_1}(\tau + t), \dots, f_{\tau_n}(\tau + t)]dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T+\tau}^{T+\tau} h[f_{\tau_1}(u), \dots, f_{\tau_n}(u)]du.$$

En posant $h[f_{\tau_1}(u), \dots, f_{\tau_n}(u)] = \varphi(u)$ $(\in L^\infty(\mathbb{R}))$, on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} h d\mu_{\tau_1,\dots,\tau_n} - \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_{\tau+\tau_1,\dots,\tau+\tau_n} \right|$$

$$= \left| \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \left\{ \int_{-T}^{T} \varphi(t)dt - \int_{-T+\tau}^{T+\tau} \varphi(t)dt \right\} \right| \leqslant \| \varphi \|_\infty \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} 2 | \tau | = 0.$$

On a donc un système de mesures $\mu_{\tau_1,\dots,\tau_n}$ $(n \geqslant 1, \tau_i \in \mathbb{R})$, qui est « stationnaire ».

b) Il est facile de vérifier que ce système est compatible (Loeve [*1*]). Donc, le théorème de prolongement de Kolmogorov (Loeve [*1*]) permet d'affirmer qu'il existe sur l'espace $(\Omega, \mathscr{A}) = \left(\prod_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{R}_t, \bigotimes_{t\in\mathbb{R}} \mathscr{B}_t \right)$ une mesure de probabilité P (unique), telle que les $\mu_{\tau_1,\dots,\tau_n}$ en soient les projections : si $\pi_{\tau_1,\dots,\tau_n}$ est l'application coordonnée

$$\omega \rightsquigarrow [\omega(\tau_1), \dots, \omega(\tau_n)] \equiv [X_{\tau_1}(\omega), \dots, X_{\tau_n}(\omega)]$$

de Ω dans $\mathbb{R}^n$, on a

$$\pi_{\tau_1,\dots,\tau_n} \circ P = \mu_{\tau_1,\dots,\tau_n}.$$

c) Considérons *le processus strictement stationnaire*, ayant pour espace de base $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, et pour variables aléatoires $X_t(\omega) = \omega(t)$.

On appellera (X_t) le *processus aléatoire associé à la fonction* $f \in \Phi_\infty$. D'après le théorème 4 du chapitre I, la covariance de ce processus est égale à l'autocorrélation de f :

$$E[X_s X_{s+\tau}] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)f(t + \tau)dt = \gamma_f(\tau) = \gamma(\tau).$$

d) Considérons le sous-espace vectoriel (réel) fermé $\mathscr{U}_f$ de $\mathscr{M}^2$ engendré par les translatées de f. $\mathscr{U}_f$, muni du produit scalaire

$$\langle g, k \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} g(t)k(t)dt,$$

est un espace hilbertien (Vo-Khac-Khoan [*1*]).

Considérons maintenant l'*application linéaire* U, définie sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{U}_0$ de $\mathcal{M}^2$ engendré par les translatées $\{ f\tau \,;\, \tau \in \mathbb{R} \}$ de f ($\mathcal{U}_0$ est dense dans $\mathcal{U}_f$), à valeurs dans l'espace des variables aléatoires $L^0(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui, à $f_\tau \in \mathcal{U}_0$, fait correspondre la variable aléatoire $X_\tau(\omega)$. Nous allons voir que U applique $\mathcal{U}_0$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et que U est une isométrie pour les normes hilbertiennes respectives de $\mathcal{U}_f$ et de $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$. En effet, si

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i . f_{\tau_i} \in \mathcal{U}_0,$$

on a

$$\| F \|^2_{\mathcal{U}_f} = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i . f_{\tau_i} \right\|^2_{\mathcal{M}^2} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \sum_{i=1}^{n} c_i . f_{\tau_i}(t) \right|^2 dt.$$

D'après l'hypothèse faite sur $f : f \in \Phi^{(\infty)}$, tout élément F de $\mathcal{U}_0$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$ (corol. 1 du th. 2, chap. I), et, d'après les propriétés des moments des mesures asymptotiques, on a

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} | F(t) |^2 dt = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu^F(x).$$

Par ailleurs, la mesure μ^F est égale à la loi de la variable aléatoire $U(F) = \sum_{i=1}^{n} c_i X_{\tau_i}(\omega)$, puisque la fonction caractéristique de cette loi est donnée par :

$$\varphi(s) = E \{ e^{is\sum_1^n c_i X_{\tau_i}} \} = \int_\Omega e^{is\sum_1^n c_i X_{\tau_i}(\omega)} P(d\omega)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{is\sum_{i=1}^n c_i x_i} \mu_{\tau_1,\dots,\tau_n}(dx_1, \dots, dx_n) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{is\sum_{i=1}^n c_i f_{\tau_i}(t)} dt$$

(cette dernière égalité résultant de la définition même de la mesure asymptotique $\mu_{\tau_1,\dots,\tau_n}$)

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{isF(t)} dt$$

= fonction caractéristique de la mesure asymptotique μ^F.

On a donc :

$\| F \|^2_{\mathcal{U}_f}$ = moment du second ordre de la variable aléatoire réelle U(F) $= \| U(F) \|^2_{L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)}$.

Cette application linéaire isométrique de $\mathcal{U}_0$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se prolonge en une application linéaire isométrique unique, que nous noterons encore U, de tout $\mathscr{U}_f$ sur un sous-espace fermé $\mathscr{H}$ de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dans cette application, à toute combinaison linéaire $F = \sum_{i=1}^{n} c_i f_{\tau_i}$ des $\{ f_\tau, \tau \in \mathbb{R} \}$, correspond la combinaison linéaire $Y = \sum_{i=1}^{n} c_i X_{\tau_i}$ des variables aléatoires X_τ sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

c) Si $f \in \Phi_\infty$ est $\mathscr{M}^2$-continue, l'intégrale sur (O, T) de l'application continue $\tau \rightsquigarrow f_\tau$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}^2$, soit $\int_0^T f_\tau d\tau$ (« intégrale au sens de la norme de $\mathscr{M}^2$ »), est $\mathscr{M}^2$-limite de combinaisons linéaires de la forme $F_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^n f_{\tau_i^n}$.

Le processus stationnaire (réel) (X_t) correspondant à cette $f \in \Phi_\infty$ (défini au *c*)), est continu en moyenne quadratique, puisque, par application du théorème 4 du chapitre I, on a :

$$E(X_{t+s} - X_t)^2 = M(f_{t+s} - f_t)^2 = \| f_{t+s} - f_t \|^2_{\mathscr{M}^2} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc, l'intégrale de l'application continue $\tau \rightsquigarrow X_\tau$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$: $\int_0^T X_\tau d\tau$ est L^2-limite de combinaisons linéaires de la forme

$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^n X_{\tau_i^n} = U(F_n).$$

Comme l'opérateur U est continu, on obtient finalement que l'intégrale « au sens de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ » : $\int_0^T X_\tau d\tau$ est l'image par U de l'intégrale $\int_0^T f_\tau d\tau$.

f) L'intégrale $Y_T = \int_0^T f_\tau d\tau$ étant $\mathscr{M}^2$-limite d'éléments de la forme $F_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^n f_{\tau_i^n}$, la mesure asymptotique de Y_T est la limite étroite des mesures asymptotiques des éléments F_n, mesure dont on a montré l'égalité avec la loi de la variable $U(F_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i^n X_{\tau_i^n}$(2(*d*)). Comme les $U(F_n)$ convergent dans $L^2(\Omega)$ vers $Z_T = \int_0^T X_u du$, on voit que la mesure asymptotique de Y_T est finalement égale à la loi de Z_T.

3. Un théorème de convergence.

a) Rappel sur le théorème central limite pour les processus stochastiques stationnaires. — On dit (Rozanov [*1*]) que le théorème central limite est applicable au processus (strictement stationnaire, réel) X(t) (d'espace de base (Ω, $\mathscr{A}$, P)), si, en posant

$$\eta(s, t) = \frac{1}{(t-s)^{1/2}}\left[\int_s^t X(u)du - E\left(\int_s^t X(u)du\right)\right]$$

où $\int_s^t X(u)du$ est une intégrale en moyenne quadratique (c'est-à-dire l'intégrale de la fonction supposée continue $u \rightsquigarrow X(u)$ de $\mathbb{R}$ dans $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$), et où E désigne l'espérance mathématique, on a :

α) la limite $\lim_{t-s\to\infty} E[\eta(S, t)^2] = \sigma^2$ existe, et

β) la loi de la variable aléatoire $\eta(s, t)$ tend, lorsque $t - s \to \infty$, vers la loi gaussienne centrée de variance σ.

Dans Rozanov [*1*], il est établi une condition suffisante simple (théorème 11.2, lemme 10.6 et inégalité 10.4) pour qu'un processus X(t) obéisse au théorème central limite. Cette condition porte sur la covariance du processus, et s'énonce comme suit : la mesure spectrale (transformée de Fourier de la covariance) doit avoir une densité (spectrale) $\varphi(\lambda)$, laquelle devant vérifier la *condition* (C_k) *suivante.*

Il existe une fonction sommable $\varphi_0(\lambda)$, de transformée de Fourier nulle sur un demi-axe réel ($t \geqslant 0$), telle que le rapport $\varphi/\varphi_0(\lambda)$ soit de module $\geqslant \varepsilon > 0$, et admette une dérivée k-ième bornée. Sous la condition (C_k) (pour un $k \geqslant 2$), et si, de plus, le processus (X_t) admet un moment d'ordre $\delta > 2 + \dfrac{4}{k-1}$, alors il est démontré dans Rozanov que le processus (X_t) obéit au théorème central limite.

b) En remarquant maintenant que la covariance du processus (X_t) est égale à la corrélation $\gamma(\tau)$ de la fonction $f(t)$, et que la mesure asymptotique de $\dfrac{1}{T^{1/2}}\left[\int_0^T f_\tau d_\tau - Tm\right]$ (m désignant la moyenne temporelle de $f(t)$), est égale à la loi de la variable aléatoire

$$\frac{1}{T^{1/2}}\left[\int_0^T X_u du - E\left(\int_0^T X_u du\right)\right],$$

on obtient le résultat de convergence suivant.

THÉORÈME 1. — Soit $f(t)$ une fonction réelle ayant la propriété suivante : pour tout n et tous $(\tau_1, \ldots, \tau_n) \subset \mathbb{R}$, l'application $t \rightsquigarrow [f_{\tau_1}(t), \ldots, f_{\tau_n}(t)]$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que la corrélation de f ait une densité spectrale φ vérifiant la condition (C_k) $(k \geqslant 2)$.

Dans ces conditions, la mesure asymptotique de l'élément de $\mathcal{M}^2$:

$$\frac{1}{T^{1/2}} \int_0^T f_\tau d_\tau - mT^{1/2} \qquad (m = \text{moyenne de } f(t)),$$

converge étroitement, quand $T \to \infty$, vers une mesure gaussienne centrée sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. — Il reste seulement à vérifier que le processus (X_t), correspondant à $f(t)$ dans la construction précédant le théorème, a un moment d'ordre $\delta > 2 + \dfrac{4}{k-1}$. Or, l'hypothèse $f \in \Phi^{(\infty)}$ entraîne que $f \in \mathcal{M}p$, $\forall p \geqslant 1$. Donc, la variable aléatoire X_τ, dont la loi est égale à la mesure asymptotique de f, a un moment d'ordre p, pour tout $p \geqslant 1$.

4. Théorème de convergence vers la mesure du mouvement brownien.

a) α) Considérons une fonction réelle $f \in \Phi_\infty$, dont nous supposons (pour simplifier), la moyenne $M(f)$ nulle. Si f est $\mathcal{M}^2$-continue (par exemple si sa fonction de corrélation est continue à l'origine), alors on a vu que chaque intégrale (au sens de la $\mathcal{M}^2$-norme)

$$\int_0^X f_\tau d\tau$$

est $\mathcal{M}^2$-limite de combinaisons linéaires de la forme $F_n = \sum_{i=1}^{n} c_i^n f_{\tau_i^n}$, et qu'elle admet (en tant que $\mathcal{M}^2$-fonction), une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. En particulier, la moyenne $M\left(\displaystyle\int_0^X f_\tau d\tau \right)^2 = \sigma_X^2$ existe.

Considérons n points $(s_1, \ldots, s_n)$ de l'intervalle $[0, 1]$, puis l'élément de $\mathcal{M}^2 \times \ldots \times \mathcal{M}^2$:

$$\left(\frac{1}{\sigma_X} \int_0^{s_1 X} f_\tau d\tau, \ldots, \frac{1}{\sigma_X} \int_0^{s_n X} f_\tau d\tau \right);$$

c'est une (classe d') application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrons qu'elle admet une mesure asymptotique $\mu^{s_1, \ldots, s_n}$ sur $\mathbb{R}^n$; d'après le corollaire 1 du théorème 2, chapitre I, il suffit pour cela de montrer que pour tout système $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de nombre réels, l'élément de $\mathcal{M}^2$:

$$\lambda_1 \int_0^{s_1 X} f_\tau d\tau + \ldots + \lambda_n \int_0^{s_n X} f_\tau d\tau$$

admet une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$. Or, chacune des intégrales $\int_0^{s_k X} f_\tau d\tau$ étant $\mathcal{M}^2$-limite d'éléments de $\mathcal{M}^2$ de la forme

$$F^n(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i^n(k) f_{\tau_i^n(k)},$$

l'on voit que la somme est $\mathcal{M}^2$-limite de combinaisons linéaires de $\{ f_\tau : \tau \in [0, X] \}$, ce qui montre bien, puisque $f \in \Phi_x$, que cette somme a une mesure asymptotique sur $\mathbb{R}$.

β) On se propose maintenant de montrer qu'il existe, pour tout $X > 0$, sur l'espace $\mathscr{C}[0, 1]$ des fonctions continues sur $[0, 1]$, une mesure de probabilité P_X, dont chaque projection $P_X^{s_1, \ldots, s_n}$ sur $\mathbb{R}^n$, image de P_X par l'application $\varphi \rightsquigarrow [\varphi(s_1), \ldots, \varphi(s_n)]$ définie sur $\mathscr{C}[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est exactement égale à la mesure (asymptotique) $\mu^{s_1, \ldots, s_n}$ considérée en α).

Pour montrer l'existence d'une telle mesure P_X sur $\mathscr{C}[0, 1]$, il suffit, d'après le critère dû à Kolmogorov (Prokhorov [*1*]), de montrer que le système des mesures μ^{s_1, s_2} $(s_i \in [0, 1])$ vérifie la condition :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} | x_2 - x_1 | \, d\mu_X^{s_1, s_2}(x_1, x_2) \leqslant k \, | s_2 - s_1 |^a$$

pour un nombre $\alpha > 1$, une constante k et un nombre $a > 0$. Nous allons vérifier cette condition pour $a = \alpha = 2$. Il s'agit donc de majorer

$$\delta_X(s_1, s_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_2 - x_1)^2 d\mu_X^{s_1, s_2}$$

par $k(s_2 - s_1)^2$. On a :

$$\delta_X(s_1, s_2) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2) d\mu_X^{s_1, s_2} ;$$

en appliquant aux moments figurant au second membre de l'égalité précédente les théorèmes sur les moments du chapitre I, on obtient, en posant

$$F_s^X = \frac{1}{\sigma_X} \int_0^{sX} f_\tau d\tau,$$

l'égalité

$$\delta_X(s_1, s_2) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} (F_{s_2}^X(t) - F_{s_1}^X(t))^2 dt.$$

Donc

$$\delta_X(s_1, s_2) = \| F_{s_2}^X - F_{s_1}^X \|_{\mathscr{M}^2}^2 = \left\| \frac{1}{\sigma_X} \int_{s_1X}^{s_2X} f_\tau d\tau \right\|_{\mathscr{M}^2}^2 \leqslant \frac{1}{\sigma_X^2}(s_2 - s_1)^2 X^2 \| f \|_{\mathscr{M}^2}^2.$$

L'assertion concernant l'existence de la mesure P_X sur $\mathscr{C}[0, 1]$ est démontrée.

b) Considérons le processus strictement stationnaire (ξ_t), d'espace de base $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ (introduit en 2-*c*)) associé à la fonction f. On montre, en faisant appel à l'isométrie U de $\mathscr{U}_f$ dans $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$ comme en (2-f)), que chacune des mesures $\mu^{s_1,\dots,s_n}$ ($s_i \in [0, 1]$) considérée en *a*), est égale à la mesure sur $\mathbb{R}^n$ qui est la loi de la variable aléatoire à n dimensions

$$(Y_{s_1}^X, \dots, Y_{s_n}^X)$$

où $Y_s^X = \dfrac{1}{\sigma_X} \displaystyle\int_0^{sX} \xi_t dt$ (intégrale au sens de $L^2(\Omega, \mathscr{A}, P)$). On montre aussi de la façon habituelle que $\sigma_X^2 = E\left[\left(\displaystyle\int_0^X \xi_t dt\right)^2\right]$. Autrement dit, les différentes mesures $\mu^{s_1,\dots,s_n}$ ($s_i \in [0, 1]$) constituent les « lois de répartition de dimension finie » du processus Y_s^X ($s \in [0, 1]$). Ce processus définit sur $\mathscr{C}[0, 1]$ une mesure de probabilité, qui n'est autre que la mesure P_X considérée en *a*) (puisqu'une mesure de probabilité sur un Banach, ici $\mathscr{C}[0, 1]$, est déterminée par sa mesure cylindrique).

L'identification précédente permet d'utiliser les résultats démontrés par (Davidov [*1*]) concernant la convergence du processus $(Y_s^X, s \in [0, 1])$ vers le mouvement brownien lorsque $X \to \infty$, pour obtenir la convergence vers la mesure W de Wiener sur $\mathscr{C}[0, 1]$, des mesures P_X ($X \to \infty$). La condition suffisante de convergence démontrée dans (Davidov [*1*]) peut par ailleurs facilement être transformée en une condition portant sur la densité spectrale $\varphi(\lambda)$ du processus (ξ_t), si l'on utilise des résultats de (Rozanov [*1*], lemme 10.6 et inégalité 10.4).

De cette façon, on arrive au théorème suivant, qui partage avec le théorème 1 le fait de ne concerner que les fonctions $f(\in \Phi_\infty)$ qui sont pseudo-aléatoires, puisqu'il suppose que la corrélation de f admet une densité spectrale φ.

THÉORÈME 2. — Soit $f(t)$ une fonction réelle de la classe Φ_∞, telle que la moyenne $M(f)$ soit nulle et que la moyenne $M\left[\left(\displaystyle\int_0^X f_\tau d\tau\right)^2\right]$ tende vers ∞

quand $X \to \infty$. Supposons de plus que la corrélation de f admette une densité spectrale $\varphi_0(\lambda)$ ayant la propriété suivante : il existe une fonction $\varphi_0(\lambda)$ sommable telle que sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}_0$ vérifie la condition $\hat{\varphi}_0(t) = 0$ pour $t \geqslant 0$, avec :

$$\left|\frac{\varphi}{\varphi_0}\right| \geqslant \varepsilon > 0, \qquad \text{et} \qquad \frac{d^k}{d\lambda^k}\left(\frac{\varphi}{\varphi_0}\right) \qquad \text{soit bornée, pour un } k > 2.$$

Dans ces conditions, la mesure P_X sur $\mathscr{C}[0, 1]$ associée à la fonction f, construite en a), converge étroitement sur $\mathscr{C}[0, 1]$ vers la mesure W de Wiener.

Les deux théorèmes de convergence précédents, outre l'intérêt propre des résultats obtenus, montrent, par leurs démonstrations, une *méthode générale* permettant d'obtenir des résultats concernant les mesures asymptotiques, à partir de résultats connus dans la théorie des processus stochastiques stationnaires.

REMERCIEMENTS

C'est pour moi un agréable devoir que d'exprimer ici ma reconnaissance envers Monsieur le Professeur J. Bass, qui m'a constamment guidé et encouragé. Je remercie Monsieur le Professeur Ch. Pisot de m'avoir fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse, et de m'avoir proposé un second sujet de thèse très intéressant ; Monsieur le Professeur A. Tortrat dont les conseils m'ont été précieux ; et Monsieur le Professeur J. P. Bertrandias, dont les travaux m'ont beaucoup inspiré. Enfin, mes remerciements vont à J. G. Dhombres, avec qui j'ai eu de nombreuses discussions intéressantes.

APPENDICE I

DÉMONSTRATIONS DE CERTAINS RÉSULTATS DU CHAPITRE I

1. Démonstration du théorème 4 (chapitre I).

a) Montrons d'abord que si f et $g \in \mathcal{M}^2(\mathrm{G}\,;\,\mathbb{R})$, alors pour la mes. as. μ de $\mathrm{F}(t) = [f(t), g(t)]$, on a

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |\,xy\,|\, d\mu(x, y) < \infty.$$

Pour cela, considérons la fonction $h(x, y) = |\,x.y\,|$ définie sur $\mathbb{R}^2$, et pour tout $\mathrm{A} > 0$, la fonction h_A égale à h si $|\,h(x, y)\,| \leqslant \mathrm{A}$, à A si $|\,h(x, y)\,| > \mathrm{A}$; h_A est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}^2$, donc

$$\lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{\mathrm{X_T}} h_\mathrm{A}[f(t), g(t)]dt = \iint_{\mathbb{R}^2} h_\mathrm{A}(x, y) d\mu(x, y),$$

ce qui donne

$$\iint_{\mathbb{R}^2} h_\mathrm{A}(x, y) d\mu(x, y) \leqslant \limsup_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{\mathrm{X_T}} |\,f(t)\,|\,|\,g(t)\,|\,dt \leqslant \|\,f\,\|_{\mathcal{M}^2} . \|\,g\,\|_{\mathcal{M}^2} < \infty$$

d'après l'inégalité de Hölder. Le théorème de Beppo Lévi, appliqué aux fonctions $h_\mathrm{A}(x, y) \uparrow h(x, y)$ $(\mathrm{A} \to \infty)$, montre alors que $h(x, y) = |\,x\,|.|\,y\,|$ est μ-intégrable.

b) Considérons la fonction caractéristique φ de la mesure μ :

$$\varphi(u, v) = \lim_{\mathrm{T}\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}} \int_{\mathrm{X_T}} e^{i[uf(t) + vg(t)]} dt \equiv \mathrm{M}\left\{ e^{i[uf(t) + vg(t)]} \right\}$$

Comme le moment croisé d'ordre 2 de μ existe, il est égal à l'opposé de $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}(0, 0)$, quantité que nous allons évaluer,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u + h, v) - \varphi(u, v)}{h} = \lim_{h\to 0} \mathrm{M}\left\{ \frac{e^{i(u+h)f(t) + ivg(\ )} - e^{iuf(t) + ivg(t)}}{h} \right\}$$

Comme

$$\left| \frac{e^{i[(u+h)f(t) + vg(t)]} - e^{i[uf(t) + vg(t)]}}{h} - if(t)e^{i[uf(t) + vg(t)]} \right| \leqslant \frac{1}{2} |\,h\,|\ |\,f(t)\,|^2$$

la norme dans $\mathcal{M}^1(\mathrm{G}\,;\,\mathbb{R})$ du premier membre de l'inégalité précédente sera majorée par $\frac{1}{2}|\,h\,|\ \|\,f\,\|^2_{\mathcal{M}^2}$ qui tend vers 0 quand $h \to 0$. Cela montre que la fonction

$$t \rightsquigarrow if(t)e^{i[uf(t) + vg(t)]}$$

est moyennable, puisque l'ensemble des fonctions moyennables est fermé dans $\mathcal{M}^1(\mathrm{G}\,;\,\mathbb{R})$ (Vo-Khac-Khoan [*1*]). Par la même référence, l'opérateur de moyenne M { } est fermé dans $\mathcal{M}^1(\mathrm{G}\,;\,\mathbb{R})$, donc on a :

$$\mathrm{M}\left\{ if(t)e^{i[uf(t) + vg(t)]} \right\} = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(u + h, v) - \varphi(u, v)}{h} = \frac{\partial\varphi(u, v)}{\partial u}$$

On recommence le même raisonnement pour le calcul de

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\partial\varphi(0, h)}{\partial u} - \frac{\partial\varphi}{\partial u}(0, 0)\right]$$

en utilisant cette fois la majoration

$$\left\|\frac{if(t)[e^{ihg(t)} - 1]}{h} - i^2f(t)g(t)\right\|_{\mathcal{M}^1} \leqslant \frac{1}{2}|h| \ \|f(t)g^2(t)\|_{\mathcal{M}^1}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}|h| \ \|f\|_{\mathcal{M}^2}\|g^2\|_{\mathcal{M}^2} = \frac{1}{2}|h| \ \|f\|_{\mathcal{M}^2}\|g\|^2_{\mathcal{M}^4}$$

On obtient finalement

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u \partial v}(0, 0) = -\mathrm{M}\{f(t)g(t)\}.$$

Le théorème 4 est démontré.

2. Démonstration du théorème 5 (chapitre I).

L'hypothèse sur f implique que $f \in \mathcal{M}^p$, $\forall p \geqslant 1$; en effet, il suffit de remarquer que pour les valeurs paires de $p \geqslant p_0$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(f(t))^{2k}dt = \|f\|^{2k}_{\mathcal{M}^{2k}} < \infty$$

et ceci pour tout $k(2k \geqslant p_0)$, et que $\mathcal{M}^p \subset \mathcal{M}^q$ pour $p > q$. Considérons alors une suite quelconque $T_n \to \infty$, et les mesures $\mu^f_{T_n}$. Cette suite de mesures a la propriété que pour tout $p \geqslant p_0$, ses moments d'ordre p tendent $(n \to \infty)$ vers une limite m_p (finie). D'après une propriété des moments (Loeve [1], p. 185), la suite des moments d'ordre q converge alors pour tout $q \geqslant 0$, et les limites $(m_q, q \geqslant 0)$ forment la suite des moments d'une mesure bornée $\sigma = \sigma((T_n))$.

Si la suite des moments $(m_q, q \geqslant 0)$ détermine cette mesure σ (il y a une seule mesure bornée σ ayant les (m_q) pour moments), alors toutes les suites $(\mu^f_{T_n})$ convergent vers la même mesure σ qui est par conséquent la mes. as. μ^f de f. On a de nombreux critères d'unicité (pour les suites de moments) ; un exemple en est celui de Carlemann :

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n}^{-1/2n} = \infty$$

qui s'écrit ici

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|f\|_{\mathcal{M}^{2n}}} = \infty$$

Une condition suffisante pour la relation précédente est

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\|f\|_{\mathcal{M}^{2n}} < \infty$$

(Shohat et Tamarkin [1]).

3. Démonstration du théorème 6 (chapitre I).

Les conditions sur f entraînent que $f \in \mathcal{M}^p$, $\forall p \geqslant 0$. De toute suite $T_j \to \infty$, on peut donc extraire une sous-suite (T_n) telle que $(\mu^f_{T_n}) = (\mu_n)$ converge étroitement vers une mesure μ. La fonction caractéristique $\varphi(z) = \int e^{izx}\mu(dx)$ de μ est analytique dans la bande $|\operatorname{Im} z| < r$. En effet, cela est vrai si et seulement si $\int e^{r|x|}\mu(dx) < \infty$ (Loeve [1], p. 212); d'autre part, l'inégalité

$$\liminf_{n\to\infty} \int g d\mu_n \geqslant \int g d\mu$$

pour la fonction $\geqslant 0$ continue $g(x) = e^{r|x|}$ (Loeve [1], p. 183), entraîne qu'on ne peut avoir à la fois $\int g d\mu = +\infty$ et la condition *a*) de l'énoncé.

Comme $f \in \mathcal{M}^p$, $\forall p > 0$, le théorème 3 donne :

$$\int_{\mathbf{R}} x^p \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\mathrm{T}_n} \int_{\mathrm{X}_{\mathrm{T}_n}} (f(t))^p dt = m_p,$$

où les m_p ne dépendent pas de la suite (T_n), ce qui montre, avec l'analyticité de φ, que la mesure $\mu = \mu((\mathrm{T}_n))$ est indépendante de (T_n); en effet, le développement en série entière de φ autour de $z = 0$, qui la détermine, dépend uniquement des moments (m_p).

APPENDICE II

DÉMONSTRATIONS DE CERTAINS RÉSULTATS DU CHAPITRE III

1. Démonstration du théorème 2 (chapitre III).

Cherchons à démontrer que $F(t) = [f_1(t), \ldots, f_k(t)]$ admet une mesure asymptotique sur $\mathbf{R}^k$. Pour cela, prenons la fonction

$$H(x_1, \ldots, x_k) = \exp [i(s_1 x_1 + \ldots + s_k x_k)]((s_1, \ldots, s_k) \in \hat{\mathbf{R}}^k),$$

et considérons la quantité

$$\frac{1}{N} \int_0^N e^{i[s_1 f_1(t) + \ldots + s_k f_k(t)]} dt = \frac{1}{N} \int_0^N e^{i[s_1 g_1(u_t^1) + \ldots + s_k g_k(u_t^k)]} dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{i[s_1 g_1(u_n^1) + \ldots + s_k g_k(u_n^k)]}$$

Par l'hypothèse faite sur les fonctions $g_i(u)$, la fonction

$$u \rightsquigarrow e^{is_1 g_1(u)} \ldots e^{is_k g_k(u)}$$

est Riemann-intégrable sur [0, 1]. Donc, par l'hypothèse faite sur les suites $(u_n^i)_{n \geq 0}$, on a la relation

$$\begin{aligned}\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \int_0^N e^{i[s_1 f_1(t) + \ldots + s_k f_k(t)]} dt &= \int_0^1 \ldots \int_0^1 e^{i[s_1 g_1(x_1) + \ldots + s_k g_k(x_k)]} dx_1 \ldots dx_k \\ &= \prod_{j=1}^{k} \int_0^1 e^{is_j g_j(x_j)} dx_j = \varphi_F(s_1, \ldots, s_k).\end{aligned}$$

D'autre part, il est facile de montrer que dans la relation précédente, le premier membre est aussi égal à $\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \ldots dt$. Ceci montre que $F(t)$ a une mesure asymptotique sur $\mathbf{R}^k$, de fonction caractéristique $\varphi_F(s_1, \ldots, s_k)$. Par ailleurs, on voit, exactement de la même manière, que chacune des fonctions $f_j(t)$ a une mesure asymptotique sur $\mathbf{R}$, de fonction caractéristique

$$\varphi_{f_j}(s_j) = \int_0^1 e^{is_j g_j(x)} dx.$$

Cela montre que $\mu_F = \mu_{f_1} \otimes \ldots \otimes \mu_{f_j}$, c'est-à-dire que les k fonctions $f_j(t)$ sont asymptotiquement indépendantes.

2. Démonstration du théorème 4 (chapitre III).

Cherchons d'abord la mesure asymptotique de la fonction

$$G_A(t) = \int_{-A}^{A} f(t - s)\nu(ds) = \int_{-A}^{A} f(t + u)\sigma(du) \qquad (\text{où } \sigma = \check{\nu})$$

$$G_N(t) = \int_{-N}^{N} f(t + u)\sigma(du) = \sum_{n=-N}^{N-1} \int_n^{n+1} f(\widehat{t + u})\sigma(du).$$

Or :

$$\widehat{t+u} = \begin{cases} \hat{t} + \hat{u} & \text{si } \underset{\smile}{t} + \underset{\smile}{u} < 1 \\ t + u + 1 & \text{si } \underset{\smile}{t} + \underset{\smile}{u} \geqslant 1 \end{cases} \qquad (\underset{\smile}{t} = \text{partie fractionnaire de } t)$$

d'où

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N-1} \left[\int_n^{n+1-t} f(n + \hat{t})\sigma(du) + \int_{n+1-\underset{\smile}{t}}^{n+1} f(n + \hat{t} + 1)\sigma(du) \right]$$

ou, en regroupant les termes deux à deux :

$$G_N(t) = \int_{-N}^{-N+1-\underset{\smile}{t}} f(-N+\hat{t})\sigma(du) + \sum_{n=-N+1} f(n+\hat{t}) \int_{n-\underset{\smile}{t}}^{n+1-t} \sigma(du) + \int_{N-\underset{\smile}{t}}^{N} f(N + \hat{t} + 1)\sigma(du)$$

$$\boxed{G_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} f(\hat{t} + n) l_n(\underset{\smile}{t}), \quad \text{en posant} \quad l_n(\underset{\smile}{t}) = \int_{n-\underset{\smile}{t}}^{n+1-\underset{\smile}{t}} \sigma(du)}$$

(avec les exceptions évidentes pour les termes l_{-N} et l_N).

Pour avoir la mes. as. μ_N de la fonction $G_N(t)$, cherchons sa fonction caractéristique $\varphi_N(s)$; pour cela, posons :

$$\varphi_{N,T}(s) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{isG_N(t)} dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} e^{is\sum_{-N}^{N} f_n(\hat{t}) l_n(\underset{\smile}{t})} dt$$

(où $f_n(\hat{t}) = f(n + \hat{t})$).

Prenons pour T une valeur entière :

$$\varphi_{N,T}(s) = \frac{1}{2T} \sum_{p=-T}^{T-1} \int_p^{p+1} e^{is\sum_{n=-N}^{N} f_n(p) l_n(\underset{\smile}{t})} d\underset{\smile}{t} = \frac{1}{2T} \sum_{p=-T}^{T-1} \int_p^{p+1} e^{is\sum_{n=-N}^{N} f_n(p) l_n(v)} dv$$

Rappelons que $f_n(p) = g(u_{n+p})$.

Considérons les 2N suites $p \rightsquigarrow u_{n+p}$; elles sont linéairement indépendantes par hypothèse. Donc, en considérant la fonction complexe bornée

$$\int_0^1 e^{is\sum_{n=-N}^{N} l_n(v) g(x_n)} dv$$

des 2N variables $(x_n) \in [0, 1]^{2N}$, qui est continue, donc Riemann-intégrable, si la mesure ν est supposée continue, on conclut que l'expression $\varphi_{N,T}(s)$ a une limite quand $T \to \infty$ par valeurs entières, la limite étant égale à

$$\underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{2N} \left(\int_0^1 \prod_{n=-N}^{N} e^{isl_n(v)g(x_n)} dv \right) dx_{-N} \ldots dx_N$$

$$= \int_0^1 \left(\underbrace{\int_0^1 \cdots \int_0^1}_{2N} \prod_{n=-N}^{N} e^{isl_n(v)g(x_n)} dx_1 \ldots dx_n \right) dv = \int_0^1 \left[\prod_{n=-N}^{N} \int_0^1 e^{isl_n(v)g(x)} dx \right] dv.$$

En appliquant maintenant le raisonnement familier sur les valeurs entières et non entières de T quand T $\to \infty$, on conclut que la fonction caractéristique de la mes. as. μ_{G_N} est donnée par

$$\varphi_N(s) = \int_0^1 \left(\prod_{n=-N}^{N} \int_0^1 e^{isl_n(v)g(x)}dx \right) dv.$$

Remarquons maintenant que la mes. as. de $f(t)$ a pour fonction caractéristique

$$\Phi(s) = \int_0^1 e^{isg(x)}dx.$$

On a donc

$$\int_0^1 e^{isl_n(v)g(x)}dx = \Phi[sl_n(v)].$$

En faisant maintenant tendre N vers l'∞, et en se rappelant ce qui a été dit avant les calculs qui précèdent, à savoir que $f * \nu$ est la $\mathcal{M}^l$-limite, quand A $\to \infty$, de $G_A(t)$, on arrive au théorème 4.

3. Démonstration du théorème 6 (chapitre III).

L'expression de la fonction caractéristique de μ_{F_λ} est donnée, d'après le théorème 5, par

$$\varphi_{F_\lambda}(s) = \varphi_\lambda(\sqrt{\lambda}s) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left\{ \prod_{n=-N}^{N} \Phi[s\sqrt{\lambda}l_{n,\delta}(v)] \right\} dv.$$

Dans le cas où ν est à support compact, il existe un nombre A tel que, en posant

$$N = N(\delta) = \frac{A}{\delta},$$

on a

$$\varphi_{F_\lambda}(s) = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \left\{ \prod_{n=-N}^{N} \Phi[s\sqrt{\lambda}l_{n,\delta}(v)] \right\} dv$$

où

$$l_{n,\delta}(v) = \int_{n\delta - v}^{n\delta+\delta-v} K(x)dx,$$

en posant

$$K = \frac{d\sigma}{dx} \qquad (\sigma = \check{\nu}).$$

Dans toute la suite de la démonstration, N désignera $N(\delta)$.

Étudions d'abord le comportement de l'expression

$$P_N(\lambda, v) = P_N = \prod_{n=-N}^{N} \Phi[s\sqrt{\lambda}l_{n,\delta}(v)], \qquad \text{quand } \lambda \to \infty.$$

On a

$$\log P_N = \sum_{n=-N}^{N} \log \Phi[s\sqrt{\lambda}l_{n,\delta}(v)].$$

Si on suppose le moment d'ordre 1 de la mes. as. μ_f nul, sa fonction caractéristique s'écrit :

$$\Phi[s\sqrt{\lambda}l_{n,\delta}(v)] = 1 - \frac{m_2}{2}s^2\lambda l_{n,\delta}^2 + \rho$$

où

$$\rho = \rho(n, \delta, v) = \theta a_3 \frac{s^3 \lambda^{3/2} l^3_{n,\delta}}{6}, \qquad |\theta| < 1,$$

en désignant par m_2 le moment d'ordre 2 de μ_f, et par a_3 son moment absolu d'ordre 3.

Utilisons la relation

$$\log z = (z - 1) + \theta' |z - 1|^2 \qquad (|\theta'| < 1), \quad \text{valable pour} \quad |z - 1| < \frac{1}{2}.$$

Fixons s. Comme

$$|l_{n,\delta}(v)| = \left| \int_{n\delta - v}^{n\delta + \delta - v} K(x)dx \right| \leqslant \| K \|_\infty \delta$$

on en conclut que pour tout λ assez grand, le nombre $\Phi = \Phi[s\sqrt{\lambda} l_{n,\delta}(v)]$ vérifie la relation

$$|\Phi - 1| < \frac{1}{2}$$

et par suite la relation

$$\log \Phi = Z + \theta' |Z|^2 \qquad (|\theta'| < 1),$$

en posant

$$Z = Z(n, \delta, v) = -\frac{m_2}{2} s^2 \lambda l^2_{n,\delta}(v) + \rho_{n,\delta}(v).$$

D'où, pour toutes ces valeurs de λ,

$$\log P_N = -\frac{m_2}{2} s^2 \frac{1}{\delta} \sum_{n=-N}^{N} l^2_{n,\delta}(v) + R_N(n, \delta, v)$$

où $R_N(n, \delta, v)$ est une somme de quatre termes, de la forme

$$\theta_k(s) \times \frac{1}{\delta^{k/2}} \sum_{n=-N}^{N} l^k_{n,\delta}$$

où $\theta_k(s)$ est une quantité indépendante de λ et v, et $k \geqslant 3$.

Cherchons la limite quand $\lambda \to \infty$ de $\frac{1}{\delta} \sum_{-N}^{N} l^2_{n,\delta}(v)$. En posant

$$J_n = J_n(\delta, v) = [n\delta - v, n\delta + \delta - v]$$

$$\left| \frac{1}{\delta} \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_{J_n} K(x)dx \right)^2 - \delta \sum_{n=-N}^{N} K^2(n\delta) \right| = \frac{1}{\delta} \left| \sum_{n=-N}^{N} \left[\left(\int_{J_n} K dx \right)^2 - \delta^2 K^2(n\delta) \right] \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta} 2 \| K \|_\infty \delta \omega_n(\delta) . 2N(\delta) . \delta$$

où $\omega_n(\delta)$ désigne l'oscillation de $K(x)$ sur l'intervalle J_n. Comme K est continue et à support compact, en désignant par $\omega(\delta)$ son oscillation sur tout $\mathbf{R}$, on obtient la majoration

$$\leqslant 2 \| K \|_\infty \omega(\delta) \times 2A \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc

$$\lim_{\lambda \to \infty} \sum_{-N}^{N} \frac{1}{\delta} l^2_{n,\delta}(v) = \int_{-A}^{A} K^2(x)dx = \int_{\mathbf{R}} K^2(x)dx,$$

(uniformément par rapport à $v > 0$).

Prenons maintenant une expression de la forme $\frac{1}{\delta^{k/2}}\sum_{-N}^{N} l^k_{n,\delta}$, où $k \geqslant 3$.

Pour fixer les idées, examinons le cas $k = 3$

$$\frac{1}{\delta^{3/2}}\left|\sum_{-N}^{N} l^3_{n,\delta}\right| \leqslant \frac{1}{\delta^{3/2}} \| K \|^2_\infty \delta^2 \left|\sum_{-N}^{N} l_{n,\delta}\right| \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 0$$

(uniformément par rapport à $v > 0$) parce que K est intégrable.

D'où finalement, le résultat suivant : lorsque $\delta \to 0$ (ou $\lambda \to \infty$)

$$\log P_{N(\delta)} \to -\frac{m_2}{2} s^2 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)dx$$

donc :

$$\lim_{\lambda\to\infty} P_{N(\delta)} = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2},$$

où

$$\sigma^2 = m_2 \int_{-\infty}^{\infty} K^2(x)dx.$$

Comme cette limite est uniforme par rapport à v, on voit que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \varphi_{F_\lambda}(s) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 s^2}.$$

BIBLIOGRAPHIE

BADRIKIAN, A.

[*1*] Séminaire sur les fonctions aléatoires linéaires et les mesures cylindriques. *Lecture Notes in Math.*, n° 139, Springer-Verlag, 1970.

BANACH, S.

[*1*] *Théorie des opérations linéaires.* 2nd edition, Chelsea, New York.

BASS, J.

[*1*] *Les fonctions pseudo-aléatoires.* Paris, Gauthier-Villars, 1962 (Mémorial des Sciences mathématiques, 153).

[*2*] Suites uniformément denses, moyennes trigonométriques, fonctions pseudo-aléatoires. *Bull. Soc. Math. France*, t. **87**, 1959, p. 1-64.

[*3*] Fonctions stationnaires. Fonctions de corrélation. *Ann. Inst. H. Poincaré*, vol. V, n° 2, 1969, p. 135-193.

BERTRANDIAS, J. P.

[*1*] Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre *p* (thèse). *Bull. Soc. Math. France*, 1966, Mémoire n° 5.

[*2*] Suites pseudo-aléatoires et critères d'équirépartition modulo 1. 1962. *Nijenrode Comp. Math.*, t. **16**, 1964, p. 23-28.

BESICOVITCH, A. S.

[*1*] *Almost periodic functions.* Cambridge, Cambridge University Press, 1932 (Reissue of the first edition), New York, Dover Publications, 1954.

BOHR

[*1*] *Almost periodic functions.* Chelsea, New York, 1947.

BOURBAKI, N.

[*1*] *Éléments de mathématiques. Intégration*, chap. 9, Hermann, Paris, 1969.

CASSELS
[1] *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge University Press, 1957.
DAVYDOV
[1] *Theory of Prob. and Appl.*, n° 4, 1968.
DAY, M. M.
[1] *Normed linear spaces.* Springer, 1962.
DHOMBRES, J. G.
[1] Sur les opérateurs multiplicativement liés (thèse). *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire n° 27.
DUDLEY
[1] Convergence of Baire measures. *Studia Mathematica*, t. **27**, 1966, p. 251-268.
DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. T.
[1] *Linear operators*, Part I. New York, Interscience Publishers, 1958.
EBERLEIN, W. F.
[1] Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **67**, 1949, p. 217-240.
FOMIN, S.
[1] Finite measures invariant under flows. *Mat. Sb.*, t. **12** (54), 1943 ; *Am. Math. Soc. Translations*, Série 2, vol. **57**, p. 113.
GROSS, L.
[1] Measurable functions on Hilbert spaces. *Trans. Am. Math. Soc.*, t. **105**, 1962, p. 372-390.
[2] *Abstract Wiener spaces.* Proc. Fith. Berkeley Symposium on Math. Statistics and Probability, 1965, p. 31-42.
HARTMAN, Ph., VAN KAMPEN, E. R. and WINTNER, A.
[1] Mean motions and distribution functions. *Am. J. Math.*, t. **59**, 1937, p. 261-269.
[2] On the distribution functions of almost periodic functions. *Am. J. Math.*, t. **50**, 1938, p. 491-500.
HARTMAN, S.
[1] Sur les bases statistiques. *Studia Mathematica*, t. **10**, 1948, p. 120.
HEWITT, F. and ROSS, K. A.
[1] *Abstract harmonic analysis*, I. Springer-Verlag, 1963.
JACOBS, K.
[1] *Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie.* Berlin, Springer-Verlag, 1960.
KAC, M. et STEINHAUS, H.
[1] Sur les fonctions indépendantes I (IV). *Studia Mathematica*, t. **7**, 1938, p. 1.
KOROBOV
[1] Sur certains problèmes d'équirépartition (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Série Math., t. **14**, 1950, p. 215-231.
[2] De l'équirépartition complète et des nombres conjointement normaux (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR*, t. **20**, 1956, p. 649-660.
KRYLOV, N. M. et BOGOLYUBOV, N. N.
[1] La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes dynamiques de la mécanique non linéaire. *Ann. of Math.*, t. **38**, 1937, p. 65-113.
KUELBS, J.
[1] Abstract Wiener spaces and applications to analysis. *Pac. J. of Math.*, t. **31**, 1969.
LOEVE, M.
[1] *Probability theory.* 3rd edition, Princeton, Van Nostrand, 1963.
MARCINKIEWICZ, J.
[1] Une remarque sur les espaces de A. S. Besicovitch. *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. **208**, 1939, p. 157-159.
OXTOBY, J. C. and ULAM, S. M.
[1] On the existence of a measure invariant under a transformation. *Ann. of Math.*, t. **40**, 1939, p. 560-566.

PHAM PHU HIEN
[*1*] Fonctions admettant une répartition asymptotique des valeurs. *C. R. Acad. Sci.*, t. **267** (25 novembre 1968), p. 803-806.
[*2*] Deux théorèmes sur les mesures asymptotiques. *C. R. Acad. Sci.*, t. **268** (24 février 1969), p. 448-450.
[*3*] Mesures cylindriques asymptotiques définies sur certains espaces de fonctions ou de distributions. *C. R. Acad. Sci.*, t. **272** (5 avril 1971), p. 953-955.
[*4*] Mesures asymptotiques cylindriques et de Radon. *C. R. Acad. Sci.*, t. **272** (28 juin 1971), p. 1711-1714.
[*5*] Quelques résultats sur les mesures asymptotiques. *C. R. Acad. Sci.*, t. **273** (6 septembre 1971), p. 412-414.
PARTHASARATHY, K. R.
[*1*] *Probability measures on metric spaces.* New York, Acad. Press, 1967.
PROKHOROV, Yu. V.
[*1*] Convergence of random processes and limit theorems in probability theory. *Theor. Prob. Appl.*, t. **1**, 1956, p. 157-214.
RAIMI, R. A.
[*1*] Mean values and Banach limits. *Proc. of the Am. Math. Soc.*, t. **82**, 1957, p. 1029-1036.
[*2*] On Banach's generalised limits. *Duke Math. J.*, vol. **26**, 1959, p. 17-28.
ROZANOV, Yu. A.
[*1*] *Stationary random processes.* Holden-Day, 1967.
SCHWARTZ, L.
[*1*] Livre sur les mesures de Radon (à paraître au *Tata Institute of Bombay*).
[*2*] *Séminaire sur les applications radonifiantes.* École Polytechnique, Paris, 1969-1970.
[*3*] *Théorie des distributions.* Paris, Herman, 1951.
SHOHAT, J. A. and TAMARKIN, J. D.
[*1*] The problem of moments. *Math. Surweys*, n° 1, Am. Math. Soc., New York, 1943.
STARKCHENKO
[*1*] De la construction de suites simultanément normales avec une suite donnée (en russe). *Izv. Akad. Nauk SSSR*, Série Math., t. **22**, 1958, p. 357-370.
[*2*] Rectification à l'article précédent. *Izv. Akad. Nauk SSSR*, t. **23**, 1959, p. 635-636.
[*3*] Construction d'une suite complètement équi répartie (en russe). *Dokl. Akad Nauk SSSR*, t. **129**, n° 3, 1959, p. 519-521.
STEINHAUS, H.
[*1*] Sur les fonctions indépendantes (VII). *Studia Mathematica*, t. **10**, 1948, p. 1.
[*2*] Sur les fonctions indépendantes (VIII). *Studia Mathematica*, t. **11**, 1950, p. 133.
TOPSØE
[*1*] Topology and Measures. *Lecture notes in Math.*, Springer, 1969.
TORTRAT, A.
[*1*] Répartition asymptotique des fonctions presque périodiques de Besicovitch. *Trans. of the third Prague conf. on Random functions and Inf. theory*, 1962, p. 725-741.
[*2*] *Calcul des Probabilités et Introduction aux processus aléatoires.* Paris, Masson, 1971.
[*3*] Cours de 3ᵉ cycle, 1970-1971.
VO-KHAC-KHOAN
[*1*] Étude des fonctions quasi stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles (thèse). *Bull. Soc. Math. France*, Mémoire n° 6, 1966.
WEYL, H.
[*1*] Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins. *Math. Annalen*, t. **77**, 1916, p. 313-352.
YOSIDA, K.
[*1*] *Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1966.

TABLE DES MATIÈRES