Annales de l'I. H. P., section B

François Bronner

Méthodes probabilistes pour la détermination de résolvantes sous-markoviennes

Annales de l'I. H. P., section B, tome 11, nº 3 (1975), p. 253-264

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_3_253_0>

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (http://www.elsevier.com/locate/anihpb) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Ann. Inst. Henri Poincaré, Section B :
Vol. XI, n° 3, 1975, p. 253-264. *Calcul des Probabilités et Statistique.*

Méthodes probabilistes pour la détermination de résolvantes sous-markoviennes

par

François BRONNER
Université de Paris-Nord, C. S. P.
Département de Mathématiques, 93206 Saint-Denis

SUMMARY. — The purpose of this paper is to give a probabilistic method for a characterisation of submarkovian resolvents associate to a kernel V that satisfies the complete maximum principle.

Nous donnons ici une interprétation probabiliste des conditions nécessaires et suffisantes d'existence de résolvante sous-markovienne de J. C. Taylor et F. Hirsh [*3*] et [*2*].

Ces questions sont, comme il a été vu dans [*8*], liées aux opérateurs de Neveu [*1*]. On verra dans la suite, que pour un processus de Markov, l'existence de ces opérateurs s'obtient par des conditions probabilistes très simples. On se propose ensuite de les utiliser pour retrouver, du moins dans le cas d'une tribu séparable, la caractérisation de Taylor.

Après des rappels, on étudie dans II les opérateurs de Neveu des processus de Ray. Dans III, on associe, par des méthodes de compactification du type de celles de Mokobodzki [*5*], un processus de Ray a un noyau vérifiant le principe complet du maximum, et l'on conclut dans IV.

I. RAPPELS

Soient $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable séparable, et V un noyau propre sur $(E, \mathscr{E})$ vérifiant le principe complet du maximum. Notons $\mathscr{E}_+$ l'ensemble des fonctions mesurables positives sur E. Posons :

$$\mathscr{A} = \{ h \in \mathscr{E}_+ \ ; \sup Vh < \infty \},$$

Dans [8] nous avons montré qu'il existait pour toute fonction h de $\mathscr{A}$, un noyau unique vérifiant :

$$\text{(1)} \qquad V = \sum_n (U_h M_h)^n U_h ,$$

où M_h est le noyau de multiplication par h.

Nous y montrions aussi que si pour tout $h \in \mathscr{E}_+$; on pose

$$U_h = \lim_n \downarrow U_{h_n} ; \qquad h_n \uparrow h, \ h_n \in \mathscr{A} ;$$

le noyau ainsi obtenu ne dépend pas de la suite (h_n), mais seulement de h. Ce noyau ne vérifie pas toujours l'égalité (1) mais il est le seul pouvant la vérifier. Par suite l'existence de la résolvante associée à V est équivalente au fait que le noyau U_1 vérifie l'égalité (1).

II. OPÉRATEURS DE NEVEU D'UN PROCESSUS DE RAY

Dans ce paragraphe, E est un compact métrisable, $\mathscr{E}$ la tribu des boréliens. Soit $(\Omega, \mathscr{F}_t, \theta_t, P_x)$ un processus de Ray (cf. Meyer [7]) d'espace des états E, et dont l'ensemble des points de branchement est noté B, et $D = B^c$.

La résolvante associée est donnée par :

$$V_p f(x) = E_x \int_0^\infty e^{-pt} f(X_t) dt \qquad (\text{pour tout } p \geqslant 0).$$

Le noyau $V = V_0$ est le potentiel du processus.

Pour toute fonction $h \in \mathscr{E}_+$, nous noterons T_h le temps terminal associé à h,

$$T_h = \inf \left\{ t > 0 \, ; \int_0^t h(X_s) ds = +\infty \right\}.$$

Sur $\{ T_h > t \}$, $T_h = t + T_h \circ \theta_t$.

LEMME II-1. — *Pour toute $h \in \mathscr{E}_+$ et toute $f \in \mathscr{E}_+$, posons*

$$\text{(2)} \qquad U_h f(x) = E_x \int_0^{T_h} \exp\left(- \int_0^t h(X_s) ds \right) f(X_t) dt .$$

Alors

$$\text{(3)} \qquad \sum_{n=0}^\infty (U_h M_h)^n U_h f(x) = E_x \int_0^{T_h} f(X_t) dt .$$

Démonstration. — En appliquant la propriété de Markov, il vient pour tout $f \in \mathscr{E}_+$

$$
\begin{aligned}
& U_h M_h U_h f(x) \\
&\quad = E_x \int_0^{T_h} h(X_u) \exp\left(-\int_0^u h(X_s)ds\right)du \int_u^{T_h} f(X_t) \exp\left(-\int_u^t h(X_s)ds\right)dt. \\
&\quad = E_x \int_0^{T_h} f(X_t) \exp\left(-\int_0^t h(X_s)ds\right)dt \int_0^t h(X_u)du\,.
\end{aligned}
$$

D'où par récurrence :

$$
\begin{aligned}
& (U_h M_h)^n U_h f(x) \\
&\quad = E_x \int_0^{T_h} f(X_t)dt \exp\left(-\int_0^t h(X_s)ds\right) \int_0^t h(X_{t_1})dt_1 \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{n-1}}^t h(X_{t_n})dt_n\,.
\end{aligned}
$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\exp \int_0^t h(X_s)ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t h(X_{t_1})dt_1 \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{n-1}}^t h(X_{t_n})dt_n\,.$$

Nous notons maintenant $\mathscr{S}_p$ et $\mathscr{S}'_p$, $p \geqslant 0$, le cône des fonctions p-surmédianes par *rapport à la résolvante* et celui des fonctions p-excessives (cf. Meyer [7]).

La topologie fine sera la plus petite des topologies rendant continues les fonctions de $\mathscr{S}'_p$.

PROPOSITION II-2. — *Si pour $h \in \mathscr{E}_+$, U_h vérifie l'égalité* (1), *alors pour tout $f \in \mathscr{E}_+$, avec Vf fini, $U_h f$ est finement continue.*

Démonstration. — Supposons d'abord h bornée et dans $\mathscr{A}$, d'après la proposition III-3 de [8] nous avons pour $p > \sup_{x \in E} h(x)$:

$$U_h = \sum_{\mathbb{N}} (V_p M_{p-h})^n V_p$$

donc, si $f \in \mathscr{E}_+$ et si Vf est fini $U_h f \in \mathscr{S}'_p$ et est donc finement continue. Maintenant pour $h \in \mathscr{E}_+$ il existe une suite h_n croissante de fonctions bornées de $\mathscr{A}$ telles que :

$$U_h f = \lim_n \downarrow U_{h_n} f$$

Il en résulte que pour tout $h \in \mathscr{E}_+ U_h f$ est s. c. s. dès que $f \in \mathscr{E}_+$ et que Vf est fini. Si de plus U_h vérifie (1) on a en particulier :

$$Vf = U_h f + U_h M_h V f$$

Les deux fonctions $U_h f$ et $U_h M_h V f$ sont d'après ce qui précède finement s. c. s. et Vf est finement continue. Il en résulte que $U_h f$ est finement continue.

Nous notons $\hat{u}$ la régularisée de u sur-médiane, R_A et H_A les noyaux de réduction associés à $A \in \mathscr{E}$ et opérant sur $\mathscr{S}'_0$ et $\mathscr{S}_0$:

$$\begin{array}{ll} \text{pour } f \in \mathscr{S}'_0 & R_A f = \inf \{ u \in \mathscr{S}'_0 \, ; \, u \geqslant f \text{ sur } A \} \\ \text{pour } f \in \mathscr{S}_0 & H_A f = \inf \{ u \in \mathscr{S}_0 \, ; \, u \geqslant f \text{ sur } A \} . \end{array}$$

Nous poserons encore pour A :

$$T_A = \inf \{ t > 0 \, ; \, X_t \in A \}$$
$$T'_A = \inf \left\{ t > 0 \, ; \, \int_0^t 1_A(X_t) dt > 0 \right\} ,$$

qui sont les temps d'entrée et de pénétration dans A.

Nous rappelons encore la formule de Watanabé [*6*] :

$$(\forall x \in E) \qquad H_A V f(x) = E_x \int_{T'_A}^{+\infty} f(X_t) dt .$$

En particulier, si A est finement ouvert $H_A V f = \widehat{H_A V f} = R_A V f$ puisque alors $T_A = T'_A$.

PROPOSITION II-3. — *Pour toute fonction $h \in \mathscr{E}_+$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *le noyau U_h vérifie l'égalité* (1)
(2) *Pour tout $x \in E T_h = +\infty$ P_x p. s.*
(3) *Il existe une suite (A_n), $n \in N$, de fermés fins, telle que pour toute fonction f, strictement positive de potentiel fini :*

a) $\forall n \in N \qquad V h 1_{A_n} < \infty$
b) $\lim_n \downarrow R_{A_n^c} V f = 0$

(4) *Il existe une suite croissante d'élément de $\mathscr{E}$ telle que*

a) $\forall n \in N \qquad V h 1_{B_n} < \infty$
b) $\lim_n \uparrow T_{B_n^c} = +\infty \qquad P_x$ *p. s.*

(5) *Même chose que* (4) *en remplaçant* (b) *par :*

b′) $\lim_n \uparrow T'_{B_n^c} = +\infty \qquad P_x$ *p. s.*

Démonstration

(1) $\Leftrightarrow$ (2) D'après le lemme II-1.

(1) $\Rightarrow$ (3) Nous suivons Hirsh 2 en posant $A_n = \left\{ U_{h/n}f \geqslant \frac{1}{n} \right\}$. Comme $U_{h/n}$ vérifie (1), A_n est un fermé fin d'après le lemme II.2.

De $1_{A_n} \leqslant nU_{h/n}f$, résulte $Vh1_{A_n} \leqslant n^2Vf$ et sur A_n^c :

$$Vf < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} VM_hU_{h/n}f.$$

par suite, A_n^c étant finement ouvert,

$$R_{A_n^c}Vf = H_{A_n^c}Vf \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} VM_hU_{h/n}f$$

et

$$\lim_n \frac{1}{n} VM_hU_{h/n}f = \lim_n (Vf - U_{h/n}f) = 0.$$

(3) $\Rightarrow$ (4) Puisque $E_x \int_{T_{A_n^c}}^{+\infty} f(X_t)dt \leqslant R_{A_n^c}Vf$

(4) $\Rightarrow$ (5) Car $T'_{A_n^c} \geqslant T_{A_n^c}$

(5) $\Rightarrow$ (2) Il suffit de montrer que pour tout $x \in E$, $\int_0^t h(X_s)ds$ est finie pour tout t, P_x p. s.. Or $Vh1_{B_n}$ est finie donc pour tout $x \in E$:

$$\int_0^\infty 1_{B_n}(X_t)h(X_t)dt < \infty \qquad P_x \text{ p. s.}$$

donc si $t < T'_{B_n^c}$:

$$\int_0^t h(X_t)dt < \infty \qquad P_x \text{ p. s.}$$

il reste alors à remarquer que P_x p. s. $T'_{B_n^c}$ tend vers $+\infty$.

III. COMPACTIFICATIONS

Dans cette partie, l'espace $(E, \mathscr{E})$ est supposé séparable (i. e. la tribu $\mathscr{E}$ est dénombrablement engendrée), V est un noyau propre sur $(E, \mathscr{E})$ vérifiant (P. C. M.).

Soit $a \in \mathscr{E}_+$ une fonction strictement positive Va étant bornée. Il existe une résolvante sous-markovienne unique $(V_p^a)_{p>0}$ associée au noyau $V^a = VM_a$. Pour tout $h \in \mathscr{E}_+$ notons U_h^a le noyau canonique *relatif à* V^a et associé à h. Le lien avec le noyau U_h relatif à V est le suivant :

LEMME III-1. — *Pour toute fonction* $h \in \mathscr{E}_+$, $U_h = U_{h/a}^a M_{1/a}$; *de plus* U_h *vérifie* $V = \sum_n (U_hM_h)^n U_h$ *si et seulement si* $U_{h/a}^a$ *vérifie*

$$V^a = \sum_n (U_{h/a}^a M_{h/a})^n U_{h/a}^a.$$

En effet si $V = \Sigma(U_h M_h)^n U_h$, on aura :

$$VM_a = U_h M_a + VM_a M_{h/a} U_h M_a ,$$

donc $U_h M_a = U^a_{h/a}$ d'après [8] proposition III-1.

Nous allons maintenant en suivant la méthode de Mokobodzki [5] compactifier le couple $((E, \mathscr{E}), (V^a_p)_{p>0})$.

PROPOSITION III-2. — *Il existe un compact métrisable* K^a, *dont les boréliens sont noté* $\mathscr{K}^a$, *une application* $\varphi_a : E \to K^a$ *mesurable, une résolvante* $(\bar{V}^a_p)_{p \geq 0}$ *sur* $(K^a, \mathscr{K}^a)$ *tels que :*

1) $\varphi_a(E)$ *est dense dans* K^a.
2) *Pour tout* $p \geq 0$ *et* $\bar{f} \in \mathscr{K}^a_+$ $(\bar{V}^a_p \bar{f}) \circ \varphi_a = V^a_p(\bar{f} \circ \varphi_a)$.
3) *Pour tout* $p \geq 0$ *et toute fonction* f *p-excessive pour* (V^a_p) *sur* E, *il existe* g, *p-excessive sur* K^a *telle que* $g \circ \varphi_a = f$.
4) $\bar{V}^a_p(C(K^a))$ *sépare les points de* K^a, *où* $C(K^a)$ *est l'ensemble des fonctions continues sur* K^a.

C'est le théorème 7 de Mokobodzki [5] ; les résultats s'étendant par passage à la limite à V_0.

Notons $\mathscr{T} = \varphi_a^{-1}(\mathscr{K}^a)$; $\mathscr{T}$ est la tribu engendrée par les fonctions V^a_p-excessives pour tout $p \geq 0$, ou pour un $p \geq 0$. En effet, de 3), il résulte que $\mathscr{T}$ rend mesurable les fonctions excessives et la construction de K^a montre la réciproque.

En particulier les fonctions excessives pour V^a_p ne dépendant pas de a, la *tribu* $\mathscr{T}$ *ne dépend pas de* a.

Pour une fonction g mesurable sur K^a on notera $\bar{U}^a_g$ le noyau de Neveu sur K^a associé à g. *La fonction a étant fixée jusqu'à la fin du paragraphe nous ne la ferons plus figurer dans les notations*, et pour simplifier, nous noterons (1) l'une des trois relations :

$$V = \sum_n (U_h M_h)^n U_h ; \quad V^a = \sum_n (U^a_h M_h)^n U^a_h ; \quad \bar{V}^a = \sum_n (\bar{U}^a_{\bar{h}} M_{\bar{h}})^n U^a_{\bar{h}}$$

le contexte indiquant de laquelle il s'agit.

LEMME III-3. — *Soit* $h \in \mathscr{T}_+$ *et* $\bar{h} \in \mathscr{K}_+$ *vérifiant* $\bar{h} \circ \phi = h$. *Si* $\bar{U}_{\bar{h}}$ *vérifie* (1) *il en est de même de* U_h. *On a toujours :*

$$U_h(\bar{f} \circ \phi) = (\bar{U}_{\bar{h}} \bar{f}) \circ \phi \qquad (\forall \bar{f} \in \mathscr{K}_+)$$

$$\sum_{\mathbb{N}} [(\bar{U}_{\bar{h}} M_{\bar{h}})^n \bar{U}_{\bar{h}} \bar{f}] \circ \phi = \sum_{\mathbb{N}} (U_h M_h)^n U_h(\bar{f} \circ \phi) .$$

Démonstration. — Si $\bar{U}_{\bar{h}}$ vérifie (1), on a en particulier :

$$\bar{U}_{\bar{h}} + \bar{V}M_{\bar{h}}\bar{U}_{\bar{h}} = \bar{V}.$$

Donc pour $\bar{f} \in \mathscr{K}_+$:

$$(\bar{U}_{\bar{h}}\bar{f}) \circ \phi + | \bar{V}M_h\bar{U}_{\bar{h}}\bar{f} | \circ \phi = (\bar{V}\bar{f}) \circ \phi$$

soit :

$$\bar{V}(\bar{f}) \circ \phi = (\bar{U}_{\bar{h}}\bar{f}) \circ \phi + (V^a M_h)[(\bar{U}_{\bar{h}}\bar{f}) \circ \phi]$$

d'après la proposition (III-1) de [*8*] on a bien :

$$(\bar{U}_{\bar{h}}f) \circ \phi = U_h(\bar{f} \circ \phi)$$

de plus U_h vérifie (1). Si $\bar{U}_{\bar{h}}$ ne vérifie pas (1), il existe une suite $(\bar{h}_n)$ croissante vers $\bar{h}$ et $\bar{U}_{\bar{h}_n}$ vérifiant (1). Comme $\bar{U}_{\bar{h}}\bar{f} = \lim\limits_n \downarrow \bar{U}_{\bar{h}_n}\bar{f}$ et $U_h f = \lim \downarrow U_{h_n \circ \phi} f$ on a encore à la limite l'égalité précédente.

Nous notons H_A (et $H_{\bar{A}}$) le noyau de pseudo-réduction sur A ($\bar{A}$).

LEMME III-4. — *Soit* $\bar{f} \in \mathscr{K}_+$ *et* $\bar{A} \in \mathscr{K}$; *si* $f = \bar{f} \circ \phi$ *et* $A = \phi^{-1}(\bar{A})$, *on a :*

$$[H_{\bar{A}}\bar{V}\bar{f}] \circ \phi = H_A V^a f$$

ATTENTION : Lire les $\bar{V}$ et les U comme des $\bar{V}^a$ et des U^a !

Démonstration. — On sait que si $\bar{u}$ est sur-médiane sur K,

$$H_{\bar{A}}\bar{u} = \lim_{p \to \infty} \left[\sum_{\mathbb{N}} (I - M_{\bar{A}}\bar{N}_p)^n M_{\bar{A}}\bar{u} \right]$$

où $\bar{N}_p = p\bar{V}_p$ et $M_A = M_{1_A}$. Il vient donc :

$$(H_{\bar{A}}\bar{u}) \circ \phi = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{\mathbb{N}} [(I - M_{\bar{A}}\bar{N}_p)^n M_{\bar{A}}\bar{u}] \circ \phi \right)$$

Mais :

$$(M_{\bar{A}}\bar{u}) \circ \phi = M_{\phi^{-1}(\bar{A})}(\bar{u} \circ \phi) = M_A u \quad \text{et} \quad (\bar{N}_p\bar{f}) \circ \phi = (p\bar{V}_p\bar{f}) \circ \phi = pV_p f$$

d'où :

$$(H_{\bar{A}}\bar{u}) \circ \phi = \lim_{p \to \infty} \left(\sum_{\mathbb{N}} (I - M_A N_p)^n M_A u \right) = H_A u.$$

La résolvante $(\bar{V}_p)$ n'est que sous-markovienne, pour la rendre markovienne, on ajoute à K un point Δ et on pose $K_1 = K \cup \{ \Delta \}$. On identifie les fonctions définies sur K à celles définies sur K_1 et nulles en Δ. Si l'on pose pour tout $p > 0$:

$$W_p(x, .) = \bar{V}_p(x, .) + \frac{1 - p\bar{V}(x, 1)}{p} \varepsilon_\Delta \qquad \text{si } x \in K$$

$$W_p(\Delta, .) = \frac{1}{p} \varepsilon_\Delta .$$

On prolonge $(\bar{V}_p)_{p>0}$ en résolvante markovienne sur K_1. Il existe alors un processus de Ray sur $K_1(X_t)$, de résolvante $(W_p)_{p>0}$. Nous désignerons par ζ le temps d'atteinte de Δ.

PROPOSITION III-5. — *Pour une fonction $h \in \mathscr{C}_+$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1) *Le noyau U_h vérifie* (1).
2) *Il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante d'éléments de $\mathscr{C}$ et une fonction $f \in \mathscr{C}_+$ strictement positive avec Vf fini telle que :*

a) $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad Vh1_{A_n} < \infty$$
b) $$\lim_n \downarrow H_{A_n^c} Vf = 0$$

Démonstration. — Quitte à remplacer dans 2) f par af il suffit d'après le lemme III-1 de montrer que U_h^a vérifie (1) si et seulement si il existe $f \in \mathscr{C}_+$ strictement positive et (A_n) croissante de $\mathscr{C}$ telle que :

$$V^a h 1_{A_n} < \infty$$
$$\lim \downarrow H_{A_n^c} V^a f = 0 .$$

La condition est nécessaire :

On prend en effet $A_n = \left\{ U_{h/n} f > \frac{1}{n} \right\}$ si U_h vérifie (1) il en est de même de $U_{h/n}$ et $U_{h/n} f = V^a f - V^a M_{h/n} f \in \mathscr{C}_+$. Il s'ensuit que $A_n \in \mathscr{C}$. Le fait que $\lim \downarrow H_{A_n^c} V^a f = 0$ a été vu dans la première partie.

La condition est suffisante :

Soit $\bar{f} \in \mathscr{K}_+$ telle que $\bar{f} \circ \phi = f$, $\bar{h}$ telle que $\bar{h} \circ \phi = h$ et enfin $(\bar{A}_n)$ telle que $\phi^{-1}(\bar{A}_n) = A_n$. On peut supposer $\bar{f} > 0$ sur K et $\bar{f}(\Delta) = 0$. Comme pour toute fonction $\bar{f}$ sur K_1 nulle en Δ on a :

$$\bar{V}^a \bar{f}(\bar{x}) = \lim_{p\to 0} \bar{V}_p \bar{f}(\bar{x}) = \lim_{p\to 0} W_p \bar{f}(\bar{x}) \qquad (\bar{x} \neq \Delta)$$

on aura :

$$(\forall \bar{x} \in K) \quad \begin{cases} \bar{V}\bar{f}(\bar{x}) = E_{\bar{x}} \displaystyle\int_0^{\zeta} f(X_t)dt \\ \bar{U}_{\bar{h}} \bar{f}(x) = E_{\bar{x}} \displaystyle\int_0^{\zeta} e^{-\int_0^t \bar{h}(X_s)dt} \bar{f}(X_t)dt \end{cases}$$

Les mêmes calculs que ceux du lemme (II-1), donnent alors :

$$(\forall \bar{x} \in K) \qquad \sum_{\mathbb{N}} (\bar{U}_{\bar{h}} M_{\bar{h}})^n \bar{U}_{\bar{h}} \bar{f}(x) = E_x \int_0^{\inf(T_h, \zeta)} \bar{f}(X_t)dt .$$

Il reste à montrer que sous nos hypothèses $T_h > \zeta$ du moins sur $\phi(E)$. Soit donc $\bar{x} = \phi(x)$, $x \in E$ fixé ;

$$[\bar{V}(1_{\bar{A}_n}\bar{h})] \circ \phi(x) = (V^a 1_{A_n} h)(x) < +\infty .$$

Donc $P_{\bar{x}}$ p. s. :

$$\int_0^t h(x_s)ds < \infty \qquad \text{pour } t < T'_{\bar{A}_n}$$

($T'_{\bar{A}_n}$ étant le temps de pénétration introduit dans II).

Maintenant, d'après le lemme III-4

$$(H_{\bar{A}^c_{\bar{n}}}\bar{V}\bar{f}) \circ \phi(x) = H_{A^c_n}V^a f(x)$$

donc d'après la formule de balayage de Watanabé rappelée dans II :

$$\lim_{n\to\infty} E_{\bar{x}} \int_{T'_{\bar{A}^c_{\bar{n}}}}^{\zeta} f(X_t)dt = 0 \qquad \text{pour } \bar{x} \in \phi_a(E)$$

d'où $P_{\bar{x}}$ p. s. $T'_{\bar{A}^c_{\bar{n}}} \wedge \zeta \uparrow \zeta$. Ceci montre par un raisonnement analogue à (II-4) que :

$$\left[\sum_{\mathbb{N}} (\bar{U}_{\bar{h}}M_{\bar{h}})^n \bar{U}_{\bar{h}}\bar{f}\right]\phi_a(x) = \bar{V}^a\bar{f}\phi_a(x)$$

pour tout x de E. On a donc bien :

$$\Sigma(U_h M_h)^n U_h f = V^a f .$$

IV. CONCLUSION

Soit V un noyau propre sur l'espace séparable $(E, \mathscr{E})$. Appelons fonctions excessives les limites finies du type $\lim\limits_n \uparrow Vf_n$ où f_n est une suite croissante de $\mathscr{E}_+$ avec Vf_n finie.

Si l'on considère un noyau V^a de III les fonctions excessives précédentes sont les fonctions excessives associées à la résolvante $(V^a_p)_{p>0}$. La tribu engendré par ces fonctions est donc la tribu $\mathscr{C}$ de III. On retrouve le fait qu'elle ne dépend que de V.

Nous appellerons aussi topologie fine la plus petite topologie rendant continue ces fonctions excessives. La régularisée d'une fonction V-quasi-excessive, synonyme de V sur-médiane (voir [*8*]), f sera notée $\hat{f}$. Les ensembles de potentiel nul seront les ensembles A vérifiant $V1_A(x) = 0$ pour tout x. En particulier $\{ f = \hat{f} \}$ est de potentiel nul.

PROPOSITION. — *Soit* V *un noyau propre vérifiant le principe complet du maximum sur un espace séparable* (E, $\mathscr{E}$). *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Il existe une résolvante* $(V_p)_{p>0}$ *unique avec*

$$\lim_{p\to 0} V_p = V$$

b) *Il existe une fonction* f *strictement positive de potentiel* Vf *fini telle que :*

$$\lim \downarrow H_{\{U_{1/n}f<\frac{1}{n}\}} Vf = 0$$

c) *Il existe une suite croissante* (A_n) *d'éléments de* $\mathscr{T}$ *avec* $\bigcup_n A_n = E$ *à un ensemble de potentiel nul près, et* $f \in \mathscr{E}_+$ *strictement positive avec* Vf *fini telles que :*

$$V1_{A_n} < \infty$$

$$\lim \downarrow H_{A_n^c} Vf = 0$$

d) *Même chose que* c) *avec* A_n *dans* $\mathscr{E}$.

COROLLAIRE. — *Sous les mêmes hypothèses, pour une fonction* $h \in \mathscr{E}_+$ *les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le noyau* U_h *vérifie* (1)

b) *Il existe* $f > 0$ *avec* Vf *fini telle que :*

$$\lim_n \downarrow H_{\{U_{h/n}f<\frac{1}{n}\}} Vf = 0 .$$

c) *Il existe une suite croissante* (A_n) *de* $\mathscr{T}$ *avec* $\bigcup_n A_n = E$ *à un ensemble de potentiel nul près telle que*

$$Vh1_{A_n} < \infty$$

$$\lim_n H_{A_n^c} Vf = 0$$

pour une fonction $f > 0$ *avec* Vf *fini.*

d) *Même chose avec* A_n *dans* $\mathscr{E}$.

Le corollaire résulte de la proposition car l'existence de U_h équivaut à celle de la résolvante associée à VM_h.

Démonstration de la proposition

a) $\Rightarrow$ *b*) En effet c'est la démonstration de Hirsh :

$$H_{\{U_{h/n}f<\frac{1}{n}\}} Vf < \frac{1}{n} + \left[Vf - \frac{1}{n} f \right]$$

b) $\Rightarrow$ *c)* Si f est strictement positif, comme $VM_f 1_{\{Vf=0\}} = 0$ d'après le principe complet du maximum, $\{ Vf = 0 \}$ est de potentiel nul. Il suffit de prendre :

$$A_n = \left\{ U_{\frac{1}{n}} f > \frac{1}{n} \right\} \cup \{ Vf = 0 \}$$

c) $\Rightarrow$ *d)* Évident.

d) $\Rightarrow$ *c)* Posons $A'_n = \{ \widehat{H_{A_n^c} Vf} \neq Vf \}$ c'est un ensemble $\mathscr{C}$ mesurable et $A_n'^c$ ne diffère que d'un ensemble de potentiel nul de $\{ H_{A_n^c} Vf = Vf \}$ or :

$$H_{A_n'^c} Vf = H_{\{H_{A_n'^c} Vf = Vf\}} Vf = H_{A_n^c} Vf$$

(car $H_A Vf = H_{\{H_A Vf = Vf\}} Vf$) donc $\lim_n H_{A_n'^c} Vf = 0$. De plus $A_n'^c \supset A_n^c$ donc $A'_n \subset A_n$ d'où :

$$V 1_{A'_n} < \infty$$

Enfin :

$$H_{\bigcap_n A_n'^c} Vf \leqslant H_{A_n'^c} Vf \qquad \text{donc} \qquad H_{\bigcap_n A_n'^c} Vf = 0 .$$

Soit $x \in \bigcap_n A_n'^c$ on a :

$$Vf(x) = H_{\bigcap_n A_n'^c} Vf(x) = 0$$

d'où $\bigcap_n A_n'^c \subset \{ Vf = 0 \}$ et $\bigcap_n A_n'^c$ est de potentiel nul.

c) $\Rightarrow$ *a)* Il résulte de *c)* que V est un noyau propre sur $(E, \mathscr{C})$; il existe donc $a \in \mathscr{C}$ strictement positive avec Va finie. Compactifions E pour la résolvante (V_p^a) (notation de III) l'existence de la résolvante $(V_p)_{p>0}$ est équivalente à celle des noyaux U_p^a (notation de III). Il suffit d'appliquer alors les résultats de III pour obtenir la propriété cherchée.

PROPOSITION. — *Pour* $h \in \mathscr{E}_+$ *si* U_h *vérifie* (1) *la fonction* $U_h f$ *est finement continue dès que* $V | f |$ *est finie.*

C'est la démonstration de la proposition II-2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. NEVEU, Potentiel récurrent des chaînes de Harris. *Annales de l'Inst. Fourier*, Grenoble, t. **2**, 1972, p. 22.

[2] F. HIRSH, Conditions nécessaires et suffisantes d'existence de familles résolvantes. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, vol. **29**, 1974.

[3] J. C. TAYLOR, On the existence of sub-markovien resolvent. *Inv. Math.*, t. **17**, 1972.

[4] J. C. TAYLOR, A caracterisation of kernel $\lim_{\lambda \downarrow 0} V\lambda$ for sub-markovien resolvent $(V\lambda)$ *(A paraître).*

[5] G. MOKOBODZKI, *Compactification associée à une résolvante*. Séminaire Goulaouic-Schwartz, 1971.
[6] T. WATANABE, On balayees of excessive mesures and fonctions with respect to resolvents. Séminaire n° V, Strasbourg. *Lecture notes*.
[7] P. A. MEYER, Processus de Markov. *Lecture notes*, n° 26, 1967.
[8] F. BRONNER, Principe du maximum et résolvantes sous-markoviennes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1973, p. 277 et thèse de 3e cycle, Paris, juin 1973.

(Manuscrit reçu le 17 avril 1975)