

# ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

B. GAVEAU

## Désintégration des fonctionnelles de Markov

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 11, n° 4 (1975), p. 317-324

[http://www.numdam.org/item?id=AIHPB\\_1975\\_\\_11\\_4\\_317\\_0](http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1975__11_4_317_0)

© Gauthier-Villars, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Annales de l'I. H. P., section B* » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## Désintégration des fonctionnelles de Markov

par

**B. GAVEAU**

Université des Sciences et Techniques de Lille I.  
U. E. R. de Mathématiques pures et appliquées

### INTRODUCTION

Soit  $M$  une variété riemannienne,  $ds^2$  sa métrique,  $\Delta$  son laplacien,  $U$  ouvert borné de  $M$ ,  $u : U \rightarrow [0, \alpha_0[$  ( $\alpha_0 < +\infty$ ) une fonction d'exhaustion de classe  $C^2$  sur  $U$  (au sens où pour  $\alpha < \alpha_0$ ,  $u^{-1}([0, \alpha])$  est compact dans  $U$ ). On supposera que  $\Delta u$  et  $\|\nabla u\|$  sont bornés dans  $U$  ( $\|\nabla u\|$  dénote la longueur du gradient dans la métrique duale). Soit  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{R}$  fonction mesurable et sa fonctionnelle associée  $\int_0^{t \wedge \zeta} \Psi(X_s) ds$  où  $(X_s)_s$  est le brownien de  $M$  stoppé au temps de sortie  $\zeta$  de  $U$ , dont le générateur est  $\frac{1}{2} \Delta$ .

Le but de ce travail est d'écrire cette fonctionnelle — qui est *a priori* une intégrale de temps de séjour — comme une intégrale sur l'espace des valeurs de  $u$  en désintégrant le processus  $(X_s)$  par une famille continue de processus du type de Cauchy sur les surfaces de niveau de  $U$ .

Lorsque  $U = \mathbb{R}$ ,  $u(x) = x$  et  $\frac{1}{2} \Delta = \frac{1}{2} \psi(x) \frac{d^2}{dx^2}$ , ce problème est résolu dans le livre de Itô MacKean [1] par la formule

$$\int_0^t \Psi(X_s) ds = \int_{\mathbb{R}} \tau(t, x) \Psi(x) m(dx)$$

où  $\tau(t, x)$  est le temps local passé en  $x$  jusqu'à l'instant  $t$  par la diffusion  $(X_s)_s$ , et  $dm(x)$  est la mesure de vitesse de  $(X_s)_s$ . Dans le cas général, la formule fait intervenir des processus du type Cauchy sur les surfaces de niveau de  $u$  (voir ③).

On calcule d'abord le temps local associé à la fonction d'épuisement  $u$  en utilisant la méthode de MacKean exposée dans [2]; ce temps local diffère des temps locaux introduits par Blumenthal et Gettoor dans [3]. Au ③ est énoncée et démontrée la formule de désintégration.

## I. TEMPS LOCAL ASSOCIÉ A UNE FONCTION D'EXHAUSTION

On utilisera les notations de l'introduction. On va démontrer, en utilisant la méthode MacKean ([2], p. 68).

THÉORÈME 1.

1) Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$  la limite suivante existe

$$\tau(\alpha, t \wedge \zeta) = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta[}(u(X_s)) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds}{2(\beta - \alpha)}$$

où  $\|\nabla u\|^2$  est le carré de la longueur du gradient de  $u$  calculé dans la métrique duale.

2)  $\tau(\alpha, t \wedge \zeta)$  est une fonctionnelle additive de  $(X_s)_s$ , croissante en  $t$ , et le support de la mesure (positive)  $\tau(\alpha, dt)$  est contenu dans  $\{t/u(X_t) = \alpha\}$ , et est presque sûrement continue en  $\alpha$ .

3)  $\tau(\alpha, t \wedge \zeta)$  a l'expression intégrale stochastique suivante : pour tout  $\alpha < \alpha_0$ , presque sûrement, pour tout  $t$ , on a

$$\tau(\alpha, t \wedge \zeta) = \text{Inf}(\alpha - u(X_0), 0) + \text{sup}(u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha, 0) - \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(u(X_s)) d(u(X_s))$$

*Preuve.* — Comme dans [2] on fait apparaître la quantité

$$\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta[}(u(X_s)) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds$$

en posant

$$A(x) = \int_{u(b_0)}^x dy \int_{-\infty}^y \mathbb{1}_{[\alpha, \beta[}(z) dz$$

et en développant  $A(u(X_t))$  par la formule de Itô : il vient

$$A(u(X_{t \wedge \zeta})) = \int_0^{t \wedge \zeta} d(u(X_s)) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(u(X_s)) (d(u(X_s)))^2$$

Mais il existe un brownien euclidien standard  $b_s$  tel que

$$d(u(X_s)) = \vec{\nabla}u(X_s) \cdot \sigma(d\vec{b}_s) + \frac{1}{2}(\Delta u)(X_s) ds$$

où  $\sigma$  est l'endomorphisme dont la matrice est la racine carrée symétrique positive de la matrice inverse  $(g^{ij})_{ij}$  de la métrique riemannienne et où le  $\cdot$  est le produit scalaire. D'où on a  $(d(u(X_s)))^2 = \|\vec{\nabla}u(X_s)\|^2 ds$  et par suite on déduit

$$(1) \quad \frac{1}{2} \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(u(X_s)) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds = A(u(X_{t \wedge \zeta})) - \int_0^{t \wedge \zeta} d(u(X_s)) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(y) dy$$

Calculons l'intégrale dans le membre de droite de (1) : presque sûrement, pour  $n$  grand, on a par une approximation en sommes de Riemann

$$\int_0^{t \wedge \zeta} ds \left| \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(y) dy - \sum_{\alpha \leq \frac{k}{2^n} < \beta} \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, +\infty]}(u(X_s)) 2^{-n} \right|^2 \leq \frac{C}{2^n}.$$

Comme on suppose  $\Delta u$  borné, on a

$$(2) \quad \int_0^{t \wedge \zeta} (\Delta u)(X_s) ds \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(y) dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\alpha \leq \frac{k}{2^n} < \beta} \frac{1}{2^n} \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, +\infty]}(u(X_s)) (\Delta u)(X_s) ds.$$

De même puisque  $\|\nabla u\|$  est borné, on a presque sûrement convergence des intégrales stochastiques (par construction même voir [2])

$$(3) \quad \int_0^{t \wedge \zeta} (\vec{\nabla}u)(X_s) \cdot \sigma(d\vec{b}_s) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(y) dy = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\alpha \leq \frac{k}{2^n} < \beta} \frac{1}{2^n} \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\frac{k}{2^n}, +\infty]}(u(X_s)) \cdot (\vec{\nabla}u)(X_s) \cdot \sigma(d\vec{b}_s)$$

d'où

$$(4) \quad \int_0^{t \wedge \zeta} d(u(X_s)) \int_{-\infty}^{u(X_s)} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(y) dy \\ = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\alpha \leq \frac{k}{2^n} < \beta} \frac{1}{2^n} \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, +\infty\right]}(u(X_s)) d(u(X_s)).$$

Introduisons

$$j_t(x) = \int_0^t \mathbb{1}_{[x, +\infty]}(u(X_s)) d(u(X_s)) \\ j_t^*(x) = \liminf_{\frac{k}{2^n} \downarrow x} j_t\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

en vue d'avoir une version continue de  $j_t(x)$  par le lemme suivant :

LEMME 1. — *Presque sûrement*  $x \rightarrow j_t^*(x)$  *est continu et pour tout*  $x \in \mathbb{R}$ , *presque sûrement (dépendant de*  $x$ *), on a*  $j_t(x) = j_t^*(x)$ .

Admettant ce lemme pour un moment, on déduit donc que pour tout  $t$  presque sûrement, pour tout  $k, n$  entiers, on a

$$\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{\left[\frac{k}{2^n}, +\infty\right]}(u(X_s)) d(u(X_s)) = j_t^*\left(\frac{k}{2^n}\right)$$

et par suite (4) devient, puisque  $j_t^*$  est continu presque sûrement, pour tout  $\alpha, \beta$  :

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{\alpha \leq \frac{k}{2^n} < \beta} 2^{-n} j_t^*\left(\frac{k}{2^n}\right) = \int_\alpha^\beta j_t^*(x) dx.$$

Utilisant, alors (1), (4), (5), on déduit que pour tout  $t$ , presque sûrement, pour tout  $\alpha, \beta$  on a

$$(6) \quad \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(u(X_s)) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds \\ = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{u(X_s)}^{u(X_{t \wedge \zeta})} dy \int_{-\infty}^y \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(z) dz - \frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta j_t^*(x) dx.$$

a) Comme  $j_t^*$  est continu,  $\frac{1}{\beta - \alpha} \int_\alpha^\beta j_t^*(x) dx \rightarrow j_t^*(\alpha)$  si  $\beta \rightarrow \alpha$ .

b) Si  $\alpha < u(X_t)$  et  $\alpha < u(X_s)$ , pour  $\beta - \alpha$  petit,  $\alpha < \beta < u(X_t)$  et  $u(X_s)$ , d'où la première intégrale du membre de droite de (6) tend vers  $u(X_{t \wedge \zeta}) - u(X_s)$  c'est-à-dire bien vers

$$\sup(u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha, 0) + \inf(\alpha - u(X_0), 0)$$

Si  $u(X_0) < \alpha < u(X_{t \wedge \zeta})$ , on a de même une limite égale à

$$u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha = \sup (u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha, 0) + \text{Inf} (\alpha - u(X_0), 0)$$

et de même dans les deux autres cas.

Par conséquent le membre de gauche de (6) a une limite si  $\beta \rightarrow \alpha$  et pour tout  $t$ , presque sûrement pour tout  $\alpha$  on a

$$(7) \quad \tau(t, \alpha) = \sup (u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha, 0) + \text{Inf} (\alpha - u(X_0), 0) - j_t^*(\alpha)$$

d'où par le lemme 1, pour tout  $t$ , pour tout  $\alpha$ , presque sûrement la même formule avec  $j_t(\alpha)$  ou bien  $j_t^*(\alpha)$ . D'où cela a lieu pour tout  $\alpha$ , p. s., pour tout  $t$  dyadique. Comme  $\tau(t, \alpha)$  croît en  $t$  et que  $j_t(\alpha)$  et  $u(X_{t \wedge \zeta})$  sont continus p. s. en  $t$ , on a finalement, pour tout  $\alpha$ , p. s., pour tout  $t$ ,

$$\tau(t, \alpha) = \sup (u(X_{t \wedge \zeta}) - \alpha, 0) + \text{Inf} (\alpha - u(X_0), 0) - \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(u(X_s))d(u(X_s)).$$

Ceci montre ③ du théorème et la formule (7) démontre le ① avec un p. s. indépendant de  $t$  et  $\alpha$ .

*Preuve du lemme 1.* — Elle se fait de la même façon que dans MacKean ([2], p. 16) en utilisant un lemme dû à Kolmogoroff : il suffit de voir que

$$E(|j_t(x) - j_t(y)|^4) \leq C|x - y|^2$$

Or

$$\begin{aligned} E(|j_t(x) - j_t(y)|^4) &= E\left(\left|\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))d(u(X_s))\right|^4\right) \\ &\leq CE\left(\left|\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))\vec{\nabla}u(X_s) \cdot \sigma(d\vec{b}_s)\right|^4\right) \\ &\quad + C'E\left(\left|\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))ds\right|^4\right) \end{aligned}$$

car  $\Delta u$  est bornée. Or l'espérance de la puissance 4<sup>ème</sup> de l'intégrale stochastique  $x$  est contrôlée par

$$CE\left(\left|\int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[x,y]}(u(X_s))ds\right|^2\right)$$

car  $\|\nabla u\|$  est borné et donc  $E(|j_t(x) - j_t(y)|^4)$  se contrôle par l'espérance de la puissance 2 ou 4 du temps de séjour de  $X_s$  dans  $u^{-1}([x, y])$  ce qui se contrôle par la puissance 2 ou 4 du volume de  $u^{-1}([x, y])$  c'est-à-dire puisque  $U$  est ouvert borné de  $M$  par  $|x - y|^2$  ou  $|x - y|^4$ .

FIN DU THÉORÈME 1.

① posant  $\psi_t = \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(u(X_s)) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds$  si on a  $s < t < \zeta$ , on a facilement

$$\psi_t = \psi_s + \psi_{t-s} \circ \theta_s$$

donc  $\psi_t$  est fonctionnelle de Markov et  $\tau(t, \alpha)$  aussi.

② Supposons que  $u(X_t) \neq \alpha$  et soit  $t_1 < t < t_2$  avec  $\alpha \notin [u(X_{t_1}), u(X_{t_2})]$ . Alors  $\int_{t_1}^{t_2} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(u(X_s)) \|\nabla u(X_s)\|^2 ds = 0$  si  $\beta$  est assez petit ; donc  $\tau(t_1, \alpha) = \tau(t_2, \alpha)$ . La formule (7) et la continuité p. s. de  $j_t^*(\alpha)$  montrent que  $\alpha \rightarrow \tau(t, \alpha)$  est continu.

## II. COMPARAISON AVEC D'AUTRES NOTIONS DE TEMPS LOCAL

a) Dans [3], Blumenthal et Gettoor introduisent une notion générale de temps local de la façon suivante : posons  $A_t = t \wedge \zeta$  qui est trivialement une fonctionnelle additive. Soit E un borélien, par exemple de capacité  $> 0$  et finement fermé. Le temps local de E au sens de Blumenthal et Gettoor est la balayée de  $A_t$  sur E, i. e. la fonctionnelle de Markov qui satisfait

$$E_x \left( \int_0^{+\infty} dB_t^E \right) = E_x(E_{X_{T_E}}(\zeta))$$

où  $T_E$  le premier temps de rencontre de E (de façon plus générale si  $(A_t)_t$  est fonctionnelle additive et si  $u_A(x) = E_x(A_\infty)$  est son potentiel, si D est u un borélien et si  $v(X) = E_x(u_A(X_{T_D}))$ , alors v est le potentiel d'une fonctionnelle unique B).

Dans le cas présent, on a  $\text{supp } B_t^E = E$ .

*Cependant, cette fonctionnelle  $B_t^E$  ne coïncide pas en général avec le temps local  $\tau(t, \alpha)$  si  $E = u^{-1}(\alpha)$  est la surface de niveau de u.*

Prenons par exemple le disque unité de  $\mathbb{C}$ ,  $\Delta$ , le brownien standard stoppé au temps de sortie  $T_\Delta$  et utilisons comme fonction d'exhaustion  $u(x) = E_x(T_\Delta)$  de sorte que  $\frac{1}{2} \Delta u = -1$ , d'où

$$u(z) = 2(\Phi(1) - \Phi(|z|))$$

où  $\Phi(\rho) = \int_0^\rho \frac{ds}{s} \int_0^s u du = \frac{1}{4} \rho^2$  et donc

$$u(z) = \frac{1}{2} (1 - |z|^2)$$

Prenons  $E_r = u^{-1}(r)$  :  $E_r$  est le cercle de centre O et de rayon  $\sqrt{1 - 2r}$ .

D'après [3], on aurait partant de O,

$$E_0(\mathbf{B}_{T_\Delta}^{E_r}) = rE_0(T_{E_r} \leq T_\Delta) = r$$

Calculons alors  $E_0(\tau(T_\Delta, r))$  : posons  $Y_s = u(b_s)$  c'est la diffusion sur  $\mathbb{R}$  solution de  $dY_s = \sqrt{1 - 2Y_s}d\tilde{b}_s - ds$  où  $\tilde{b}_s$  est brownien sur  $\mathbb{R}$ .

Notons  $\tilde{E}$  l'espérance pour  $Y_s$  on a

$$E_0(\tau(T_\Delta, r)) = \tilde{E}_{\frac{1}{2}}(\tau(T_0, r)) = s(0) - s(r)$$

où  $s(y) = \frac{1}{2} \log(1 - 2y)^{-1}$  est l'échelle de l'opérateur  $\frac{1}{2}(1 - 2y) \frac{d^2}{dy^2} - \frac{d}{dy}$  (voir [1]),

b) Soit  $dX_s = \psi(X_s)db_s$  un brownien changé de temps sur  $\mathbb{R}$  de générateur  $\frac{1}{2}\psi^2(x) \frac{d^2}{dx^2}$  et prenons  $u(x) = x$ , alors  $\|\nabla u\|^2 = \psi^2(x)$  et on a alors le théorème 1

$$\tau_\psi(t, \alpha) = \lim \frac{\left( \int_0^{t \wedge \zeta} \mathbb{1}_{[\alpha, \beta]}(X_s) ds \right)}{2(\beta - \alpha)} \psi^2(\alpha)$$

puisque  $\psi$  est continue.

Mais  $\frac{dx}{\psi^2(x)} = dm(x)$  est précisément la mesure de *vitesse* du processus  $(X_s)$ , au sens de [1] et par suite *le temps local*  $\tau_\psi(t, \alpha)$  est exactement le *temps local naturel défini par Itô et MacKean* pour une diffusion linéaire qui est un brownien changé de temps (voir [1]); d'autre part il est immédiat de montrer la formule

$$\tau_\psi(t, \alpha) = \tilde{\tau}_1(\theta(t), \alpha)$$

ou ici on a posé  $X_s(\omega) = \tilde{b}_{\theta(s)}(\tilde{\omega})$  avec  $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$  conservant la probabilité,  $b$  un brownien standard  $\tilde{\omega}$  et  $\theta_t = \int_0^t \psi^2(X_s) ds$  et  $\tilde{\tau}_1$  est le temps local du brownien standard  $\tilde{b}$  : en effet

$$\begin{aligned} \int_0^t \mathbb{1}_{[\alpha, \alpha + \varepsilon]}(X_s) ds &= \int_0^t \mathbb{1}_{[\alpha, \alpha + \varepsilon]}(b_{(s)}) ds = \int_0^{\theta(t)} \mathbb{1}_{[\alpha, \alpha + \varepsilon]}(\tilde{b}(u)) d(\theta_u^{-1}) \\ &= \int_0^{\theta(t)} \mathbb{1}_{[\alpha, \alpha + \varepsilon]}(\tilde{b}(u)) \frac{du}{\psi^2(X_{\theta_u^{-1}})} \simeq \frac{2\varepsilon}{\psi^2(\alpha)} \tilde{\tau}_1(\theta_t, \alpha) \end{aligned}$$

si  $\varepsilon \rightarrow 0$  puisque le support de  $\tilde{\tau}_1(t, \alpha)$  est  $\{\alpha\}$  et que  $X_{\theta_t^{-1}} = \tilde{b}_u$ .



### III. DÉSINTÉGRATION DES FONCTIONNELLES DE MARKOV

Reprenons les notations du ① et soit  $\tau_\alpha^{-1}(s)$  l'inverse contenu à droite de la fonction croissante  $s \rightarrow \tau(\alpha, s)$ . Posons  $Y_s^{(\alpha)} = X_{\tau_\alpha^{-1}(s)}$ .

THÉORÈME 2.

①  $Y_s^{(\alpha)}$  est un processus de Markov à trajectoires continues à droite, ayant des limites à gauche tel que  $Y_s^{(\alpha)} \in u^{-1}(\alpha) \forall s$ .

② pour toute fonction mesurable  $\Psi$ , on a

$$(8) \quad \int_0^{t \wedge \zeta} \Psi(X_s) ds = 2 \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_0^{\tau_\alpha^{-1}(t \wedge \zeta)} \frac{\Psi(Y_s^{(\alpha)})}{\|\nabla u\|^2(Y_s^{(\alpha)})} ds$$

Preuve. — On a par la définition du théorème 1

$$(9) \quad 2\tau(\alpha, ds) \otimes d\alpha = \{u(X_s) \in d\alpha\} \|\nabla u\|^2(X_s) ds$$

Posant  $\psi(x) = \frac{\Psi(x)}{\|\nabla u\|^2}$  et intégrant d'abord en  $s$  la relation (9) multipliée par  $\psi(X_s)$  puis ensuite en  $\alpha$ , on a que

$$\int_0^{t \wedge \zeta} \Psi(X_s) ds = \int_0^{\alpha_0} d\alpha \int_0^{t \wedge \zeta} \frac{\psi(X_s)}{\|\nabla u(X_s)\|^2} \tau(\alpha, ds).$$

Posant  $s = \tau_\alpha^{-1}(u)$ , on a alors la formule (8).

La première partie du théorème 2 résulte de la continuité de  $X_s$ , du fait que  $\tau$  est fonctionnelle de Markov à support dans  $u^{-1}(\alpha)$ .

#### REFERENCES

- [1] K. ITO and H. P. MACKEAN, Jr, *Diffusion processes and their sample paths*. Springer Verlag, 1965.
- [2] H. P. MACKEAN, Jr, *Stochastic integrals*. Academic Press, 1969.
- [3] R. BLUMENTHAL and R. GETTOOR, *Markov processes and Potential theory*. Academic Press, 1968.

(Manuscrit reçu le 30 juin 1975)