

ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

J. NEVEU

Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, n° 2 (1976), p. 105-109

http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_2_105_0

© Gauthier-Villars, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales de l'I. H. P., section B » (<http://www.elsevier.com/locate/anihpb>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Sur l'espérance conditionnelle par rapport à un mouvement brownien

par

J. NEVEU (*)

RÉSUMÉ. — L'objet de cette note est de retrouver par une méthode d'intégration stochastique en même temps que de généraliser un résultat récent de Nelson (corollaire 2 ci-dessous) concernant les espérances conditionnelles de variables gaussiennes qu'il ne semble curieusement pas possible de prouver par une méthode plus élémentaire.

SUMMARY. — The method of stochastic integration allows us to give a new proof and also to generalize a recent result due to Nelson on conditional expectations of gaussian variables that does not seem to admit an elementary proof.

Soit (Ω, \mathcal{A}, P) un espace de probabilité et soit $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{A} . Soient $(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $(\eta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ deux mouvements browniens relativement à \mathcal{B} ; ceci signifie que ξ et η sont deux fonctions aléatoires à trajectoires continues, telles que ξ_t (resp. η_t) soit \mathcal{B}_t -mesurable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et que $\xi_t - \xi_s$ (resp. $\eta_t - \eta_s$) soit indépendante de \mathcal{B}_s pour tous $s < t$ dans \mathbb{R}_+ . Dans la théorie des martingales, on montre que cela revient à supposer que ξ et η sont deux \mathcal{B} -martingales de carrés intégrables à trajectoires continues telles que $(\xi_t^2 - t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $(\eta_t^2 - t, t \in \mathbb{R}_+)$ soient aussi des \mathcal{B} -martingales. De plus il existe une fonction aléatoire réelle \mathcal{B} -progressivement mesurable $(\rho_t, t \in \mathbb{R}_+)$ à valeurs dans $[-1, +1]$, unique à une $dt dP$ équivalence près sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$, telle

(*) Membre du Laboratoire Associé au C. N. R. S. (n° 224) « Processus stochastiques et applications ».

que $\left(\xi_t \eta_t - \int_0^t \rho_s ds, t \in \mathbb{R}_+ \right)$ soit une \mathcal{B} -martingale intégrable ; on pourra appeler cette fonction aléatoire la corrélation instantanée des deux mouvements browniens.

Désignons par $\mathcal{F}_t (t \in \mathbb{R}_+)$ et \mathcal{F} , resp. $\mathcal{G}_t (t \in \mathbb{R}_+)$ et \mathcal{G} les sous-tribus de $\mathcal{B}_t (t \in \mathbb{R}_+)$ et \mathcal{A} engendrées par les variables aléatoires $\xi_s (s \leq t \text{ ou } s \in \mathbb{R}_+)$, resp. $\eta_s (s \leq t \text{ ou } s \in \mathbb{R}_+)$. Notons que les propriétés d'indépendance du mouvement brownien ξ relativement à \mathcal{B} entraînent l'égalité des espérances conditionnelles $E^{\mathcal{B}_t}$ et $E^{\mathcal{F}_t}$ sur $L^1(\mathcal{F})$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, si $L^1(\mathcal{F})$ désigne le sous-vectoriel fermé de $L^1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ formé par les classes d'équivalence de variables aléatoires \mathcal{F} -mesurables intégrables. De même $E^{\mathcal{B}_t} = E^{\mathcal{G}_t}$ sur $L^1(\mathcal{G})$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Considérons alors l'opérateur $T : L^1(\mathcal{F}) \rightarrow L^1(\mathcal{G})$ égal à la restriction au premier espace de l'espérance conditionnelle $E^{\mathcal{G}}$. D'après les propriétés classiques des espérances conditionnelles, l'opérateur T est aussi par restriction une application linéaire de norme 1 de $L^p(\mathcal{F})$ dans $L^p(\mathcal{G})$ pour tout $p \in [1, \infty]$. L'objet de la proposition suivante est d'améliorer ce résultat en introduisant une hypothèse sur la corrélation des deux mouvements browniens.

PROPOSITION 1. — Si $|\rho_t(\omega)| \leq r [dt dP]$ presque partout sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ pour un réel $r \in [0, 1]$ et si $p, q \in [1, \infty]$ sont deux réels tels que $p - 1 \geq r^2(q - 1)$ alors l'opérateur T définit par restriction une application linéaire de norme 1 de l'espace $L^p(\mathcal{F})$ dans $L^q(\mathcal{G})$.

Démonstration. — Il n'y a à considérer que le cas où $p, q \in]1, \infty[$. Compte tenu de la densité de $L^\infty(\mathcal{F})$ dans $L^p(\mathcal{F})$ pour tout p , il suffit de démontrer que $\|T(X)\|_q \leq \|X\|_p$ pour tout $X \in L^\infty(\mathcal{F})$ et comme T est un opérateur linéaire positif (de sorte que $|T(X)| \leq T(|X|)$) il suffit déjà de démontrer l'inégalité précédente lorsque $X \in L^{\infty}_+(\mathcal{F})$. A cet effet, il suffira encore d'après la théorie de la dualité des espaces L^q , d'établir que

$$E[T(X) \cdot Y] \leq \|X\|_p \|Y\|_{q'}$$

pour tous $X \in L^{\infty}_+(\mathcal{F})$, $Y \in L^{\infty}_+(\mathcal{G})$ en désignant par q' l'indice conjugué de q défini par $(q' - 1)(q - 1) = 1$ (i. e. par $1/q + 1/q' = 1$). Enfin il suffira même d'établir cette égalité lorsque $a \leq X \leq b$ et $a \leq Y \leq b$ dans $L^\infty(\mathcal{F})$ et $L^\infty(\mathcal{G})$ resp., pour deux constantes a, b quelconques telles que $0 < a < b < \infty$. Notons aussi que $E[T(X)Y] = E(XY)$ d'après la définition de projecteur orthogonal de T .

Étant donné $X \in L^\infty(\mathcal{F})$ telle que $a \leq X \leq b$ ($0 < a < b < \infty$), formons

la \mathcal{F} -martingale $M_t = E^{\mathcal{F}_t}(X^p)$ ($t \in \mathbb{R}_+$). Il en existe une version à trajectoires continues représentable par une intégrale stochastique :

$$M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s d\xi_s \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

avec $M_0 = E(X^p)$, pour une fonction aléatoire ϕ progressivement mesurable relativement à \mathcal{F} et de carré intégrable par rapport à $dt dP$ sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Observons que $a^p \leq M_t \leq b^p$ ($t \in \mathbb{R}_+$) p. s. et que $(M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est aussi une \mathcal{B} -martingale puisque $E^{\mathcal{B}_t} = E^{\mathcal{F}_t}$ sur $L^2(\mathcal{F})$. Semblablement si on donne $Y \in L^\infty(\mathcal{G})$ telle que $a \leq Y \leq b$, il existe une version continue de la \mathcal{G} -martingale $(N_t = E^{\mathcal{G}_t}(Y^q), t \in \mathbb{R}_+)$ représentable par une intégrale stochastique

$$N_t = N_0 + \int_0^t \psi_s d\eta_s \quad (t \in \mathbb{R}_+)$$

pour une fonction aléatoire ψ progressivement mesurable relativement à \mathcal{G} et de carré intégrable relativement à $dt dP$; de plus $a^q \leq N_t \leq b^q$ et N est aussi une \mathcal{B} -martingale.

Appliquons la formule de dérivation stochastique de Ito aux deux \mathcal{B} -martingales M et N et à la fonction $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ ($\alpha = 1/p, \beta = 1/q'$) qui est une fonction de classe C^2 sur le compact $[a^p, b^p] \times [a^q, b^q]$ où (M_t, N_t) prend ses valeurs ($t \in \mathbb{R}_+$). Il vient ainsi

$$d(M_t^\alpha N_t^\beta) = (\alpha M_t^{\alpha-1} N_t^\beta dM_t + \beta M_t^\alpha N_t^{\beta-1} dN_t) + \frac{1}{2} M_t^\alpha N_t^\beta A_t dt$$

où

$$A_t = \alpha(\alpha - 1) \left(\frac{\phi_t}{M_t}\right)^2 + 2\alpha\beta \frac{\phi_t}{M_t} \cdot \frac{\psi_t}{N_t} \rho_t + \beta(\beta - 1) \left(\frac{\psi_t}{N_t}\right)^2.$$

Le premier terme du second membre de la formule précédente est une martingale bornée dans L^2 car il en est ainsi de M resp. N et car les fonctions aléatoires $\alpha M_t^{\alpha-1} N_t^\beta$ resp. $\beta M_t^\alpha N_t^{\beta-1}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} E(XY) - \|X\|_p \|Y\|_q &= E(M_\infty^\alpha N_\infty^\beta) - E(M_0^\alpha N_0^\beta) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dt E[M_t^\alpha N_t^\beta A_t] \end{aligned}$$

Or si $\alpha(\alpha - 1) \cdot \beta(\beta - 1) \geq (\alpha\beta\rho_t)^2 [dt dP]$ presque partout, l'expression $A_t(\omega)$ est p. p. du même signe que $\alpha(\alpha - 1)$, c'est-à-dire négative; nous avons donc démontré que lorsque $\rho_t^2 \leq (1 - 1/\alpha)(1 - 1/\beta)$ c'est-à-dire lorsque

$\rho_i^2 \leq (p-1)(q'-1)$ presque partout l'inégalité $E(XY) - \|X\|_p \|Y\|_{q'} \leq 0$ a lieu. ■

Le corollaire suivant se trouve dans [2]

COROLLAIRE 2. — Soit (ξ, η) un vecteur gaussien centré bi-dimensionnel tel que $E(\xi^2) = 1 = E(\eta^2)$ et $E(\xi\eta) = \rho$ et soit $g(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ la densité gaussienne réduite sur \mathbb{R} . Si p, q sont deux réels dans $[1, \infty[$, l'opérateur linéaire U de $L^1(\mathbb{R}, gdx)$ dans lui-même défini par l'espérance conditionnelle

$$Uf \circ \eta = E[f \circ \xi | \eta] \quad (f \in L^1(\mathbb{R}, gdx))$$

envoie continûment $L^p(gdx)$ dans $L^q(gdx)$ si et seulement si $p-1 \geq \rho^2(q-1)$. Lorsque cette condition est satisfaite la norme $\|U\|_{L^p, L^q}$ vaut 1.

Démonstration. — Soit $((\xi_t, \xi'_t); t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien bi-dimensionnel défini sur un espace de probabilité (Ω, \mathcal{A}, P) et soit $(\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ la famille croissante des tribus que ce processus engendre (tribus propres). Étant donné un réel ρ dans $[-1, +1]$, posons

$$\eta_t = \rho \xi_t + (1 - \rho^2)^{1/2} \xi'_t \quad (t \in \mathbb{R}_+);$$

alors $(\xi_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et $(\eta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sont deux mouvements browniens relativement à $(\mathcal{B}_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et la fonction aléatoire $(\xi_t \eta_t - \rho t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une \mathcal{B} -martingale de sorte que la proposition précédente s'applique; d'autre part (ξ_1, η_1) est un vecteur gaussien centré tel que $E(\xi_1^2) = 1 = E(\eta_1^2)$, $E(\xi_1 \eta_1) = \rho$.

Comme la variable aléatoire ξ_1 et la tribu \mathcal{G} engendrée par $(\eta_t, t \in \mathbb{R}_+)$ sont indépendantes conditionnellement en η_1 , nous avons

$$Uf \circ \eta_1 = E[f \circ \xi_1 / \eta_1] = E[f \circ \xi_1 | \mathcal{G}] = T(f \circ \xi_1)$$

et il résulte donc de la proposition précédente que

$$\|Uf\|_{L^q(g, dx)} = \|Uf \circ \eta_1\|_{L^q(P)} \leq \|f \circ \xi_1\|_{L^p(P)} = \|f\|_{L^p(g, dx)}$$

si $f \in L^p(gdx)$ et $p-1 \geq \rho^2(q-1)$.

Inversement supposons que $p-1 < \rho^2(q-1)$. Pour tout réel λ , soit e_λ la fonction exponentielle $e_\lambda(x) = \exp(\lambda x - \lambda^2/2)$. Alors $E(e_\lambda \circ \xi_1) = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et la formule $[e_\lambda]^p = e_{\lambda\rho} \exp[p(p-1)\lambda^2/2]$ entraîne que

$$\|e_\lambda\|_{L^p(g, dx)} = \|e_\lambda \circ \xi_1\|_{L^p(P)} = \exp[(p-1)\lambda^2/2].$$

D'autre part on vérifie sans peine que $Ue_\lambda = e_{\lambda\rho}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et il s'ensuit que

$$\frac{\|Ue_\lambda\|_q}{\|e_\lambda\|_p} = \exp \frac{1}{2} [(q-1)(\lambda\rho)^2 - (p-1)\lambda^2] \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Mais si $\rho^2(q - 1) > p - 1$, l'expression précédente tend vers $+\infty$ lorsque $\lambda^2 \rightarrow \infty$ et ceci montre que U ne peut être un opérateur borné de L^p dans L^q . ■

Remarque. — La formule suivante explicite l'opérateur U du corollaire précédent :

$$Uf(x) = \int_{\mathbb{R}} f(\rho x + \sqrt{1 - \rho^2}y)g(y)dy$$

et on s'attendrait donc à pouvoir démontrer que $\|Uf\|_q \leq \|f\|_p$ si $p - 1 \geq \rho^2(q - 1)$ par une utilisation convenable des inégalités de Hölder. Je n'ai pu arriver ainsi qu'à démontrer que $U : L^p \rightarrow L^q$ est un opérateur borné sous la condition précédente mais pas que U est de norme 1.

Je remercie MM. S. MARTIN et C. PERAY dont le travail de troisième cycle m'a incité à démontrer la proposition 1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. V. SKOROKHOD, *Studies in the theory of random processes*. Addison Welsey, 1965.
- [2] E. NELSON, Quantum fields and Markov fields. *Amer. Math. J.*, 1971.

(Manuscrit reçu le 12 mai 1976)