ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

L. I. GALTCHOUK

# Représentation des martingales engendrées par un processus à accroissements indépendants (cas des martingales de carré intégrable)

*Annales de l'I. H. P., section B*, tome 12, nº 3 (1976), p. 199-211

<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_3_199_0>

*Ann. Inst. Henri Poincaré,*
Vol. XII, n° 3, 1976, p. 199-211.

Section B :
*Calcul des Probabilités et Statistique.*

# Représentation des martingales engendrées par un processus à accroissements indépendants (Cas des martingales de carré intégrable)

par

**L. I. GALTCHOUK**
Université de Moscou,
Laboratoire des méthodes statistiques, Moscou 117234

## INTRODUCTION

Soient $X = (X_t)$, $t \geq 0$, une semi-martingale et $F = (F_t)$ la famille croissante de tribus engendrées par X, $Y = (Y_t)$ une martingale par rapport à la famille F.

Dans différents problèmes il est utile d'avoir la représentation de Y comme la somme de deux intégrales stochastiques, l'une par rapport à la partie continue de X et l'autre par rapport à sa partie discontinue.

Cette représentation est bien étudiée lorsque X est un processus de Wiener ou un processus de Poisson (cf. Ito [*1*], Wentzel [*2*], Kunita et Watanabe [*3*], Clark [*4*], Kabanov [*5*], Dellacherie [*6*]). Il y a des travaux à ce sujet lorsque X est un processus de diffusion ou un processus à trajectoires discontinues (cf. Fujisaki, Kallianpur et Kunita [*7*], Lipster et Shiryayev [*8*], Grigelionis [*9*], Chow et Meyer [*10*], Jacod [*11*]).

Le cas où X est une semi-martingale continue à droite a été considéré récemment par Jacod et Mémin [*17*].

Il faut remarquer qu'on supposait toujours que le processus X et la famille F étaient continus à droite.

Dans cet article nous étudions la représentation des martingales optionnelles de carré intégrable lorsque X est n'importe quel processus à accroissements indépendants, séparable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (cf. la formule (1) ci-dessous). Dans ce cas la famille F de tribus n'est pas continue à droite (resp à gauche), si X n'est pas continu à droite (resp à gauche).

Pour démontrer le résultat, nous utilisons une méthode différente de celles proposées auparavant.

L'auteur remercie Monsieur J. Neveu pour son intérêt et son aide au cours de ce travail et Monsieur J. Jacod des discussions qui lui ont été profitables.

Cet article a été rédigé pendant que Monsieur Galtchouk était l'hôte du Laboratoire de Probabilités de l'Université Paris VI.

## 1. NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ est un espace probabilisé complet.

$X = (X_t)_{t \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants (PAI), séparable, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$. Nous supposons que X n'a que des sauts aléatoires. On peut alors écrire :

$$X_t = \sum_{0 < t_k < t} u_k + \sum_{0 < t_k \leq t} v_k + Y_t, \forall t \geq 0 \tag{1}$$

(cf. [*12*]), où $T = (t_k)_{k \in |N|}$ est une suite de temps déterministes dans $]0, \infty[$ (discontinuités fixes) ; les variables aléatoires (v. a.) $u_k$, $v_k$, $Y_t$, $\forall k$, $t$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et simultanément indépendantes ; $Y = (Y_t)$ est un PAI, continu en probabilité et continu à droite.

Les séries de (1) convergent p. s. (en chaque coordonnée) et leurs limites ne dépendent pas de l'ordre de la sommation.

$E = \mathbb{R}^d \backslash \{ 0 \}$, $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne sur E.

$F = (F_t)_{t \geq 0}$ est la famille de tribus engendrées par X et contenant tous les éléments P-négligeables de $\mathcal{F}$.

Il faut remarquer que cette famille a les mêmes propriétés de continuité que le processus X, c. à. d. qu'elle est continue à droite lorsque X est continu à droite et qu'elle n'est pas continue ni à droite, ni à gauche lorsque X ne l'est pas.

On dit que le processus Z est *optionnel* s'il est mesurable par rapport à la tribu optionnelle, c. à. d. la tribu sur $[0, \infty[ \times \Omega$ engendrée par les processus adaptés à la famille F dont les trajectoires sont continues à droite, limitées à gauche sur $]0, \infty[$(c. à d. l. à g.).

On dit que le processus Z est *prévisible* s'il est mesurable par rapport à la tribu prévisible, P, c. à d. la tribu sur $(0, \infty[ \times \Omega$ engendrée par les processus adaptés à la famille F dont les trajectoires sont continues à gauche sur $]0, \infty[$.

Tout processus prévisible est optionnel (voir [*18*], [*19*]).

**M** est l'ensemble des processus $M = (M_t)$ optionnels, à valeurs complexes, pour lesquels il existe une v. a. $M_\infty$ telle que (*i*) $M_\infty$ soit $F_\infty$-mesurable, (*ii*) $E| M_\infty |^2 < \infty$, (*iii*) pour tout temps d'arrêt (t. a.) S on a $M_S = E[M_\infty \mid F_S]$ p. s. sur $(S < \infty)$.

Munissons **M** du produit scalaire $(M, Z) = EM_\infty \bar{Z}_\infty$, $M, Z \in \mathbf{M}$, $\bar{Z}$ est le conjugué de Z. M et Z sont dits orthogonaux $(M \perp Z)$ si $(M, Z) = 0$. Nous utiliserons le résultat suivant, qui est bien connu.

LEMME 1. — *Soit* $(Z_t)_{t \geq 0}$ *un processus stochastique à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, *pour lequel la tribu* $F^Z_\infty = \sigma\{ Z_t, t \geq 0 \}$ *est égale à* $\sigma\{Z_s, s \in S \}$, *où* S *est dénombrable.*

*Alors les combinaisons linéaires finies des fonctions* $\exp \left\{ i \sum_{k=0}^{n} b_{s_k} Z_{s_k} \right\}$ *sont denses dans* $L^2(\Omega, F^Z_\infty, P)$, *où* $(s_0, \ldots, s_n)$ *est un sous-ensemble fini de* S *et* $b_{s_k} = (b^1_{s_k}, \ldots, b^d_{s_k})$ *est un vecteur réel déterministe.*

## 2. RÉSULTATS AUXILIAIRES POUR LES PROCESSUS A ACCROISSEMENTS INDÉPENDANTS

### 1. Structure du processus Y de (1)

Le processus Y étant continu à droite admet pour tout *t* la représentation (cf. [*14*])

$$Y_t = Y_0 + a_t + g_t + \int_0^t \int_{|x| \leq 1} x(p\text{-}\Pi)(ds\text{-}dx) + \int_0^t \int_{|x| > 1} xp(ds, dx), \quad (2)$$

où $Y_0$ est une v. a. $F_0$-mesurable; $a = (a_t)$ une fonction continue déterministe; $g = (g_t)$ un PAI gaussien continu, avec $g_0 = 0$, $Eg_t = 0$, $\forall t$; $Y_0, a, g$ sont à valeurs dans $\mathbb{R}^d$; et pour $B \in \mathscr{B}(]0, \infty[)$, $\Gamma \in \mathscr{E}$

$$P(B, \Gamma) = \sum_s I_{(s, \Delta Y_s) \in B \times \Gamma}, \qquad \Delta Y_s = Y_s - Y_{s^-},$$

$$\Pi(B, \Gamma) = EP(B, \Gamma).$$

$\Pi$ a les propriétés suivantes :

$$\int_0^t \int_E |x|^2 \Lambda 1 \Pi(ds, dx) < \infty, \forall t \geq 0,$$

le processus $\Pi_t(\Gamma) = \Pi(]0, t], \Gamma)$ est continu et croissant.

*Remarque.* — Comme $a = (a_t)$ en (2) est déterministe, les tribus engendrées par $(X_t)$ et $(X_t - a_t)$ sont les mêmes.

Puisque nous ne nous intéressons qu'aux v. a. F-adaptées, nous supposerons toujours que $a = 0$.

## 2. Intégrales stochastiques par rapport aux mesures $p$, $p$-$\Pi$ et par rapport aux processus gaussiens unidimensionnels

Pour un processus Z et pour toute mesure $\mu$ sur $\mathscr{B}([0, \infty)) \times \mathscr{E}$ on note :

$$f \circ Z_t^s = \int_s^t f(u) dZ_u, \quad s \leq t, \qquad f \circ Z_t = f \circ Z_t^0,$$

$$f \circ \mu_t^s = \int_s^t \int_E f(u, x) \mu(du, dx), \qquad f \circ \mu_t = f \circ \mu_t^0,$$

lorsque ces quantités sont définies.

DÉFINITION 1. — *On dit que la fonction $f$ définie sur* $[0, \infty[ \times \Omega$, *à valeurs complexes, appartient* à $L^2(\langle g^k \rangle)$ *si elle est $\mathscr{P}$-mesurable et*

$$E|f|^2 \circ \langle g^k \rangle_\infty < \infty$$

*où $g^k$ est la k-ième coordonnée de $g = (g^1, \ldots, g^d)$ et*

$$\langle g^k \rangle_t - \langle g^k \rangle_s = E(g_t^k - g_s^k)^2.$$

Lorsque $f \in L^2(\langle g^k \rangle)$ l'intégrale de $f \circ g^k$ est définie (voir [*13*]). Il faut remarquer que dans [*13*] on travaille avec la famille de tribus $(E_t)$ continues à droite. Mais la définition et les propriétés de $f \circ g^k$ sont valables dans le cadre de notre étude parce que (*i*) les tribus prévisibles pour les familles $(F_t)$ et $(F_t Y)$ sont les mêmes et donc on intègre la même classe de fonctions $f$, (*ii*) le processus prévisible $\langle g^k \rangle$ correspondant à $g^k$ est déterministe et donc, adapté à la famille $(F_t)$.

PROPRIÉTÉS DE $f \circ g^k$. — (*i*) Si $f \in L^2(\langle g^k \rangle)$, $f \circ g^k \in \mathbf{M}$.

(*ii*) Si $f \in L^2(\langle g^k \rangle)$, $h \in L^2(\langle g^n \rangle)$, on a $\langle f \circ g^k, h \circ g^n \rangle = fh \circ \langle g^k, g^n \rangle$, où $\langle g^k, g^n \rangle_t - \langle g^k, g^n \rangle_s = E(g_t^k - g_s^k)(g_t^n - g_s^n)$.

(*iii*) $f \circ g^k$ est continu.

(*iv*) Si Z est une v. a. $F_s$-mesurable, alors $Z(f \circ g_t^{ks}) = (Zf) \circ g_t^{ks}$.

DÉFINITION 2. — *On dit que la fonction* $f$ *définie sur* $[0, \infty[ \times \Omega \times E$, *à valeurs complexes, appartient* à $L^m(\Pi)$ *si elle est* $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ *mesurable et* $E|f|^m \circ \Pi_\infty < \infty$, $m = 1,2$.

Nous ne distinguerons pas deux fonctions $f, h \in L^m(\Pi)$, si on a $f = h$ $P \times \Pi$ - p. s. $m = 1,2$.

Lorsque $f \in L^1(\Pi)$ l'intégrale $f \circ p$ est la somme $\sum_s f(s, \Delta Y_s)$.

Lorsque $f \in L^2(\Pi)$ l'intégrale $f \circ (p\text{-}\Pi)$ peut être définie selon le schéma de Skorokhod (cf. [*15*]).

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE $f \circ p$. — (*i*) Si $f \in L^1(\Pi)$, $f \circ p - f \circ \Pi$ est une martingale.

(*ii*) Le processus $f \circ p$ est c. à d. l. à g., $\Delta f \circ p_t = f(t, \Delta Y_t) I_{\Delta Y_t \neq 0}$.

(*iii*) Si $f$ est $\mathcal{P} \times \mathcal{E}$ mesurable, fini, alors pour tout $a > 0$

$$f I_{|x| > a} \circ p_t = \sum_{s < t} f(s, \Delta Y_s) I_{|\Delta Y_s| > a}$$

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE $f \circ (p\text{-}\Pi)$. — (*i*) Si $f \in L^2(\Pi)$, $f \circ (p\text{-}\Pi) \in \mathbf{M}$.

(*ii*) Si $f, h \in L^2(\Pi)$, $\langle f \circ (p\text{-}\Pi), h \circ (p\text{-}\Pi) \rangle = fh \circ \Pi$.

(*iii*) Le processus $f \circ (p\text{-}\Pi)$ est c. à d. l. à g. et $\Delta f \circ (p\text{-}\Pi)_t = f(t, \Delta Y_t) I_{\Delta Y_t \neq 0}$.

## 3. Intégrale stochastique par rapport au processus $g = (g^1, \ldots, g^d)$.

Soit $f = (f^1, \ldots, f^d)$ une fonction dont les coordonnées sont à valeurs complexes. On note

$$f \circ g = \sum_{k=1}^{d} f^k \circ g^k .$$

Lorsque $f^k \in L^2(\langle g^k \rangle)$, $k = 1, \ldots, d$, le processus $f \circ g$ est bien défini. Mais on peut définir le processus $f \circ g$ pour des fonctions $f$ appartenant à une classe plus générale.

Le processus $g$ engendre l'ensemble des processus $\langle g^m, g^n \rangle$, $m, n = 1, \ldots, d$. D'après l'inégalité de Cauchy-Bouniakovski, toute mesure $\langle g^m, g^n \rangle$ est absolument continue par rapport à $\langle g^m \rangle$ et à $\langle g^n \rangle$. On note

$$\langle g \rangle = \sum_{n=1}^{d} \langle g^n \rangle .$$

Alors $\langle g^m, g^n \rangle \ll \langle g \rangle$, $m, n = 1, \ldots, d$. On note

$$G = \left( \frac{d\langle g^m, g^n \rangle}{d\langle g \rangle} \right)_{m,n=1,\ldots,d}$$

La matrice G est borélienne, symétrique et non-négative $\langle g \rangle$ – p. s.

DÉFINITION 3. — *On dit que la fonction $f = (f^1, \ldots, f^d)$ à valeurs complexes appartient à $L^2(\langle g \rangle)$ si $f^m$ est $\mathscr{P}$-mesurable, $m = 1, \ldots, d$, et $E(f, G\bar{f}) \circ \langle g \rangle_\infty < \infty$, où $(f, G\bar{f})$ est la forme quadratique associée à G.*

Nous ne distinguerons pas les fonctions $f, h \in L^2(\langle g \rangle)$ qui vérifient $(f\text{-}h, G(\overline{f\text{-}h})) = 0$ P $\times \langle g \rangle$ – p. s.

Lorsque $f \in L^2(\langle g \rangle)$ on peut définir l'intégrale stochastique $f \circ g$ (cf. [*16*]). Les propriétés de l'intégrale $f \circ g$ sont les mêmes que dans le cas $f \circ g^k$, il faut seulement changer (*ii*) en

(*ii*)′ ki $f, h \in L^2(\langle g \rangle)$, alors $\langle f \circ g, h \circ g \rangle = (f, Gh) \circ \langle g \rangle$.

### 4. Espaces des suites $l^u$, $l^v$.

Considérons la suite $T = (t_k)_{k \in |N|}$ des discontinuités fixes de X sur $]0, \infty[$.

DÉFINITION 4. — *On dit que la suite $U = (U_k)_{k \in |N|}$ (resp. $V = (V_k)$) à valeurs complexes appartient à $l^u$ (resp. $l^v$).*

*Si* (*i*) $U_k$ *est* $F_{t_k+}$*-mesurable (resp.* $V_k$ *est* $F_{t_k}$*-mesurable),*

(*ii*) $E \sum_k |U_k|^2 < \infty \left( \text{resp. } E \sum_k |V_k|^2 < \infty \right)$,

(*iii*) $E[U_k \mid F_{t_k}] = 0$ (resp. $E[V_k \mid F_{t_k-}] = 0$) $\forall k$.

Nous ne distinguerons pas les suites U, $\tilde{U}$ de $l^u$ (resp. V, $\tilde{V}$ de $l^v$) qui vérifient $U_k = \tilde{U}_k (V_k = \tilde{V}_k)$ P – p. s. $\forall k$.

## 3. REPRÉSENTATION DES MARTINGALES DE CARRÉ INTÉGRABLE

Dans l'espace **M** nous considérons l'ensemble L de toutes les martingales de la forme

$$M_t(\omega) = M_0(\omega) + \sum_{t_k < t} U_k(\omega) + \sum_{t_k \le t} V_k(\omega) + f \circ g_t(\omega) + h \circ (p\text{-}\Pi)_t(\omega), \qquad M \in L, \quad (3)$$

où les séries au second membre convergent en moyenne quadratique et

$$M_0 \in L^2(\Omega, F_0, P), \quad U = (U_k) \in l^u, \quad V_k = (V_k) \in l^v, \quad f \in L^2(\langle g \rangle), \quad h \in L^2(\Pi) \quad (4)$$

LEMME 2. — *L'ensemble* L *est un sous-espace fermé dans* **M**.

*Démonstration.* — On va d'abord vérifier que le processus M défini par (3)-(4) appartient à **M**, c. à d. que L n'est pas vide.

Le processus $U = \left(\sum_{t_k < t} U_k\right)\left(\text{resp. } V = \left(\sum_{t_k \leq t} V_k\right)\right)$ est la limite p. s. uniforme sur $[0, \infty[$ d'une sous-suite $(n')$ des processus continus à gauche $U^n = \left(\sum_{k=1}^{n} U_k I_{t_k < t}\right)$ (resp. des processus continus à droite

$$V^n = \left(\sum_{k=1}^{n} V_k I_{t_k \leq t}\right)\Big).$$

Donc, U (resp. V) étant continu à gauche (resp. à droite) est optionnel. Les deux derniers termes du second membre de (3) sont continus à droite. Ceci entraîne que le processus M est optionnel. D'autre part, il est facile de vérifier que pour tout t. a. S on a $M_S = E[Z_\infty \mid F_S]$ sur $(S < \infty)$, où $Z_t$ est le second membre de (3), et $E|Z_\infty|^2 < \infty$. Donc $M \in \mathbf{M}$.

Soit $(M^n)$ une suite fondamentale dans **M**, où $M^n$ est de type (3)-(4). Ceci veut dire que $E|M^n_\infty - M^m_\infty|^2 \to 0$ lorsque $n, m \to \infty$. Les processus $M^n$ sont séparables car ils sont continus à droite sur l'ensemble $[0, \infty[\backslash T$, où T est dénombrable. D'après l'inégalité de Doob, il existe une sous-suite $(n')$ et l'ensemble $N \subset \Omega$, $P(N) = 0$, tel que la suite $(M^{n'}(\omega))$ est fondamentale au sens de la convergence uniforme sur $[0, \infty[$, pour $\omega \notin N$. On désigne par M la limite de $(M^{n'})$ au sens de cette convergence.

Alors M est optionnel. On désigne par $M_\infty$ la limite de $(M^{n'}_\infty)$ dans $L^2(\Omega, F_\infty, P)$. Comme en dehors de l'ensemble N $M^{n'} \to M$ en tout point $(\omega, t)$, on a pour tout t. a. S

$$M_S = \lim_{n' \to \infty} M^{n'}_S = \lim_{n' \to \infty} E[M^{n'}_S \mid F_S] = E[M_\infty \mid F_S] \text{ p. s.}$$

sur l'ensemble $(S < \infty)$. Donc, $M \in \mathbf{M}$.

D'autre part, on a $M^{n'}_0 \to \tilde{M}_0$ dans $L^2(\Omega, F_0, P)$, $U^{n'} \to \tilde{U}$ dans $l^u$, $V^{n'} \to \tilde{V}$ dans $l^v$, $f^{n'} \to \tilde{f}$ dans $L^2(\langle g \rangle)$, $h^{n'} \to \tilde{h}$ dans $L^2(\Pi)$, où $M^{n'}_0$, $U^{n'}, V^{n'}, f^{n'}, h^{n'}$ vérifient (4) pour $M^{n'}$. On désigne par $\tilde{M} = (\tilde{M}_t)$ le processus défini par (3) avec $\tilde{M}_0$, $\tilde{U}$, $\tilde{V}$, $\tilde{f}$, $\tilde{h}$. D'après ce qui précède le processus $\tilde{M}$ est optionnel. On vérifie facilement que

$$\tilde{M}_\infty = \tilde{M}_0 + \sum_k \tilde{U}_k + \sum_k \tilde{V}_k + \tilde{f} \circ g_\infty + \tilde{h} \circ (p\text{-}\Pi)_\infty = M_\infty$$

et que pour tout t. a. S

$$\tilde{M}_S = E[\tilde{M}_\infty \mid F_S] = E[M_\infty \mid F_S] = M_S \text{ p. s. sur } (S < \infty).$$

La première égalité implique $\tilde{M} \in L$ et l'égalité $\tilde{M}_S = M_S$ p. s. sur $(S < \infty)$ entraîne que M et $\tilde{M}$ sont indistinguables, d'après le th. 1 [*18*] et IV. T. 13 [*19*].

LEMME 3. — *Soient* $T^N = \{0 < t_1 < \ldots < t_N\}$ *un sous-ensemble fini de la suite* $T = (t_k)$, *appartenant à* $[0, b]$, $b < \infty$, $C = (c_t)$ *une fonction déterministe sur* $[0, \infty[$, *à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$, *qui est nulle en dehors de l'intervalle fini* $[0, b]$, $|c_t| \leq K$. *On note*

$$A(U_k) = \begin{cases} 1 + e^{ic_{t_k}U_k}, & \text{si } \quad Ee^{ic_{t_k}U_k} = 0 \\ e^{ic_{t_k}U_k}/Ee^{ic_{t_k}U_k}, & \quad \textit{sinon} \end{cases}$$

*et de la même façon* $A(V_k)$, $A(Y_0)$, *où* $(U_k)$, $(V_k)$, $Y_0$ *sont définis par* (1). *On désigne par* $Z = (Z_t)$ *le processus pour lequel*

$$Z_t = A(Y_0)\prod_{\substack{t_k < t \\ t_k \in T^N}} A(U_k) \prod_{\substack{t_k \leq t \\ t_k \in T^N}} A(V_k) R_t, \tag{5}$$

où

$$R_t = \exp\left\{ ic \circ Y_t + \frac{1}{2}(c, Gc) \circ \langle g \rangle_t + (1 + icx\, I_{|x| \leq 1} - e^{icx}) \circ \Pi_t \right\}$$

*et par convention,* $\prod_{t_k < t}[\ ] = 1$ *pour* $t \leq t_1$, $\prod_{t_k < t}[\ ] = 1$ *pour* $t < t_1$. *Alors pour tout* $t \geq 0$ *on a* :

$$\begin{aligned} Z_t(\omega) = A(Y_0)(\omega) &+ \sum_{\substack{t_k < t \\ t_k \in T^N}} Z_{t_k}[A(U_k) - 1](\omega) + \sum_{\substack{t_k \leq t \\ t_k \in T^N}} Z_{t_k-}[A(V_k) - 1](\omega) \\ &+ icZ_- \circ g_t(\omega) + (e^{icx} - 1)Z_- \circ (p\text{-}\Pi)_t(\omega) \end{aligned} \tag{6}$$

*et* $Z \in \mathbf{M}$.

*Démonstration.* — On va d'abord établir que le processus R de (5) est fini. Comme la fonction $c$ est nulle hors de l'intervalle $[0, b]$, on a pour tout $t$ :

$$\begin{aligned} |R_t| &= \exp\left\{ \frac{1}{2}(c, Gc) \circ \langle g \rangle_t + (1 - \cos cx) \circ \Pi_t \right\} \\ &\leq \exp\left\{ \frac{1}{2}(c, Gc) \circ \langle g \rangle_b + (K^2 |x|^2 I_{|x| \leq 1} + 2I_{|x| > 1}) \circ \Pi_b \right\}. \end{aligned}$$

D'après les propriétés de la mesure $\Pi$ cette dernière quantité est finie. Donc, le processus R est borné.

Pour $r$ fixé, $r \geq 0$, et $t \geq r$ on pose :

$$M_t^r = ic \circ g_t^r + (e^{icx} - 1) \circ (p\text{-}\Pi)_t^r ,$$

Le processus $M^r$ est une martingale de carré intégrable sur $[r, \infty[$ par rapport à la famille de tribus engendrée par Y et ses trajectoires sont continues à droite et limitées à gauche. D'après [*20*], l'équation

$$D_t = 1 + D_- \,.\, M_t^r \tag{7}$$

sur $[r, \infty[$ a une seule solution qui s'écrit dans notre cas.

$$D_t = \exp \left\{ M_t^r + \frac{1}{2}(c, Gc) \circ \langle g \rangle_t^r + \sum_{r<s\leq t} (1 + ic_s \Delta Y_s - e^{ic_s \Delta Y_s}) \right\},$$

où la série du second membre converge p. s. absolument sur tout intervalle $[r, t]$.

En effet, $\sum_{s\leq t} | 1 + ic_s \Delta Y_s - e^{ic_s \Delta Y_s} | \leq K^2 \sum_{s \leq t} | \Delta Y_s |^2 < \infty$ (voir [*13*]).

On va démontrer que $R_t R_r^{-1} = D_t$ pour $t \geq r$.

Pour ceci il suffit de montrer que la différence des arguments des exponentielles $R_t R_r^{-1}$ et $D_t$ est nulle. On désigne par $B^r = (B_t^r)$ cette différence. On a

$$\begin{aligned} B_t^r = {} & icx I_{|x|\leq 1} \circ (p\text{-}\Pi)_t^r - (e^{icx} - 1) \circ (p\text{-}\Pi)_t^r \\ & + (1 + icx I_{|x|\leq 1} - e^{icx}) \circ \Pi_t^r - \sum_{r<s\leq t} (1 + ic_s \Delta Y_s I_{|\Delta Y_s| \leq 1} - e^{ic_s \Delta Y_s}) . \end{aligned}$$

Les deux derniers termes du second membre forment une martingale à variation bornée sur $[r, \infty[$. D'autre part $\Delta B_s^r = 0 \forall s > r$. Donc, $B^r$ est une martingale continue. $B^r$ est orthogonale à toute martingale à variation bornée, nulle à l'instant zéro (voir [*13*]) et $B^r$ est orthogonale aux deux premiers termes du second membre. Ceci implique, que $| B^r |^2$ est une martingale. Comme $B_0^r = 0$, on a $B^r = 0$ et donc $R_t R_r^{-1} = D_t$ sur $[r, \infty[$. Pour $t = 0$ la relation (6) est vérifiée. Supposons qu'elle soit établie pour $t \in ]t_{n-1}, t_n]$, $1 \leq n < N$. Soit $t \in ]t_n, t_{n+1}[$.

Alors

$$\begin{aligned} Z_t &= Z_{t_n} + (Z_t - Z_{t_n}) = Z_{t_n} + Z_{t_n}(A(U_n)R_t R_{t_n}^{-1} - 1) \\ &= Z_{t_n} + Z_{t_n}(A(U_n) - 1) + Z_{t_n} A(U_n)(R_t R_{t_n}^{-1} - 1) \end{aligned}$$

Compte tenu de ce que $R_t R_{t_n}^{-1} = D_t$ sur $[t_n, \infty[$ et pour que tout $t \in ]t_n, t_{n+1}[Z_{t_n} A(U_n) D_{t-} = Z_{t-}$, on a d'après (7)

$$Z_t = Z_{t_n} + Z_{t_n}(A(U_n) - 1) + icZ_- \circ g_t^{t_n} + (e^{icx} - 1)Z_- \circ (p\text{-}\Pi)_t^{t_n} \quad (8)$$

Comme (6) est vérifié pour $t \leq t_n$, la relation (8) entraîne (6) pour $t < t_{n+1}$. On va démontrer maintenant (6) pour $t = t_{n+1}$. On a d'après (5)

$$Z_{t_{n+1}} = Z_{t_{n+1}-} + Z_{t_{n+1}-}(Z_{t_{n+1}-}^{-1} - 1) = Z_{t_{n+1}-} + Z_{t_{n+1}-}(A(V_{n+1}) - 1) \quad (9)$$

Désignons par $N_{n+1}$ l'ensemble de $\omega \in \Omega$ tel que

$$Z_{t_{n+1}-}(\omega) \neq Z_{t_n}(\omega) + Z_{t_n}(A(U_n) - 1)(\omega) + icZ_- \circ g_{t_{n+1}}^{t_n}(\omega) + (e^{icx} - 1)Z_- \circ (p\text{-}\Pi)_{t_{n+1}}^{t_n}(\omega)$$

On a $P(N_{n+1}) = 0$ parce que les intégrales stochastiques par rapport aux mesures $g$ et $(p\text{-}\Pi)$ sont quasi continues à gauche. Donc, les relations (8) et (9) entraînent (6) pour $t = t_{n+1}$ et finalement (6) est vérifiée pour tout $t \geq 0$.

Il nous reste à démontrer que $Z \in \mathbf{M}$. Le processus Z est optionnel, comme somme de deux processus optionnels (l'un est continu à gauche, l'autre continu à droite). Enfin, il est facile de vérifier que pour tout t. a. S on a :

$$Z_S = E[Z_b \mid F_S],$$

où la v. a. $Z_b$ est de carré intégrable.

THÉORÈME. — *Soit* $M \in \mathbf{M}$. *Alors pour tout* $t \geq 0$ *on a :*

$$M_t(\omega) = M_0(\omega) + \sum_{0 < t_k < t} U_k(\omega) + \sum_{0 < t_k \leq t} V_k(\omega) + f \circ g_t(\omega) + h \circ (p\text{-}\Pi)_t(\omega), \quad (10)$$

*où* $U = (U_k) \in l^u$, $V = (V_k) \in l^v$, $f \in L^2(\langle g \rangle)$, $h \in L^2(\Pi)$.

*Ces suites et fonctions sont uniques dans leurs espaces respectifs.* Avant la démonstration de ce théorème nous allons donner un résultat préliminaire.

Supposons que la fonction $c = (c_t)$ et l'ensemble $T^N$ soient les mêmes que dans le lemme 3. Posons $T^{N'} = T^N \cup \{ t_0 = 0 \}$, $U_0 = Y_0$ et

$$a = \prod_{t_k \in T^{N'} \setminus T^{N'}(u)} e^{-ic_{t_k} U_k} \prod_{t_k \in T^N \setminus T^N(v)} e^{-ic_{t_k} V_k} e^{-ic_\circ Y_\infty}$$

où $T^{N'}(u) = \{ t_k \in T^{N'} : E e^{ic_{t_k} U_k} = 0 \}$.

LEMME. — *Soit* R *une v. a.* $F_\infty$*-mesurable avec* $E|R|^2 < \infty$ *et* $ER\bar{Z}_\infty = 0$ *pour chaque* Z *de* (5). *Alors*

$$ER \prod_{t_k \in T^{N'}} e^{-ic_{t_k}U_k} \prod_{t_k \in T^N} e^{-ic_{t_k}V_k} e^{-ic \circ Y_\infty} = 0$$

*Démonstration.* — On a d'après (5)

$$0 = ER\bar{Z}_\infty = ER \frac{a}{Ea} \prod_{t_k \in T^{N'}(u)} (e^{-ic_{t_k}U_k} + 1) \prod_{t_k \in T^N(v)} (e^{-ic_{t_k}V_k} + 1)$$

$$\exp\left[\frac{1}{2}(c, Gc) \circ \langle g \rangle_\infty + (1 - icxI_{|x| \leq 1} - e^{-icx}) \circ \Pi_\infty\right] \quad (11)$$

Le dénominateur E$a$ de (11) n'est pas nul, on peut le supprimer. On fixe $t_{k_0}, t_{k_1}, \ldots \in T^{N'}(u)$ et on note :

$$\mathscr{C}_{k_0,k_1,\ldots} = \prod_{t_k \in T^{N'}(u) \setminus t_{k_0}, t_{k_1}, \ldots} (e^{-ic_{t_k}U_k} + 1) \prod_{t_k \in T^N(v)} (e^{-ic_{t_k}V_k} + 1)$$

Alors, d'après (11) on a

$$ERa\mathscr{C}_{k_0} e^{-ic_{t_{k_0}}U_{k_0}} + ERa\mathscr{C}_{k_0} = 0$$

Comme $ERa\mathscr{C}_{k_0} = 0$ ($a\mathscr{C}_{k_0} = \bar{Z}$, où Z est de type (5) avec $c_{t_{k_0}} = 0$), on a $ERa\mathscr{C}_{k_0} e^{-ic_{t_{k_0}}U_{k_0}} = 0$

On répète ensuite les mêmes arguments pour $t_{k_1} \in T^{N'}(u)$ et on arrive à :

$$ERa\mathscr{C}_{k_0,k_1} e^{-ic_{t_{k_0}}U_{k_0} - ic_{t_{k_1}}U_{k_1}} = 0 .$$

En répétant successivement ces raisonnements pour les autres $t_k \in T^{N'}(u)$ et $t_k \in T^N(v)$ on obtient le résultat cherché.

*Démonstration du théorème.* — D'après le lemme 2, le sous-espace L est fermé dans **M**. Donc, tout élément M de **M** peut être décomposé d'une manière unique comme la somme de deux éléments : l'un appartenant à L et l'autre orthogonal à L. Nous supposons que $M \notin L$ et $M \perp L$, c. à d. que

$$EM_\infty \bar{Z}_\infty = 0 , \qquad \forall Z \in L .$$

En particulier, cette relation est vérifiée pour tout Z de type (5). D'après le lemme 4, on a

$$EM_\infty \exp\left\{-i\left[C_{t_0}Y_0 + \sum_{t_k \in T^N} C_{t_k}U_k + \sum_{t_k \in T^N} C_{t_k}V_k + C \circ Y_\infty\right]\right\} = 0$$

pour toute fonction $C = (C_t)$ bornée déterministe, nulle en dehors d'un intervalle fini $[0, b]$, $T^N \in [0, b]$.
Soit $0 = s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_m =$ une subdivision de $[0, b]$. On prend pour C une fonction simple avec des sauts aux instants $(s_k)$. Alors on a

$$\mathrm{EM}_\infty \exp \left\{ - i \left[ C_{t_0} Y_0 + \sum_{t_k \in T^N} C_{t_k} U_k + \sum_{t_k \in T^N} C_{t_k} V_k \right.\right.$$
$$\left.\left. \sum_{k=0}^{m-1} C_{s_k} (Y_{s_{k+1}} - Y_{s_k}) \right] \right\} = 0 \quad (12)$$

Désignons par $\sigma_N$ la tribu engendrée par $Y_{s_k}$, $k = 0, \ldots, m$;

$$V_k,\ t_k \in T^N;\ U_1, \ldots, U_{N-1},\ U_N I_{t_N} < b.$$

(12) entraîne $E[E[M_\infty \mid \sigma_N] \exp \{\quad\}] = 0$,
où l'argument de l'exponentielle est le même que dans (12). Dans cette exponentielle tous les vecteurs $C_{t_k}$, $C_{s_k}$ sont arbitraires. Donc, d'après le lemme 1, on a $E[M_\infty \mid \sigma_N] = 0$. On prend ensuite dans $[0, b]$ des points supplémentaires $t_k \in T$ et on choisit la subdivision de façon que $\sigma_N \uparrow F_b$. On obtient alors $E[M_\infty \mid F_b] = 0$ p. s.

Cette égalité est vérifiée pour tout $b \geq 0$. En faisant tendre $b$ vers $\infty$, on a $F_b \uparrow F_\infty$ et on obtient $M_\infty = \lim_{b \to \infty} E[M_\infty \mid F_b] = 0$ p. s.

Notons $\tilde{M}$ la version optionnelle du processus $(E[M_\infty \mid F_t])$ qui existe d'après le th. 2 [*18*]. D'après l'unicité des versions optionnelles on a $\tilde{M} = 0$. D'autre part, le processus M est aussi optionnel et vérifie le théorème d'arrêt de Doob. Donc, pour tout t. a. S.

$M_S = E[M_\infty \mid F_S] = \tilde{M}_S$ p. s. sur $(S < \infty)$. Ceci entraîne que M et $\tilde{M}$ sont indistinguables (voir th. 1 [*18*], et IV th. 13 [*19*]), $M = 0$. Donc, $M = L$.

*Unicité.* — Supposons que M ait la représentation (10) avec $(U, V, f, h)$ *et* $(\tilde{U}, \tilde{V}, \tilde{f}, \tilde{h})$. Tous les termes du second membre en (10) sont orthogonaux. Donc

$$0 = E[\Sigma \mid U_k - \tilde{U}_k \mid^2 + \Sigma \mid V_k - \tilde{V}_k \mid^2$$
$$+ \overline{(f - \tilde{f}, G(f - \tilde{f}))} \circ \langle g \rangle_\infty + \mid h - \tilde{h} \mid^2 \circ \Pi_\infty$$

Il en résulte que $U = \tilde{U}$ dans $l^u$, $V = \tilde{V}$ dans $l^v$, $f = \tilde{f}$ dans $L^2(\langle g \rangle)$, $h = \tilde{h}$ dans $L^2(\Pi)$.

## BIBLIOGRAPHIE

[*1*] K. Ito, Multiple Wiener integral. *J. Math. Soc.* Japan, t. **3**, 1951, p. 157-169.
[*2*] A. Wentzel, Fonctionnelles additives du processus multi-dimensionnel de Wiener. *DAN*, t. **139**, 1961, p. 13-16.

[3] H. KUNITA, On square integrable martingales. *Nagoya Math. J.*, t. **30**, 1967, p. 209-245.

[4] J. M. C. CLARK, The representation of functionals of Brownian motion by stochastic integrals. *Ann. Math. Stat.*, t. **41**, 1970, p. 1282-1295.

[5] JU. KABANOV, La représentation des fonctionnelles de processus de Wiener et de Poisson comme des intégrales stochastiques. *Th. Prob. et appl.*, XVIII, fac 2, 1973, p. 376-380.

[6] C. DELLACHERIE, Intégrales stochastiques par rapport aux processus de Wiener et de Poisson. Séminaire de Probabilités VIII, Université de Strasbourg. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 381. Springer, Heidelberg, 1974.

[7] M. FUJISAKI, G. KALLIANPUR, H. KUNITA, Stochastic differential equations for the non linear filtering problem. *Osaka J. Math.*, t. **9**, 1972, p. 19-40.

[8] R. LIPTSER, A. SHYRYAYEV, *Statistique des processus aléatoires.* « Nauka » Moscou, 1974 (en russe).

[9] B. GRIGELIONIS, Structure des fonctionnelles des processus aléatoires. *Lint. Math. Sb.*, 1974, fac. 4.

[10] C. S. CHOW, P. A. MEYER, Sur la représentation des martingales comme intégrales stochastiques dans les processus ponctuels. *C. R. Acad. Sc.* Paris, A. **278** ? 1974, p. 1561-1563.

[11] J. JACOD, Multivariate Point Processes: Predictable Projection, Radon-Nikodym, Derivatives, Representation of Martingales. *Z. Wahr.*, t. **31**, 3, 1975, p. 235-253.

[12] M. LOEVE, *Probability theory*, 3 rd. ed., D. Van Nostrand Co., Ind., Princeton, N. J., 1963.

[13] C. DOLEANS-DADE, P. A. MEYER, Intégrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Séminaire de Probabilités, IV Université de Strasbourg, *Lect. Notes in Math.* V. 124, Springer, 1970.

[14] A. V. SKOROKHOD, *Processus stochastiques à accroissements indépendants.* « Nauka », Moscou, 1974 (en russe).

[15] A. V. SKOROKHOD, *Studies in the theory of random processes.* Addison Wesley, 1965.

[16] L. I. GALTCHOUK, Représentation de certaines martingales. *Théorie Prob. et Appl. (à paraître).*

[17] J. JACOD, J. MÉMIN. *Caractéristiques locales et conditions de continuité absolue pour les semi-martingales. Preprint.*

[18] C. DELLACHERIE, Un nouveau théorème de projection et de section. P. A. MEYER, Séminaire de Probabilités IX, Université de Strasbourg. *Lect. Notes in Math.* V. 465, Springer, 1975.

[19] C. DELLACHERIE, *Capacités et processus stochastiques*, Springer, 1972.

[20] C. DOLEANS-DADE, Quelques applications de la formule de changement de variable pour les semi-martingales. *Z. Wahr.*, t. **16**, 1970, p. 181-194.

*(Manuscrit reçu le 24 mars 1976)*