ANNALES DE L'I. H. P., SECTION B

SAAB ABOU-JAOUDE

Sur la convergence L1 et L∞ de l'estimateur de la partition aléatoire pour une densité

Annales de l'I. H. P., section B, tome 12, nº 4 (1976), p. 299-317
<http://www.numdam.org/item?id=AIHPB_1976__12_4_299_0>

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. XII, n° 4, 1976, p. 299-317.

Section B :
Calcul des Probabilités et Statistique.

Sur la convergence L1 et L∞ de l'estimateur de la partition aléatoire pour une densité

par

Saab ABOU-JAOUDE

2, rue de l'école des Postes, 78000, Versailles

RÉSUMÉ. — Nous traitons dans cet article de conditions nécessaires et suffisantes de convergence L1 et L∞, suivant un mode stochastique $\mathscr{M}$ de l'estimateur de la partition aléatoire pour une densité sur $\mathbb{R}$. L'estimateur est, pour l'essentiel, celui de l'histogramme obtenu en faisant un découpage sur l'échantillon ordonné associé. Cet estimateur, peu étudié, semble plus intéressant que celui de l'histogramme classique, mais il présente le désavantage d'estimer une densité par une fonction qui peut, quelquefois, ne pas être une densité.

SUMMARY. — In this article, we deal with necessary and sufficient conditions for L1 and L∞ convergence, according to a stochastic mode $\mathscr{M}$, of the random partition estimator for a given density on the real line. This estimator is, for the main part, that of the histogram obtained by slicing the associated ordered sample. This little studied estimator seems more interesting than the classical histogram, but has the disadvantage of estimating a density by a function which may not always be a density.

I. — INTRODUCTION

On considère l'espace $\mathbb{R}$, muni de la tribu $\mathscr{B}$ de ses boréliens et de la mesure μ de Lebesgue. Désignons par $\mathscr{F}$ l'ensemble de toutes les densités sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}, \mu)$. Pour $f \in \mathscr{F}$, on note P_f la probabilité associée à f. Soit, alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

— $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi P_f,

— $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ l'échantillon ordonné associé avec, pour convention : $Y_0 = -\infty$, $Y_{n+1} = +\infty$,

— $k(n)$ un entier > 0 fonction de n,

— $(\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{k(n)}^{(n)})$ une famille de $k(n)$ entiers, tous non nuls et vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \lambda_i^{(n)} = n + 1$$

(on notera λ_i au lieu de $\lambda_i^{(n)}$ quand ce sera possible),

— $(v_0, v_1, \ldots, v_{k(n)})$ une famille de $k(n)$ entiers liés aux λ_i par les relations :

$$v_0 = 0 \qquad \text{et, pour} \quad 1 \leqslant i \leqslant k(n)$$
$$v_i = v_{i-1} + \lambda_i$$

de sorte que $v_{k(n)} = n + 1$.

Nous noterons également, pour $1 \leqslant i \leqslant k(n)$,

— $A_i = A_i(n) = [Y_{v_{i-1}}, Y_{v_i}[$

— $l_i = l_i(n) = \mu(A_i)$

— $p_i = p_i(n) = P_f(A_i)$.

On a évidemment : $l_1(n) = l_{k(n)} = +\infty$.

On définit maintenant les deux fonctions f_n et φ_n par les formules :

— Pour $1 \leqslant i \leqslant k(n)$ et $x \in A_i$,

$$f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, x) = f_n(x) = \frac{\lambda_i}{(n+1)l_i}$$

$$\varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, x) = \varphi_n(x) = \frac{p_i}{l_i}.$$

Si $x \in A_1 \cup A_{k(n)}$, on a évidemment :

$$f_n(x) = \varphi_n(x) = 0.$$

Remarque. — Si l'on connaît un intervalle $[a, b]$ contenant le support de f, on posera, $Y_0 = a$, $Y_{n+1} = b$. f_n et φ_n ne sont plus forcément nulles sur $A_1 \cup A_{k(n)}$ dans ce cas.

DÉFINITION 1. — Nous appellerons f_n estimateur de la partition aléatoire (E. P. A.) de f pour l'échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ et le partage $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k(n)})$.

Nous nous proposons ci-dessous d'étudier des conditions sur le partage $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k(n)})$ pour que f_n converge vers f en probabilité ou presque complètement (pour la définition voir, par exemple [3], p. 43 ou [5], p. 43) pour les distances L1 ou L∞ sur $\mathcal{F}$.

Remarque 1. — f_n et φ_n ne sont en général pas des densités sur $\mathbb{R}$.

Remarque 2. — Les p_i, ainsi que les l_i sont des v. a. Si $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ est un n-échantillon ordonné de la loi uniforme sur $[0,1]$, avec $Z_0 = 0$, $Z_{n+1} = 1$, la famille $(p_1, p_2, \ldots, p_{k(n)})$ a même loi que la famille $(Z_{\nu_i} - Z_{\nu_{i-1}})$, $1 \leqslant i \leqslant k(n)$.

Remarque 3. — Si l'on considère $k(n)$ v. a. indépendants $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant k(n)}$ où $T_i \in \gamma(\lambda_i)$, $\forall i \in [1, k(n)]$ et, si l'on pose :

$$T_{n+1} = \sum_{i=1}^{k(n)} T_i ,$$

on a :

— $T_{n+1} \in \gamma(n + 1)$,

— La famille $(p_i)_{1 \leqslant i \leqslant k(n)}$ a même loi que la famille $\left(\dfrac{T_i}{T_{n+1}}\right)(0)$ (voir, par exemple [7], p. 259).

II. — CONVERGENCE L1 EN PROBABILITÉ

L'écart Δ_n entre f et f_n pour la distance L1 est défini par :

$$\Delta_n = \Delta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}} | f - f_n | \, d\mu .$$

Nous introduisons le biais défini par :

$$\Delta_n^{(1)} = \Delta_n^{(1)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}} | f - \varphi_n | \, d\mu = \sum_{i=1}^{k(n)} \int_{A_i} | f - \varphi_n | \, d\mu$$

et l'aléa défini par :

$$\Delta_n^{(2)} = \Delta_n^{(2)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \int_{\mathbb{R}} | \varphi_n - f_n | \, d\mu .$$

Lorsque l'on est dans le cas $Y_0 = -\infty$, $Y_{n+1} = +\infty$, on a :

$$\Delta_n^{(1)} = p_1 + p_{k(n)} + \sum_{i=2}^{k(n)-1} \int_{A_i} | f - \varphi_n | \, d\mu$$

et

$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{i=2}^{k(n)-1} \left| \frac{\lambda_i}{n+1} - p_i \right| .$$

Nous nous placerons dans ce cas dans la suite et nous noterons k pour $k(n)$.

Remarque. — Le biais et l'aléa sont ici des v. a. Par abus de langage nous appellerons biais et aléa une réalisation des v. a. $\Delta_n^{(1)}$ et $\Delta_n^{(2)}$, de même que nous nous permettrons de parler du biais associé à une partition (A_i) de $\mathbb{R}$ ou à une suite de partitions de $\mathbb{R}$.

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'établir des C. N. S. portant sur le partage $(\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ pour que Δ_n converge P_f-en probabilité vers zéro.

Notons d'abord que la convergence vers zéro P_f-en probabilité de $\Delta_n^{(1)}$ et $\Delta_n^{(2)}$ entraîne évidemment celle de Δ_n. D'autre part, l'inégalité établie au théorème 2 de [*2*] montre que la convergence de Δ_n P_f-en probabilité vers zéro entraîne celle du biais $\Delta_n^{(1)}$. Nous avons donc l'équivalence :

$$\Delta_n \overset{P_f}{\to} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_n^{(1)} \overset{P_f}{\to} 0 \\ \Delta_n^{(2)} \overset{P_f}{\to} 0 \end{cases}$$

Nous étudierons donc successivement des conditions de convergence du biais puis de l'aléa.

II.A. — **Étude du biais**

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 1. — Pour que le biais tende vers zéro P_f-en probabilité $\forall f \in \mathscr{F}$ intégrable-Riemann, il est nécessaire, et suffisant que les $\lambda_i^{(n)}$ vérifient la condition

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sup_{i \in [1, k(n)]} \lambda_i^{(n)} = 0 \quad \text{(E)}$$

(en fait, nous établirons que c'est une condition de convergence presque complète du biais vers zéro).

La démonstration de ce théorème se fait en plusieurs étapes. Étudions d'abord la condition nécessaire.

LEMME 1. — Soit $f \in \mathscr{F}$ telle que, pour une suite $[(A_i(n))_{1 \leqslant i \leqslant k(n)}]$, $n \in \mathbb{N}^*$, de partitions de $\mathbb{R}$, le biais tend vers zéro et $\sup_{1 \leqslant i \leqslant k(n)} p_i(n)$ ne tend pas vers zéro. Alors f est constante μ-p. p. sur un intervalle de μ-mesure non nulle.

(Nous sous-entendons dans « partition » l'expression « partition en intervalle ».)

■ Posons, en effet, $p(n) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant k(n)} p_i(n)$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $p(n_k)$ réalisant :

$$\forall k, \quad p(n_k) \geqslant \varepsilon .$$

On peut supposer, sans perdre de généralité que c'est la suite toute entière. Soit alors $j \in [1, k(n)]$ un indice réalisant :

$$p_j(n) = p(n) .$$

Posons :

$$[U_j(n), V_j(n)[= A_j(n) .$$

On a, le biais tendant vers zéro :

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_j(n)} \left| f - \frac{p_j(n)}{l_j(n)} \right| d\mu = 0 \tag{1}$$

Par ailleurs, il existe deux points U et V distincts de $\overline{\mathbb{R}}$ et une sous-suite n_l telle que :

$$\lim_{l \to +\infty} U_j(n_l) = U$$

et

$$\lim_{l \to +\infty} V_j(n_l) = V$$

on obtient, en posant :

$$A = [U, V[, \qquad p = P_f(A), \qquad h = \mu(A),$$

$$p_j(n_l) \to p, \qquad l_j(n_l) \to h \tag{2}$$

et

$$p \geqslant \varepsilon, \quad +\infty \geqslant h > 0 \tag{3}$$

De plus (1) entraîne :

$$\int_A \left| f - \frac{p_j(n_l)}{l_j(n_l)} \right| d\mu \to 0$$

Il existe donc une suite extraite n_{l_k} telle que, sur A :

$$\left| f - \frac{p_j(n_{l_k})}{l_j(n_{l_k})} \right| \xrightarrow[\mu\text{-p.s.}]{} 0$$

(voir par exemple [9], p. 46).

En utilisant (2) et (3), on déduit, en définitive :

$$f = \frac{p}{l} \qquad \mu\text{-p. p. sur A} . \quad ■$$

LEMME 2. — Si $\frac{1}{n} \sup_i \lambda_i(n)$ ne tend pas vers zéro, alors $\sup_i p_i(n)$ ne tend pas en probabilité vers zéro.

■ Il suffit de remarquer que $E(p_i(n)) = \dfrac{\lambda_i(n)}{n+1}$ et que les v. a. $p_i(n)$ sont bornées par 1. ■

Établissons la condition nécessaire du théorème 1.

Si le biais tend en probabilité vers zéro pour tout $f \in \mathcal{F}$ et que $\frac{1}{n} \sup_i \lambda_i(n)$ ne tend pas vers zéro, alors $\sup_i p_i(n)$ ne tend pas en probabilité vers zéro et il existera une suite $(A_i(n))$ de réalisations de la partition aléatoire pour laquelle le biais tend vers zéro et $\sup_i p_i(n)$ ne tend pas vers zéro. Il y a donc contradiction avec le résultat du lemme 1.

Pour établir la condition suffisante, nous nous proposons d'utiliser le schéma poissonnien. Les inégalités dont nous avons besoin nous étant utiles par la suite, nous les isolons dans le lemme suivant :

LEMME 3. — Soit X_n une v. a. r. γ_n (i. e. X_n admet une densité à support sur $\mathbb{R}^+$, $f(x) = \dfrac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1}\Big)$. On a alors les inégalités, pour tout $\varepsilon \in]0,1[$:

$$\frac{e^{-1/12n}}{\sqrt{2\pi n}} e^{-n\varepsilon} \leqslant P(X_n \geqslant n(1+\varepsilon)) \leqslant \sqrt{\frac{n}{2\pi}} (1+\varepsilon)^{n-1} e^{-n\varepsilon} \tag{4}$$

$$\frac{e^{-1/12n}}{\sqrt{2\pi n}} (1-\varepsilon^2)^n \leqslant P(X_n \leqslant n(1-\varepsilon)) \leqslant e\sqrt{\frac{n}{2\pi}} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{n-1} \tag{5}$$

■ En effet, notant A_n la première et B_n la seconde probabilité, nous avons :

$$A_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{n(1+\varepsilon)}^{+\infty} e^{-t} t^{n-1} dt = \frac{e^{-n} n^n}{n!} \times n \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-nt}(1+t)^{n-1} dt = \frac{e^{-n} n^n}{n!} A'_n$$

De même :

$$B_n = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{n(1-\varepsilon)} e^{-t} t^{n-1} dt = \frac{e^{-n} n^n}{n!} \times n \int_\varepsilon^1 e^{nt}(1-t)^{n-1} dt = \frac{e^{-n} n^n}{n!} B'_n$$

De plus, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{-1/12n} \leqslant \frac{e^{-n} n^n}{n!} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

— *Encadrement de* A'_n :

Considérons les fonctions :

$$\varphi(\varepsilon) = n(1+\varepsilon)^{n-1} e^{-n\varepsilon} - n \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-nt}(1+t)^{n-1} dt$$

et

$$\psi(\varepsilon) = e^{-n\varepsilon} - n\int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-nt}(1+t)^{n-1}dt.$$

On a :

$$\varphi(+\infty) = \psi(+\infty) = 0$$

et :

$$\varphi'(\varepsilon) = -n(n-1)\varepsilon(1+\varepsilon)^{n-2}e^{-n\varepsilon} \leqslant 0$$
$$\psi'(\varepsilon) = ne^{-n\varepsilon}[(1+\varepsilon)^{n-1} - 1] \geqslant 0$$

Donc φ est décroissante et ψ est croissante, d'où (4).

— *Encadrement de* B'_n :

On a, pour $\varepsilon \leqslant u \leqslant 1$:

$$e^{nu} \geqslant (1+\varepsilon)^n$$

D'où :

$$B'_n \geqslant (1+\varepsilon)^n \times n\int_{\varepsilon}^{1}(1-u)^{n-1}du = (1-\varepsilon^2)^n.$$

D'autre part :

$$e^u \leqslant 1 + u + \frac{3u^2}{4}$$

d'où :

$$(1-u)e^u \leqslant 1 - \frac{u^2}{4}$$

et

$$B'_n \leqslant ne\int_{\varepsilon}^{1}[e^u(1-u)]^{n-1}du \leqslant ne\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right)^{n-1}$$

on en déduit (5) ■

Remarque. — Nous utiliserons le lemme 3 sous la forme :

$$\forall\varepsilon\in]0,1[,\ \exists n_0\in\mathbb{N}^*,\ \exists\alpha(\varepsilon),\ \beta(\varepsilon),\ \gamma(\varepsilon),\ \delta(\varepsilon)\in]0,1[\ :\ \forall n \geqslant n_0,$$

et,

$$\alpha(\varepsilon)^n \leqslant P(X_n \geqslant n(1+\varepsilon)) \leqslant \beta(\varepsilon)^n \tag{6}$$
$$\gamma(\varepsilon)^n \leqslant P(X_n \leqslant n(1-\varepsilon)) \leqslant \delta(\varepsilon)^n \tag{7}$$

LEMME 4. — Si $\frac{1}{n}\sup_i \lambda_i(n)$ tend vers zéro, alors, $\sup_i p_i(n)$ tend presque complètement vers zéro.

■ Il s'agit d'établir que, pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n(\varepsilon) = P(\sup_i p_i(n) \geqslant \varepsilon)$ est le terme général d'une série convergente.

Introduisons, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $k(n)$ v. a. indépendantes $T_i(n)$, $i = 1, \ldots, k(n)$ chacune suivant une loi γ_{λ_i} et désignons par T_{n+1} la v. a. :

$$T_{n+1} = \sum_{i=1}^{k(n)} T_i(n)$$

on a alors :

$$T_{n+1} \in \gamma_{n+1}$$

et

$$P(\sup_i p_i(n) \geqslant \varepsilon) = P(\sup_i T_i(n) \geqslant \varepsilon T_{n+1})$$

(d'après (0)).

De plus, on a :

$$u_n(\varepsilon) \leqslant \sum_{i=1}^{k(n)} P(T_i(n) \geqslant \varepsilon T_{n+1}).$$

Posons :

$$\lambda_i = (n+1)\varepsilon_i \quad \text{et} \quad \overline{\varepsilon}(n) = \sup_i \varepsilon_i$$

on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{\varepsilon}(n) = 0.$$

Étudions $P(T_i(n) \geqslant \varepsilon T_{n+1})$; on a, avec $\varepsilon' \in]0,1[$:

$$P(T_i(n) \geqslant \varepsilon T_{n+1}) \leqslant P(T_{n+1} \leqslant (n+1)(1-\varepsilon')) + P(T_i(n) \geqslant \varepsilon(1-\varepsilon')(n+1))$$

posons : $\eta = \varepsilon(1-\varepsilon')$ et soit n_0 un entier tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \ P(T_{n+1} \leqslant (n+1)(1-\varepsilon')) \leqslant \delta(\varepsilon')^{n+1}$$
$$\text{et} \qquad \overline{\varepsilon}(n) \leqslant \eta/2.$$

En remarquant que la majoration dans (4) est valable $\forall \varepsilon > 0$, on obtient, pour $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} P(T_i(n) \geqslant \varepsilon T_{n+1}) &\leqslant \delta(\varepsilon')^{n+1} + P\left(T_i(n) \geqslant \lambda_i(n)\left(1 + \frac{\eta}{2\varepsilon_i}\right)\right) \\ &\leqslant \delta(\varepsilon')^{n+1} + \sqrt{\frac{\lambda_i(n)}{2\pi}}\left[\left(1 + \frac{\eta}{2\varepsilon_i}\right)^{\varepsilon_i} e^{-\eta/2}\right]^{n+1} \\ &\leqslant \delta(\varepsilon')^{n+1} + \sqrt{\frac{\lambda_i(n)}{2\pi}}\left[\left(1 + \frac{\eta}{2\overline{\varepsilon}(n)}\right)^{\overline{\varepsilon}(n)} e^{-\eta/2}\right]^{n+1} \end{aligned}$$

Comme $\left(1 + \dfrac{\eta}{X}\right)^X$ tend vers 1 quand X tend vers zéro, il existe $a \in]0,1[$ et un entier $n_1 \geqslant n_0$ tel que :

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \left(1 + \frac{\eta}{2\overline{\varepsilon}(n)}\right)^{\overline{\varepsilon}(n)} e^{-\eta/2} \leqslant a.$$

Il vient alors, $\forall n \geqslant n_1$:

$$u_n(\varepsilon) \leqslant k(n)\delta(\varepsilon')^{n+1} + k(n)\sqrt{\frac{\overline{\varepsilon}(n)(n+1)}{2\pi}}\, a^{n+1}$$

et $k(n)$ est inférieur à $n + 1$.

La série de terme général $u_n(\varepsilon)$ est donc convergente. ■

Avant de poursuivre, introduisons les définitions suivantes :

DÉFINITION 2. — Soit $f \in \mathscr{F}$, $(A_i(n))$ une suite de partitions de $\mathbb{R}$ en intervalles et $\Delta_n^{(1)}$ le biais associé à f et $(A_i(n))$.

— On dit que la suite $(A_i(n))$ tend P_f-en module vers zéro, si l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_i P_f(A_i(n)) = 0 .$$

— On dit que le biais tend vers zéro, uniformément par rapport à la suite $(A_i(n))$ si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 : \forall (A_i(n)), \qquad \sup_i P_f(A_i(n)) \leqslant \eta \ \Rightarrow\ \Delta_n^{(1)} \leqslant \varepsilon .$$

On note $\hat{\mathscr{F}}$ l'ensemble des densités sur $\mathbb{R}$ intégrables-Riemann.

LEMME 5. — Soit $f \in \hat{\mathscr{F}}$. Si une suite de partitions de $\mathbb{R}$, $(A_i(n))$, en intervalles, tend P_f-en module vers zéro, alors le biais associé à f et $(A_i(n))$ tend vers zéro, uniformément par rapport à la suite $(A_i(n))$.

■ f étant intégrable-Riemann, il existe une suite (g_p) de fonctions positives et une suite (K_p) de partitions de $\mathbb{R}$ en intervalles telles que :

— g_p converge L1 en croissant vers f.

— g_p est constante sur chacun des éléments de K_p et non nulle sur un nombre fini d'entre eux.

Dans ces conditions, si l'on note D la distance L1 et $\mathscr{B}_n$ la tribu engendrée par la partition $(A_i(n))$, on a :

$$\begin{aligned} D(f, E^{\mathscr{B}_n}(f)) &\leqslant D(f, g_p) + D(g_p, E^{\mathscr{B}_n}(g_p)) + D(E^{\mathscr{B}_n}(g_p), E^{\mathscr{B}_n}(f)) \\ &\leqslant 2D(f, g_p) + D(g_p, E^{\mathscr{B}_n}(g_p)) . \end{aligned}$$

D'autre part, on a, pour tout p :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_i \int_{A_i(n)} g_p d\mu = 0 .$$

Il suffit donc d'établir le lemme pour les fonctions f du type g_p, donc pour les fonctions indicatrices d'intervalles, et le résultat est évident dans ce cas. ■

Remarque 1. — La démonstration s'étend d'elle-même au cas où f est égale μ-p. p. à une fonction intégrable-Riemann.

Remarque 2. — Nous avons en fait établi que le résultat reste vrai pour toute densité sur $\mathbb{R}$, la démonstration ne pouvant s'étendre à $\mathbb{R}^K$, $K > 1$; mais connaît-on beaucoup de densités sur $\mathbb{R}$ non égale μ-p. p. à une fonction intégrable-Riemann ?

Il est maintenant facile d'établir, en utilisant les lemmes 5 et 4, que la condition (E) est suffisante pour entraîner la convergence du biais presque complètement vers zéro, et cela, pour tout $f \in \hat{\mathscr{F}}$.

II.B. — Étude de l'aléa

Il s'agit d'étudier le comportement en probabilité de la quantité :

$$\Delta_n^{(2)} = \sum_{i=2}^{k(n)-1} \left| \frac{\lambda_i}{n+1} - p_i \right|$$

qu'on peut remplacer, lorsque le biais tend vers zéro, par :

$$\Delta_n'^{(2)} = \sum_{i=1}^{k(n)} \left| \frac{\lambda_i}{n+1} - p_i \right| = 2\sum_{i=1}^{k(n)} \left(\frac{\lambda_i}{n+1} - p_i \right)^+ = 2\delta_n^+ .$$

Établissons le résultat préliminaire suivant :

Lemme 6. — Soit X la λ^{eme} valeur d'un échantillon ordonné de taille n de loi uniforme sur [0,1]. On a :

$$E(X) = \frac{\lambda}{n+1} \quad \text{et, en posant} \quad a = \frac{\lambda}{n+1},$$

$$E((a - X)^+) = a(1-a)C_n^\lambda a^\lambda (1-a)^{n-\lambda} \tag{8}$$

De plus, si $a < 1/2$, il existe $u, v > 0$ tels que :

$$u\sqrt{\frac{a}{n+1}} \leqslant E((a - X)^+) \leqslant v\sqrt{\frac{a}{n+1}} \tag{9}$$

Dans tous les cas, on a :

$$E((a - X)^+) \leqslant a \tag{10}$$

■ Soit F (λ, n, x) la F. d. r. de X. On a :

$$F(\lambda, n, x) = \frac{n!}{(\lambda-1)!\,(n-\lambda)!} \int_0^x t^{\lambda-1}(1-t)^{n-\lambda}dt$$

$$= \sum_{r=\lambda}^{n} C_n^r x^r (1-x)^{n-r} \tag{11}$$

(voir, par exemple [*11*], p. 190).

Il vient :

$$\begin{aligned} E((a - X)^+) &= aF(\lambda, n, a) - a\frac{(n+1)!}{\lambda!\,(n-\lambda)!}\int_0^a t^\lambda(1-t)^{n-\lambda}dt \\ &= [F(\lambda, n, a) - F(\lambda+1, n+1, a)] \end{aligned}$$

(8) s'en déduit en explicitant le crochet et en utilisant (11)
(9) se déduit de (8) par la formule de Stirling (voir [*4*])
(10) est évident. ■

Avant d'énoncer une C. N. S. de convergence en probabilité, nous introduisons les notations suivantes :

Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. On note :

— $J(n, M) = \{ i \mid \lambda_i(n) \leqslant M \}$

— $a(n, M) \doteq \sum_{i \in J(n,M)} \lambda_i(n)$

— $\hat{a} = \sup_M \overline{\lim_n} \dfrac{a(n, M)}{n+1}$.

Nous avons, alors :

THÉORÈME 2. — Lorsque le biais tend vers zéro, une C. N. S. pour que l'aléa tende vers zéro P_f-en probabilité est que :

$$\underline{\hat{a} = 0}.$$

■ Nous avons, en utilisant le lemme 6 :

$$E(\delta_n^+) \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{i \in J(n,M)} \lambda_i(n) + \frac{v}{n+1}\sum_{i \notin J(n,M)} \sqrt{\lambda_i}$$

En posant $k = \text{Card } J(n, M)$ et en utilisant la concavité de la fonction $x \to \sqrt{x}$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(\delta_n^+) &\leqslant \frac{1}{n+1} a(n, M) + v\sqrt{\frac{k}{n+1}} \\ &\leqslant \frac{1}{n+1} a(n, M) + \frac{v}{\sqrt{M}}\,; \end{aligned}$$

la condition $\hat{a} = 0$ est donc suffisante pour avoir :

$$E(\Delta_n^{(2)}) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

donc

$$\Delta_n^{(2)} \xrightarrow{P_f} 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

Supposons maintenant $\hat{a} \neq 0$. Il existe alors $M > 0$, $\alpha > 0$ et une sous-suite n_j tels que :

$$\frac{a(n_j, M)}{n_j + 1} \geqslant \alpha$$

Mais, on a, d'après le lemme 6 :

$$\mathrm{E}(\delta_n^+) \geqslant \frac{u}{n+1} \sum_{i \in \mathrm{J}(n,\mathrm{M})} \sqrt{\lambda_i}$$

Soit encore, en remarquant que,

$$0 < x < \mathrm{M} \Rightarrow \sqrt{x} > \frac{x}{\sqrt{\mathrm{M}}},$$

$$\mathrm{E}(\delta_n^+) \geqslant \frac{u}{\sqrt{\mathrm{M}}} \sum_{i \in \mathrm{J}(n,\mathrm{M})} \frac{\lambda_i}{n+1} = \frac{u}{\sqrt{\mathrm{M}}} a(n, \mathrm{M})/n + 1$$

Il vient, en définitive :

$$\mathrm{E}(\delta_{n_j}^+) \geqslant \frac{u\alpha}{\sqrt{\mathrm{M}}}$$

Donc, $\mathrm{E}(\Delta_n^{(2)})$ ne tend pas vers zéro et $\Delta_n^{(2)}$ ne tend pas P_f-en probabilité vers zéro puisque c'est une v. a. bornée par 2. ■

On peut rassembler les résultats précédents dans l'énoncé suivant, lorsque le partage est équilibré (tous les λ_i égaux à l'unité près).

THÉORÈME 3. — Soit $\lambda(n)$ une fonction de n et $(\lambda_i(n))$ une famille de $k(n)$ entiers différent de $\lambda(n)$ d'au plus une unité et vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \lambda_i(n) = n + 1 .$$

Alors, pour que, $\forall f \in \hat{\mathscr{F}}$, l'estimateur de la partition aléatoire converge L1 en probabilité vers f, il est nécessaire et suffisant que :

$$\lambda(n) = o(n) \quad \text{et} \quad \lambda(n) = \infty(1) \qquad \text{ou} \qquad k(n) = o(n) \quad \text{et} \quad k(n) = \infty(1) \tag{12}$$

Remarque. — Nous avons pu établir qu'en fait la condition (12), lorsque la partition est équilibrée, est une C. N. S. de convergence L1 presque complète pour l'estimateur de la partition aléatoire. La démonstration fera l'objet d'une publication ultérieure.

III. CONVERGENCE L∞

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, d'étudier des conditions de convergence en probabilité et presque complète de l'estimateur de la partition aléatoire pour la distance L∞ sur l'ensemble des densités sur $\mathbb{R}$.

Remarquons d'abord que nous devrons nous limiter à un sous-ensemble de $\mathscr{F}$ car, d'après [*1*] il n'existe pas, pour la distance L∞, d'estimateur convergent en probabilité dans $\mathscr{F}$. Il n'en existe toujours pas quand on se limite à l'ensemble des densités continues. Nous nous placerons donc dans l'ensemble $\mathscr{F}_0$ des densités uniformément continues. Dans la suite de ce paragraphe, f sera un élément de $\mathscr{F}_0$.

Nous définissons l'écart entre f et son estimateur f_n par :

$$\Delta_n = \Delta_n(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} | f(x) - f_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, x) |$$

et considérons le biais :

$$\Delta_n^{(1)} = \Delta_n^{(1)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} | f(x) - \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, x) |$$

et l'aléa :

$$\Delta_n^{(2)} = \Delta_n^{(2)}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sup_{x\in\mathbb{R}} | \varphi_n(X_1, X_2, \ldots, X_n, x) - f_n(X_1, \ldots, X_n, x) |$$

$$= \sup_{i\in[2,k(n)-1]} \frac{1}{l_i}\left| \frac{\lambda_i}{n+1} - p_i \right|$$

Nous nous proposons d'établir des conditions portant sur la famille (λ_i) pour que Δ_n converge P_f-en probabilité, presque sûrement ou presque complètement vers zéro. Nous verrons que, sous certaines hypothèses, les trois modes de convergence sont équivalents.

La nécessité de la convergence du biais et de l'aléa est ici élémentaire. Elle découle du résultat suivant :

PROPOSITION 1. — Si, pour une suite de partitions $(\mathscr{P}_n)$ de $\mathbb{R}$ en intervalles, il existe une suite (g_n) de fonctions en escalier subordonnées à $(\mathscr{P}_n)$ et convergeant L∞ vers f, alors le biais associé à la suite $(\mathscr{P}_n)$ tend vers zéro.

■ En effet, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a :

$$\sup_{x\in[a,b]} | f(x) - \lambda | \geqslant \left| \frac{P_f([a, b])}{\mu([a, b])} - \lambda \right| \qquad ■$$

Nous étudierons donc successivement des conditions de convergence du biais et de l'aléa vers zéro.

III.A. — Étude du biais

Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME 4. — Une condition nécessaire et suffisante de convergence presque complète du biais vers zéro, pour tout $f \in \mathscr{F}_0$ est que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sup_i \lambda_i^{(n)} = 0$$

Nous établissons pour cela les résultats suivants :

LEMME 7. — Pour tout $f \in \mathscr{F}_0$ et toute suite $(A_i(n))$ de partitions de $\mathbb{R}$ en intervalles, si l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_i p_i(n) = 0$$

Alors, le biais associé à f et à $(A_i(n))$ tend vers zéro uniformément par rapport à la suite de partitions $(A_i(n))$ choisie.

■ f étant uniformément continue, on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \eta > 0 : \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ | x, y | \leqslant \eta \ \Rightarrow \ | f(x) - f(y) | \leqslant \varepsilon$$

Soit $(A_i(n))$ une suite de partitions de $\mathbb{R}$ en intervalles telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_i p_i(n) = 0 .$$

Il existe un entier n_0 tel que, $\forall n \geqslant n_0$, on ait :

$$\sup_i p_i(n) \leqslant \varepsilon\eta .$$

Dans ces conditions, et pour $n \geqslant n_0$,

— si $l_i(n) \leqslant \eta$, alors $\sup\limits_{x \in A_i(n)} \left| f(x) - \dfrac{p_i(n)}{l_i(n)} \right| \leqslant \varepsilon$

— si $l_i(n) > \eta$, alors $f(x)$ ne peut dépasser 2ε sur l'intervalle $A_i(n)$, sinon elle dépasserait ε sur un sous-intervalle de $A_i(n)$ de longueur supérieure à η et l'on aurait :

$$p_i(n) > \varepsilon\eta .$$

D'où :

$$\sup_{x \in A_i(n)} \left| f(x) - \frac{p_i(n)}{l_i(n)} \right| \leqslant \sup_{x \in A_i(n)} f(x) \leqslant 2\varepsilon .$$

On a donc, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$\Delta_n^{(1)} \leqslant 2\varepsilon . \quad ■$$

LEMME 8. — Si, pour $f \in \mathscr{F}_0$ et pour une suite de partitions $(A_i(n))$, le biais tend vers zéro et $\sup\limits_i p_i(n)$ ne tend pas vers zéro, alors f est constante sur un intervalle de longueur non nulle.

■ La démonstration est analogue à celle du lemme 1. Il suffit d'y remplacer le signe « $\displaystyle\int_{A_i(n)}$ » par « $\sup\limits_{x \in A_i(n)}$ » et de tenir compte de la continuité uniforme de f. On arrive à la fin à :

$$\sup_{x \in [u, v]} \left| f(x) - \frac{P_f([u, v])}{\mu([u, v])} \right| = 0 \quad ■$$

Le théorème 4 se démontre alors par application des lemmes 2 et 4 puis des lemmes 7 et 8.

III.B. — Étude de l'aléa

Nous allons établir successivement une condition suffisante de convergence presque complète de l'aléa vers zéro et une condition nécessaire de convergence en probabilité pour tout $f \in \mathscr{F}_0$. Nous en déduirons une C. N. S. de convergence en probabilité, presque sûre ou presque complète de l'aléa, lorsque les $(\lambda_i^{(n)})$ sont équilibrés, les trois modes de convergence étant alors équivalent.

LEMME 9. — Si l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\inf_i \lambda_i^{(n)}}{\operatorname{Log} n} = +\infty \quad \text{(F)}$$

alors, l'aléa converge presque complètement vers zéro, pour tout $f \in \mathscr{F}_0$.

■ Remarquons d'abord que f est bornée. Soit B un de ses majorants. On a :

$$\forall i, \forall n, \quad p_i(n) \leqslant \mathrm{B} l_i(n)$$

D'où :

$$\Delta_n^{(2)} = \sup_i \frac{1}{l_i(n)} \left| p_i(n) - \frac{\lambda_i^{(n)}}{n+1} \right| \leqslant \mathrm{B} \sup_i \frac{1}{p_i} \left| p_i - \frac{\lambda_i}{n+1} \right| = \mathrm{B}.\mathrm{Z}_n$$

Utilisant le schéma poissonnier et les notations du lemme 4, Z_n a même loi que :

$$\delta_n = \sup_i \left| \mathrm{T}_i(n) - \frac{\lambda_i}{n+1} \mathrm{T}_{n+1} \right| \frac{1}{\mathrm{T}_i(n)}$$

Nous démontrons que, sous la condition (F), pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{U}_n = \sum_i \mathrm{U}_{n,i} = \sum_i \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{T}_i(n)} \left| \mathrm{T}_i(n) - \frac{\lambda_i}{n+1} \mathrm{T}_{n+1} \right| \geqslant \varepsilon \right)$$

est le terme général d'une série convergente.

Considérons l'événement :

$$\mathrm{E}_i(n) = \left\{ \frac{1}{\mathrm{T}_i(n)} \left| \mathrm{T}_i(n) - \frac{\lambda_i}{n+1} \mathrm{T}_{n+1} \right| \geqslant \varepsilon \right\}$$

On a :

$$\mathrm{E}_i(n) = \mathrm{E}_i^+(n) + \mathrm{E}_i^-(n),$$

avec :

$$\mathrm{E}_i^+(n) = \left\{ \mathrm{T}_i(n) \geqslant \frac{\lambda_i}{(n+1)(1-\varepsilon)} \mathrm{T}_{n+1} \right\}$$

$$\mathrm{E}_i^-(n) = \left\{ \mathrm{T}_i(n) \leqslant \frac{\lambda_i}{(n+1)(1+\varepsilon)} \mathrm{T}_{n+1} \right\}$$

posant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$, $(1 - \varepsilon')/1 - \varepsilon = 1 + a$, $(1 + \varepsilon')/1 + \varepsilon = 1 - b$ avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a :

$$P(E_i^+(n)) \leqslant P(T_{n+1} < (n+1)(1-\varepsilon')) + P(T_i \geqslant \lambda_i(1+a))$$

et

$$P(E_i^-(n)) \leqslant P(T_{n+1} > (n+1)(1+\varepsilon')) + P(T_i \leqslant \lambda_i(1-b))$$

Utilisant le lemme 3, on obtient, pour $n, \lambda_i > n_0$:

$$P(E_i^+(n)) \leqslant \delta(\varepsilon')^n + \beta(a)^{\lambda_i}$$

et

$$P(E_i^-(n)) \leqslant \beta(\varepsilon')^n + \delta(b)^{\lambda_i}$$

D'où :

$$u_n \leqslant n[\delta(\varepsilon')^n + \beta(\varepsilon')^n] + \sum_i \beta(a)^{\lambda_i} + \sum_i \delta(b)^{\lambda_i}.$$

Il nous suffit donc d'établir que :

$$v_n = \sum_i e^{-\eta\lambda_i}, \quad \text{avec} \quad \eta > 0,$$

est le terme général d'une série convergente. D'après l'hypothèse :

$$\forall M > 0,\ \exists n_1 > n_0 : \forall n > n_1,\ \inf_i \lambda_i^{(n)} \geqslant M \operatorname{Log} n .$$

D'où pour $n \geqslant n_1$,

$$v_n \leqslant n e^{-\eta M \log n} = \frac{1}{n^{\eta M - 1}}$$

Il suffit donc de choisir $M > \frac{2}{\eta}$, pour avoir le résultat. ■

LEMME 10. — Si $\sup_i \lambda_i^{(n)}/\operatorname{Log} n$ ne tend pas vers $+\infty$, il existe un élément $f \in \mathscr{F}_0$ pour lequel l'aléa ne tend pas vers zéro en probabilité.

■ Prenons pour densité f:

— $f(x) = x + 1$ si $x \in [-1, 0]$
— $f(x) = 1 - x$ si $x \in [0, 1]$
— $f(x) = 0$ sinon.

Alors, pour tout intervalle $A_i \subset [-1, +1]$, on a :

$$\mu(A_i) \leqslant 2P_f(A_i)$$

On en déduit que, pour $2 \leqslant i \leqslant k(n) - 1$,

$$\frac{1}{l_i}\left| p_i - \frac{\lambda_i}{n+1} \right| \geqslant \frac{1}{2p_i}\left| p_i - \frac{\lambda_i}{n+1} \right|$$

Posons :

$$\delta_n = \sup_i \frac{1}{p_i} \left| p_i - \frac{\lambda_i}{n+1} \right| .$$

On a, pour tout $\varepsilon > 0$, en posant $\varepsilon' + 1 = 1/1 - \varepsilon$,

$$P(\delta_n \geqslant \varepsilon') \geqslant P\left(\bigcup_{i=2}^{k-1} \left\{ p_i < \frac{\lambda_i}{n+1}(1-\varepsilon) \right) \right.$$

De plus :

$$P\left(\bigcup_{i=2}^{k-1} \left\{ p_i < \frac{\lambda_i}{n+1}(1-\varepsilon) \right\} \right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=2}^{k-1} \left\{ p_i \geqslant \frac{\lambda_i}{n+1}(1-\varepsilon) \right\} \right)$$
$$\geqslant 1 - \prod_{i=2}^{k-1} P\left(p_i \geqslant \frac{\lambda_i}{n+1}(1-\varepsilon) \right)$$

Soit, en posant :

$$\alpha_i(\varepsilon) = P\left(p_i < \frac{\lambda_i}{n+1}(1-\varepsilon) \right),$$

$$P(\delta_n \geqslant \varepsilon') \geqslant 1 - \prod_{i=2}^{k-1} (1 - \alpha_i(\varepsilon)) \geqslant 1 - e^{-\sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i(\varepsilon)}$$

Il suffit donc d'établir que, sous l'hypothèse de l'énoncé, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\sum_{i=2}^{k-1} \alpha_i(\varepsilon)$$

ne tend pas vers zéro quand n tend vers $+\infty$.

D'après l'hypothèse, il existe $M > 0$ et une sous-suite n_j telle que :

$$\sup_i \lambda_i^{(n_j)} < M \operatorname{Log} n_j \tag{13}$$

On peut supposer, sans perdre de généralité que la sous-suite n_j est la suite toute entière.

On a, en reprenant les notations du lemme précédent :

$$\alpha_i(\varepsilon) = P\left(T_i(n) < \frac{\lambda_i}{n+1}(1-\varepsilon) T_{n+1} \right)$$

Soit $\varphi \in]0,1[$ et ε'' défini par :

$$1 - \varepsilon'' = (1-\varepsilon)(1-\varphi) .$$

On a :

$$\begin{aligned}\alpha_i(\varepsilon) &\geqslant P(\{ T_i(n) < \lambda_i(1-\varepsilon'') \} \cap \{ T_{n+1} > (n+1)(1-\varphi) \}) \\ &\geqslant P(T_i(n) < \lambda_i(1-\varepsilon'')) - P(T_{n+1} < (n+1)(1-\varphi))\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3, on obtient :

$$\sum_i \alpha_i(\varepsilon) \geqslant C \sum_i \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e^{+\lambda_i \log(1-\varepsilon''^2)} - k(n)\delta(\varphi)^{n+1}$$

où C est une constante $\left(C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-1/12} \right)$

en posant $d = -\operatorname{Log}(1 - \varepsilon''^2)$ et en remarquant que :

$$x \to \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-dx}$$

est convexe, on obtient :

$$\sum_i \alpha_i(\varepsilon) \geqslant C \frac{k(n)^{3/2}}{\sqrt{n+1}} e^{-d(n+1)/k(n)} - k(n)\delta(\varphi)^{n+1}$$

de (13) on tire :

$$\frac{n+1}{k(n)} < M \operatorname{Log}(n+1)$$

D'où, en définitive :

$$\sum_i \alpha_i(\varepsilon) \geqslant \frac{C(n+1)}{M \operatorname{Log}(n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{M \operatorname{Log}(n+1)}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{Md}} - (n+1)\delta(\varphi)^{n+1}$$

Il suffit alors de choisir ε et φ de telle sorte que :

$$-M \operatorname{Log}(1 - \varepsilon''^2) < 1 .$$

pour que $\sum_i \alpha_i(\varepsilon)$ ne tende pas vers zéro. ■

On en déduit l'énoncé suivant :

THÉORÈME 5. — Soit $((\lambda_i^{(n)})_{i\in[1,k(n)]})_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de partitions de $n + 1$ équilibrée

$$\left(\text{i. e. } \lim_{n\to+\infty} \inf \frac{\inf_i \lambda_i^{(n)}}{\sup_i \lambda_i^{(n)}} > 0 \right).$$

Pour que l'estimateur de la partition aléatoire associé converge $L\infty$ en probabilité, presque sûrement ou presque complètement vers f, pour toute densité $f \in \mathscr{F}_0$, il est nécessaire et suffisant que l'on ait :

$$\sup_i \lambda_i^{(n)} = o(n)$$

et

$$\sup_i \lambda_i^{(n)} = \infty\,(\text{Log}\ n)$$

En particulier, lorsqu'on partage l'entier $n + 1$ en $k(n)$ $(\lambda_i^{(n)})$ égaux à ± 1 près, une C. N. S. sur $k(n)$ pour que l'estimateur de la partition aléatoire converge en probabilité, presque sûrement ou presque complètement est que l'on ait :

$$k(n) = \infty(1) \quad \text{et} \quad k(n) = o\left(\frac{n}{\text{Log}\ n}\right)$$

Remarque. — Nous retrouvons dans la seconde partie de l'énoncé ci-dessus un résultat établi dans [*8*] avec des hypothèses plus restrictives sur la densité.

Note : Une erreur s'est glissée dans la démonstration du lemme 10. Le résultat demeure exact mais sa démonstration est plus complexe. Nous la publions dans notre thèse qui paraîtra très prochainement.

BIBLIOGRAPHIE

[*1*] ABOU-JAOUDE, *Sur un théorème de non existence d'estimateurs convergent en probabilité* .Note au C. R., t. **278**, série A, 1974, p. 1445.

[*2*] ABOU-JAOUDE, Conditions nécessaires et suffisantes de convergence L1 en probabilité de l'histogramme pour une densité. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, t. **12**, n° 3, 1976, en cours de publication.

[*3*] DUGUE, *Traité de statistique théorique et appliquée*, Masson, 1958.

[*4*] FELLER, On the normal approximation to the binomial distribution, *A. M. S.*, vol. **16**, 1945, p. 319-329.

[*5*] GEFFROY, Thèse, Fac. Sci. Univ. Paris, 1958.

[*6*] GESSAMAN, A consistant non parametric multivariate density estimator based on statistically equivalent blocs. *A. M. S.*, vol. **41**, 1970, p. 1344-1346.

[*7*] KARLIN, *Initiation aux processus aléatoires*, Dunod, 1969.

[*8*] LECOUTRE, Thèse, Fac. Sci. Univ., Paris VI, 1975.

[*9*] NEVEU, *Bases mathématiques du Calcul des probabilités.* Masson, 1964.

[*10*] REVESZ, On empirical density functions. *Period. Math. Hungar*, vol. **2**, 1972, p. 85-110.

[*11*] RENYI, *Calcul des probabilités*, Dunod, 1966.

[*12*] TUSNADY, On testing density functions. *Period. Math. Hungar*, vol. **5**, 1974, p. 161-169.

(Manuscrit reçu le 19 juillet 1976)